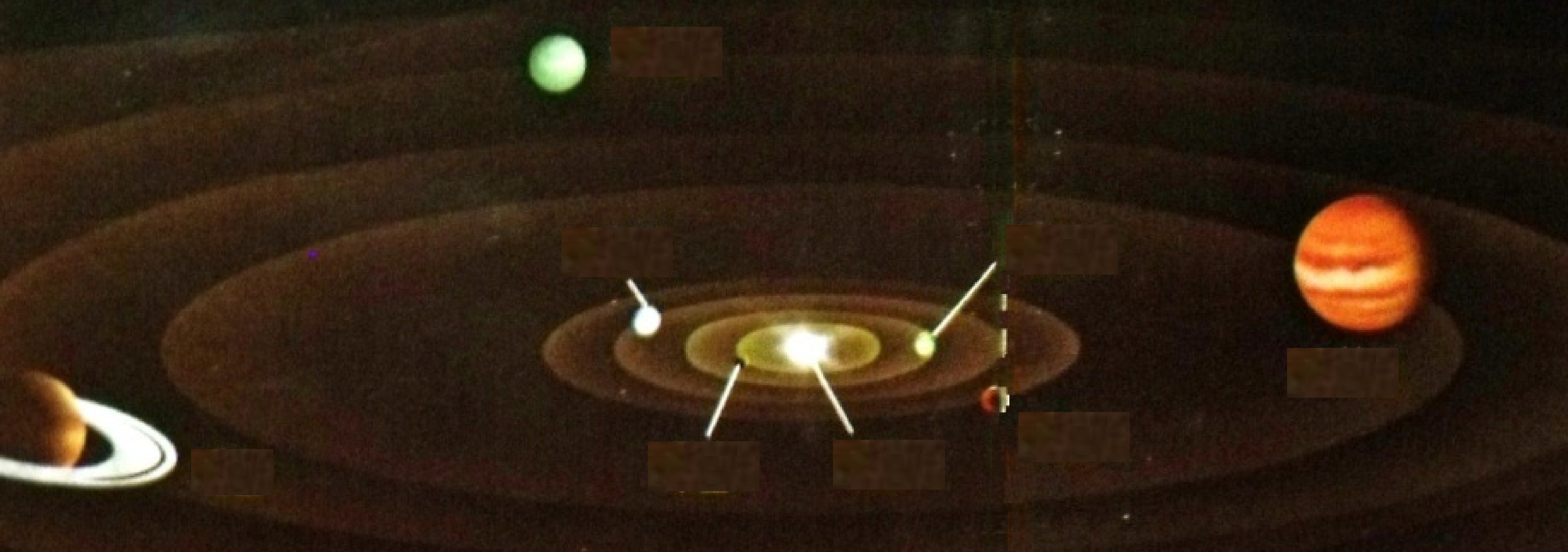
衛星系研究会　平成25年8月7～9日 定山渓温泉 渓流荘（札幌）

高軌道傾斜角を持つ三体系の階層安定性



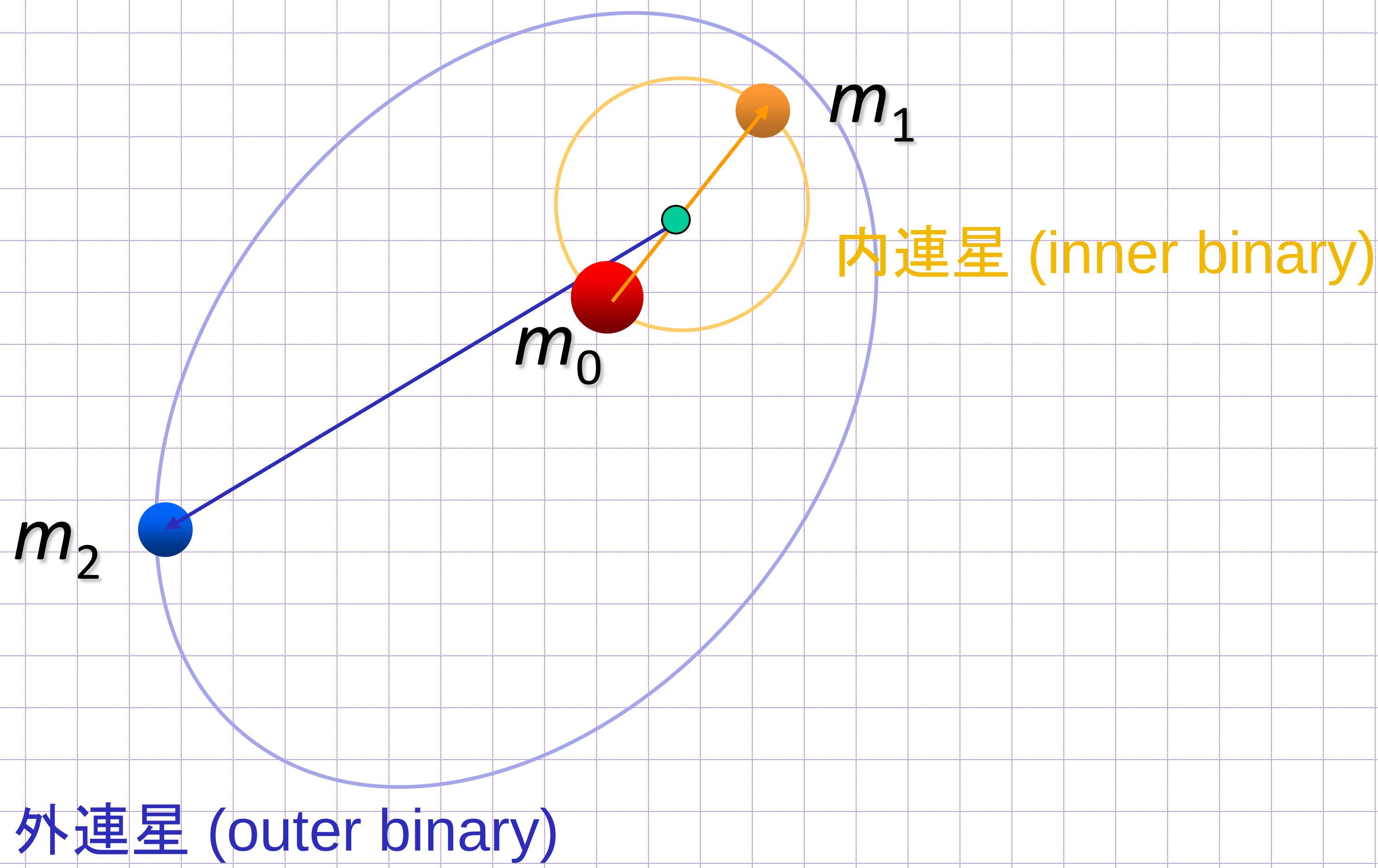
斎藤　正也 (統計数理研究所)

Виктор В. Орлов (Санкт-Петербургский государственный университет)

谷川　清隆 (国立天文台)

階層三体系

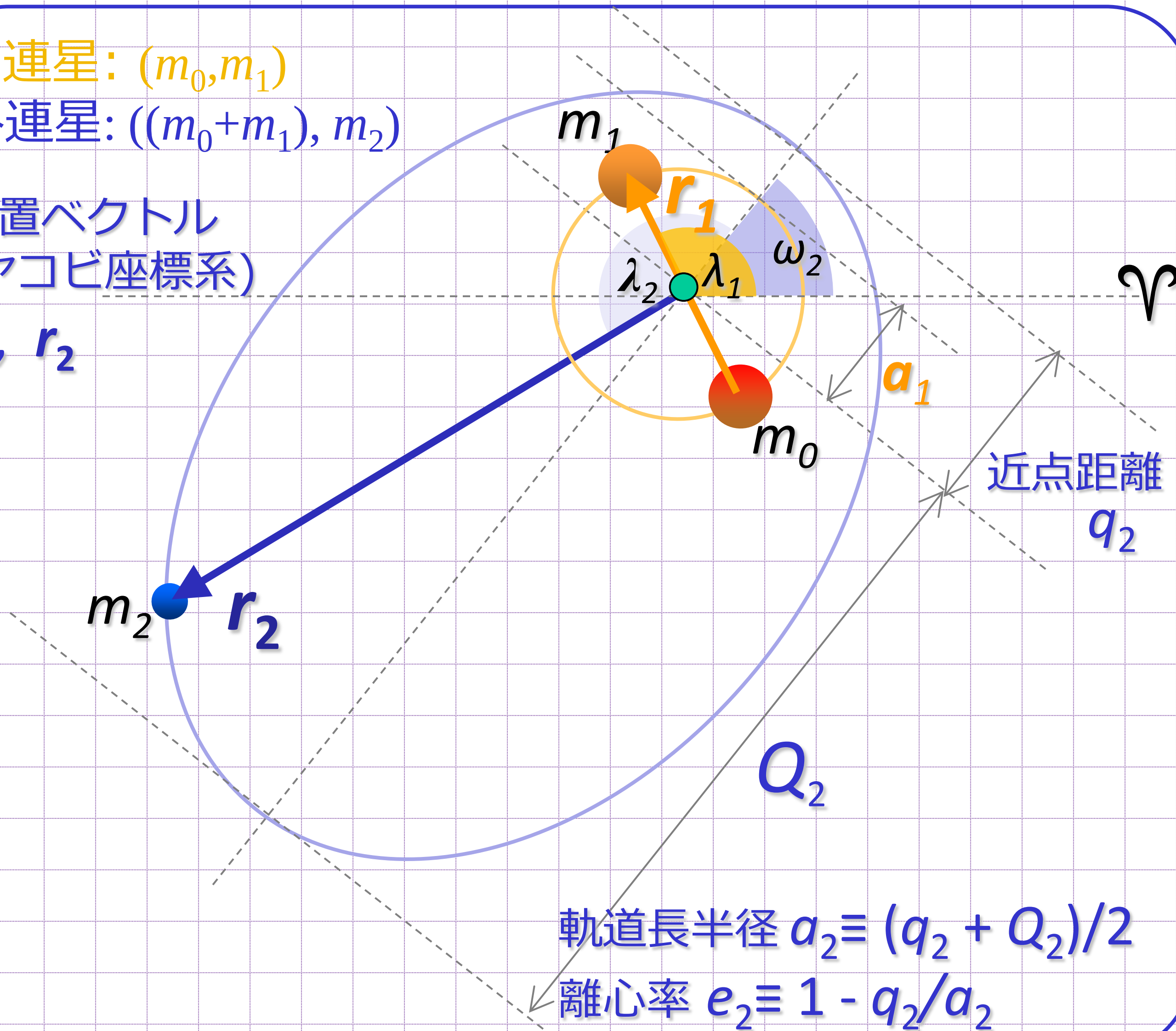
2つの交叉しない楕円軌道で近似できる三体系



軌道要素

内連星: (m_0, m_1)
外連星: $((m_0+m_1), m_2)$

位置ベクトル
(ヤコビ座標系)
$\boldsymbol{r}_1$, $\boldsymbol{r}_2$



軌道長半径 $a_2 \equiv (q_2 + Q_2)/2$
離心率 $e_2 \equiv 1 - q_2/a_2$

軌道要素

相互傾斜角 I

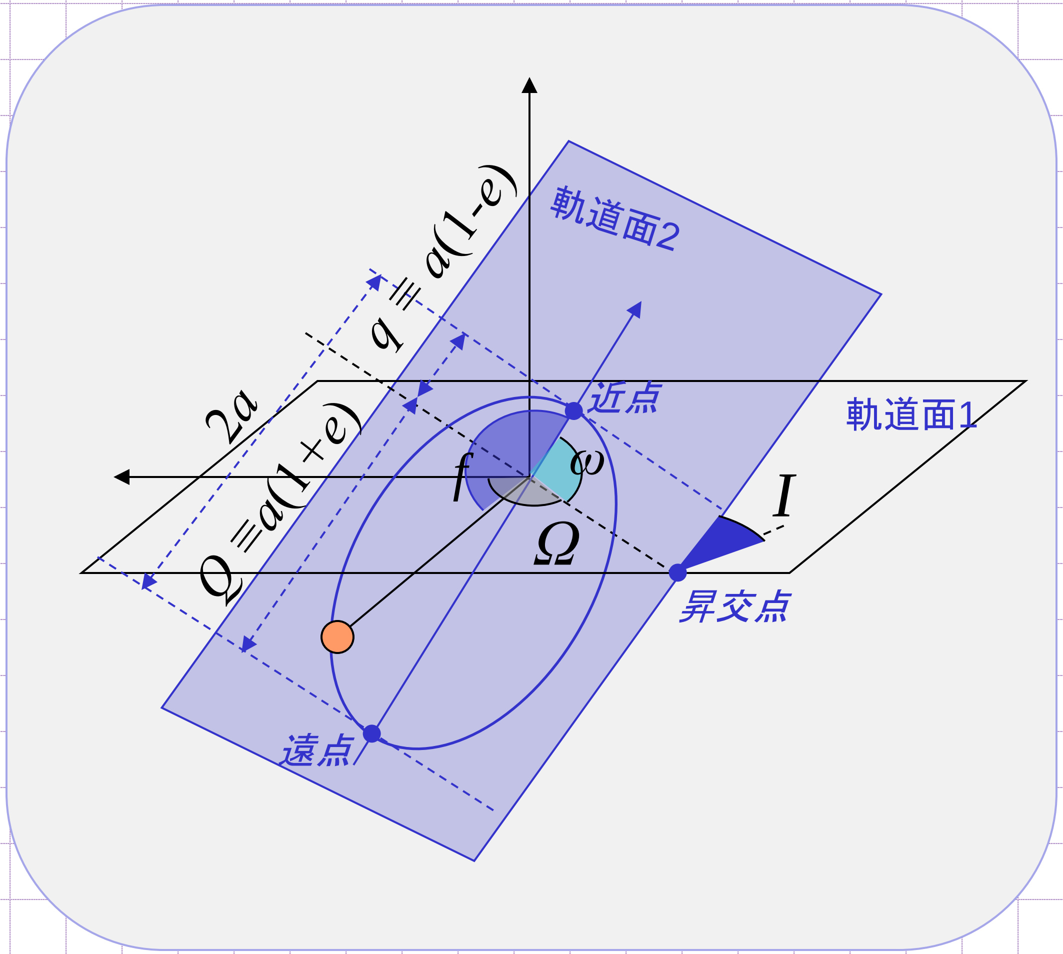
昇交点経度 Ω

軌道長半径 a

離心率 e

近点引数 ω

真近点角 f



運動方程式 (ヤコビ座標系)

運動方程式

$$H = \frac{p_1^2}{2\mu_1^*} - \frac{\mu_1\mu_1^*}{r_1} + \frac{p_2^2}{2\mu_2^*} - \frac{\mu_2\mu_2^*}{r_2} + R$$

$$R = \frac{\mu_2\mu_2^*}{r_2} - \frac{Gm_2m_0}{|\rho_2 - \rho_0|} - \frac{Gm_2m_1}{|\rho_2 - \rho_1|},$$

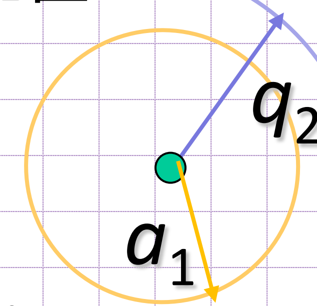
$dq_j/dt = \partial H/\partial p_j$, $dp_j/dt = -\,\partial H/\partial p_j$, ($j$=1, 2)

ヤコビ系 ($\boldsymbol{r}_j$, $\boldsymbol{p}_j$) (j=1,2) と慣性系 ($\boldsymbol{\rho}_i$, $\boldsymbol{\pi}_i$) (i=1,2,3)との対応

$$\left(\begin{aligned} &\mu_j = \mu_{j-1} + m_j, \quad 1/\mu_j^* = 1/\mu_{j-1} + 1/m_j, \\ &{}^{g}\rho_j = (\mu_{j-1}\,{}^{g}\rho_{j-1} + m_j\rho_j)/\mu_j, \quad r_j = \rho_j - {}^{g}\rho_j, \end{aligned}\right)$$

階層安定

- 階層安定
  - 天体の順序の入れ替わりや、系の分裂が起きないこと
- (階層)安定限界
  - 内外の連星が最も接近した階層安定な軌道配置
  - 一般に q_2/a_1 の下限として記述される
- ねらい
  - 観測された、またはシミュレーションで形成された、惑星系・連星系が長期間(母天体の寿命程度)に相続するかを軽量なモデルで網羅的に調べる



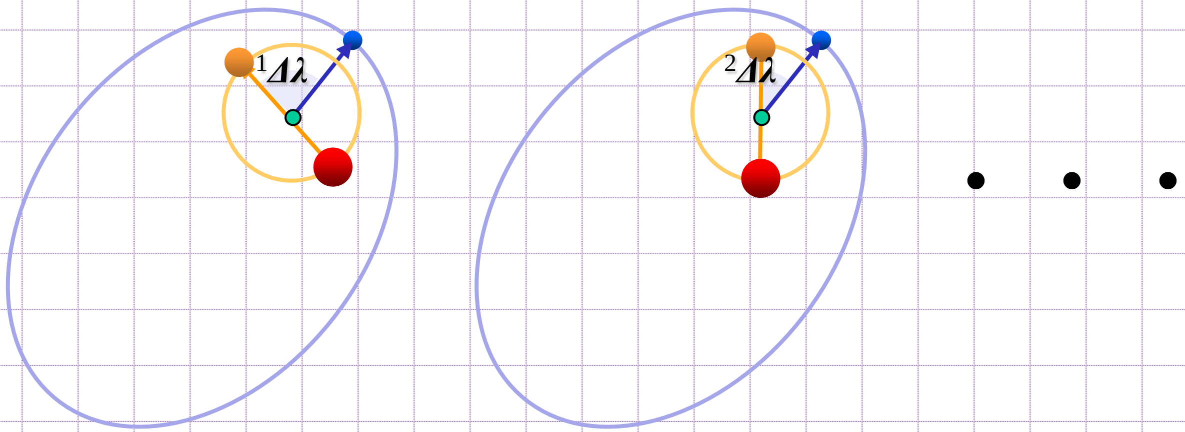
a_1:内連星の軌道長半径
q_2:外連星の近点距離

安定限界を策定する試み

- ヒル安定性 (Golubev 1968, Marchal & Saari 1975; Marchal & Bozis 1982; …): m_0,m_1の運動可能領域とm_3の運動可能領域とが分離されている。制限三体問題(m_3 = 0)の同様の概念の拡張。
- 数値計算 (Harrington 1977, Pilat-Lohinger & Dvorak 2003, Holman & Wiegert 1999): ヒル安定限界はあまり実用的でない。ヒル安定かつ脱出可能な領域は小さくない。ある決まった時間積分し、その間に脱出などの軌道不安定が発生するかどうか観察する。
- ランダムウォーク近似 (Orlov et al.,2008):
- 共鳴重合 (Chirikov 1979, Wisdom 1980, Mydryk & Wu 2006)
- 赤字は制限三体問題。一般三体で三次元の計算はすくない (ex. Georgakarakos 2012, e_1 = e_2 = 0だが多数の質量比)

ランダムウォーク近似 (Orlov et al. 2008)

- 1周ごとの軌道要素の変化は、近点通過時の離角$\Delta\lambda$に依存し、についての平均は0である (摂動論)。
- しかし、毎周の$\Delta\lambda$の実現はランダムと思ってよい(物理的直観)
  - 軌道要素は、ランダムウォークに従うと仮定することになる。



- 10000周の間の軌道要素の変化が0.1%以下ならば階層安定と見なす

$$\left(\frac{q_2}{a_1}\right)_{\rm st} = 3\left(1+\frac{m_2}{m_0+m_1}\right)^{1/3}\left(\frac{7}{4}+\frac{1}{2}\cos I-\cos^2 I\right)^{1/3}(1-e_2)^{-1/6}$$

平均運動共鳴と共鳴重合

- 平均運動共鳴: 公転周期の比が整数になる(k_1, k_2を整数として、$k_1\dot{\lambda}_1 + k_2\dot{\lambda}_2 \approx 0$)場合。軌道長半径比上に離散的に出現する。

- 摂動ポテンシアルRの展開

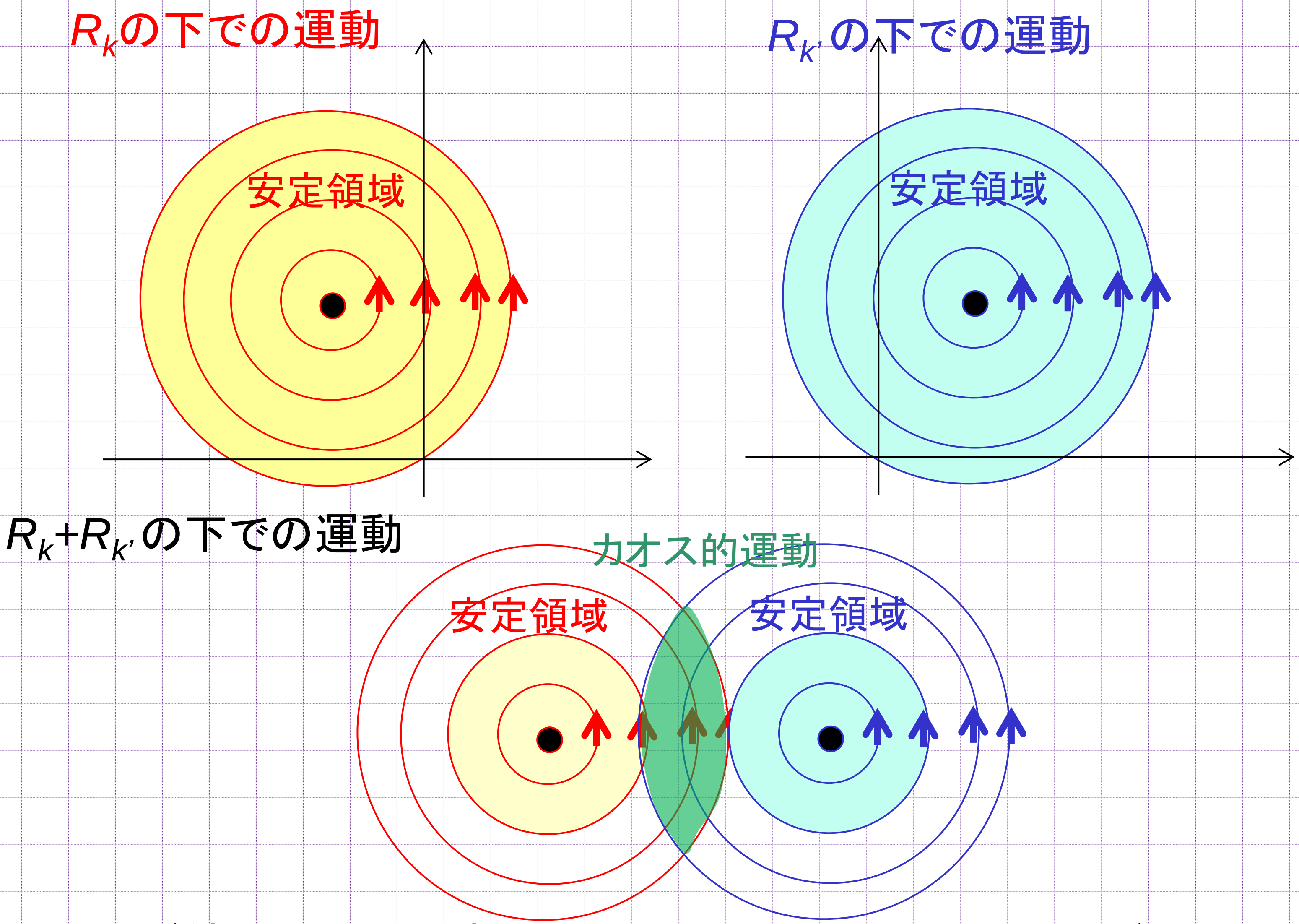
  $R = \sum_{\boldsymbol{k}} A_{\boldsymbol{k}}(a, e, I)\cos\psi_{\boldsymbol{k}}$, 臨界引数 $\psi_{\boldsymbol{k}} = k_1\lambda_1 + k_2\lambda + k_3\varpi_1 + k_4\varpi_2$

  (ただし、$k_1 + k_2 + k_3 + k_4 = 0$)

- 共鳴の近傍で、このRの下での解を摂動展開のかたちで求めることはできないが、Rの中から永年項(すべての$k_1 = k_2 = 0$の項)とひとつの$k_1, k_2 \neq 0$である(k_1, k_2, k_3, k_4)を抽出したR_kの下では、系は可積分となり、$\psi_k = \text{const.}$になる解 (周期軌道) が存在し、その解が線形安定である場合には、近傍に ψ_kが秤動する領域が広がる。

平均運動共鳴と共鳴重合

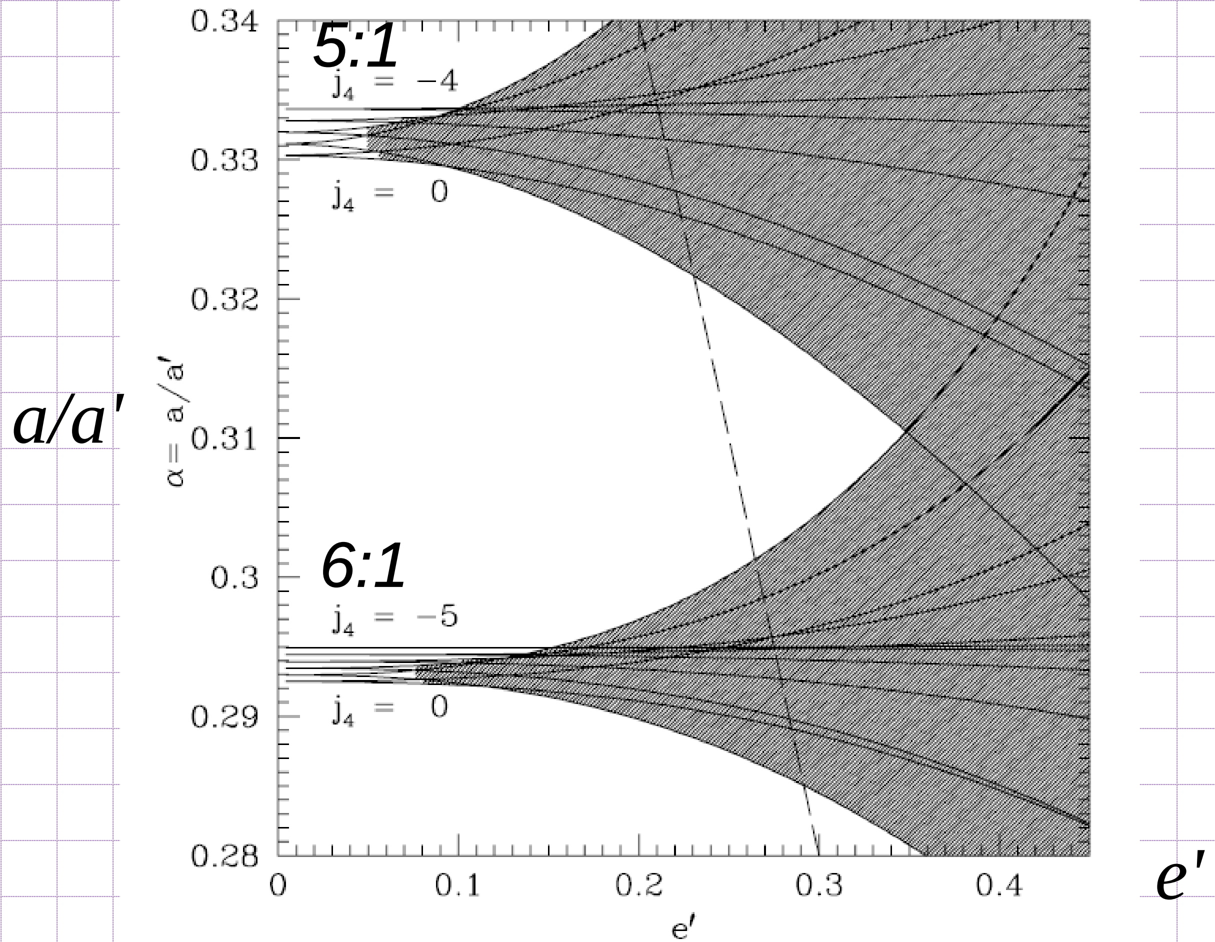
共鳴重合: カオスの発生モデル



安定領域が縮小し、もとの安定領域の重なりの部分では運動がカオス的になる

平均運動共鳴と共鳴重合

- m_0とm_1がcomparableなときは、sub-resonances (k_1,k_2を共通にする、異なるk_3,k_4に対応する共鳴の集合)の重なりが階層安定限界をきめる (Mydryk & Wu, 2006)。



吉田(1975)の脱出条件

Outer binaryの軌道半径が単調増加するための十分条件

$$\frac{p_2}{\mu_2^*} > \sqrt{2G\mu_2\left(\frac{\nu'}{r_2+\nu d}+\frac{\nu}{r_2-\nu' d}\right)} \implies \forall t.\left(\frac{dr_2}{dt}>0\right)$$

ただし、 $d = \dfrac{\mu_1\mu_1^*}{|H(0)|}, \quad \nu = \nu_2 = \dfrac{m_1}{m_0+m_1}, \quad \nu' = \dfrac{m_0}{m_0+m_1}$

$$\left(cf.\text{第 2 宇宙速度} \quad v = \sqrt{\frac{2GM_\oplus}{R_\oplus}}\right)$$

この条件を初めて満たす時刻t_{esc}を「脱出時間」と呼ぶ。

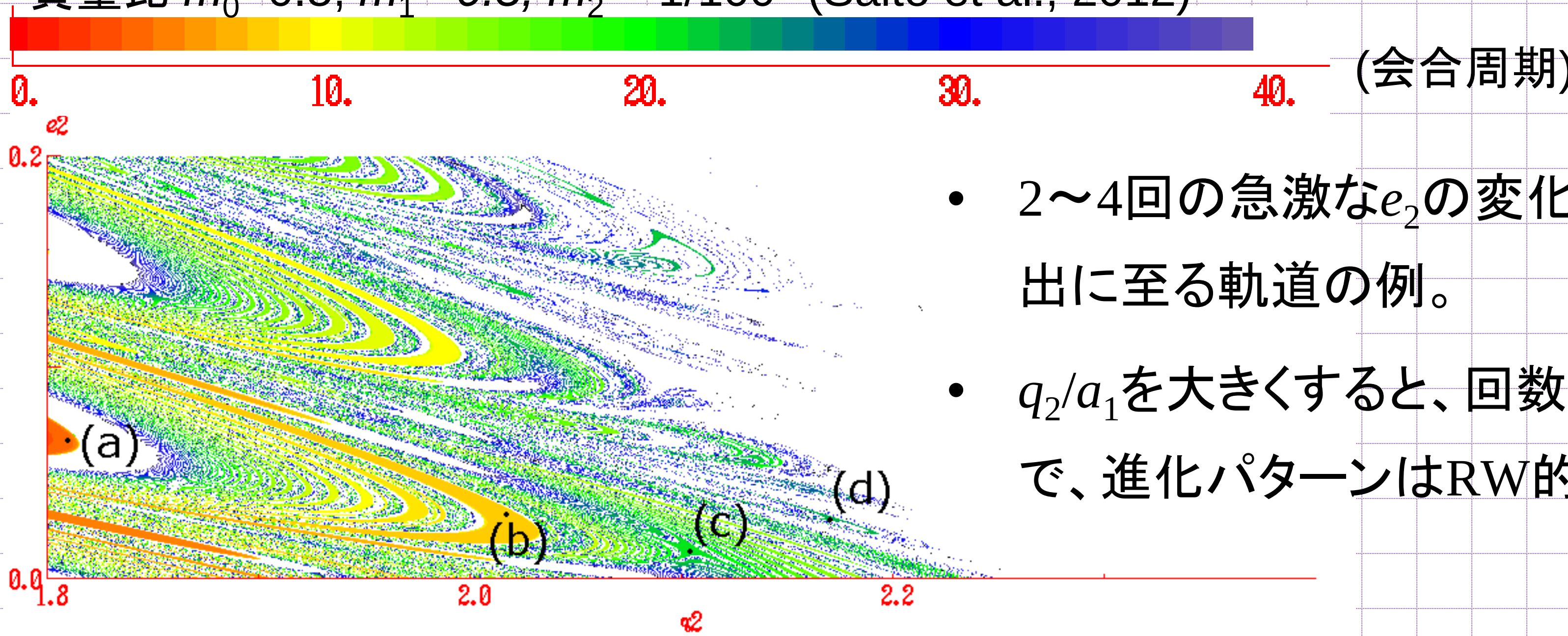
研究に利用するツール

- 数値積分　(多項式による補外法)
- 脱出 (楕円軌道+双曲軌道)の十分条件
- 脱出時間を初期値平面 (e_2, q_2) 上の分布を観察する
  - スパコンを利用した広範な初期条件の長期間の積分

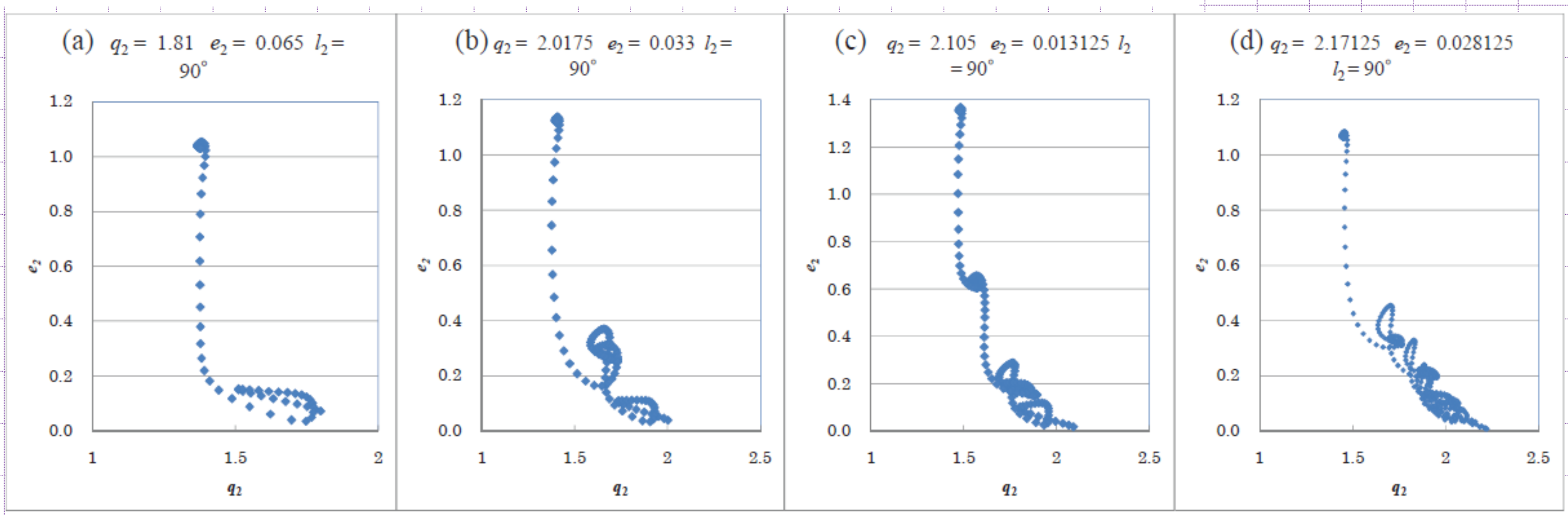
平面($I = 0$)の場合

脱出軌道の特徴 (q_2/a_1が小さい場合)

質量比 m_0=0.5, m_1= 0.5, m_2 = 1/100 (Saito et al., 2012)



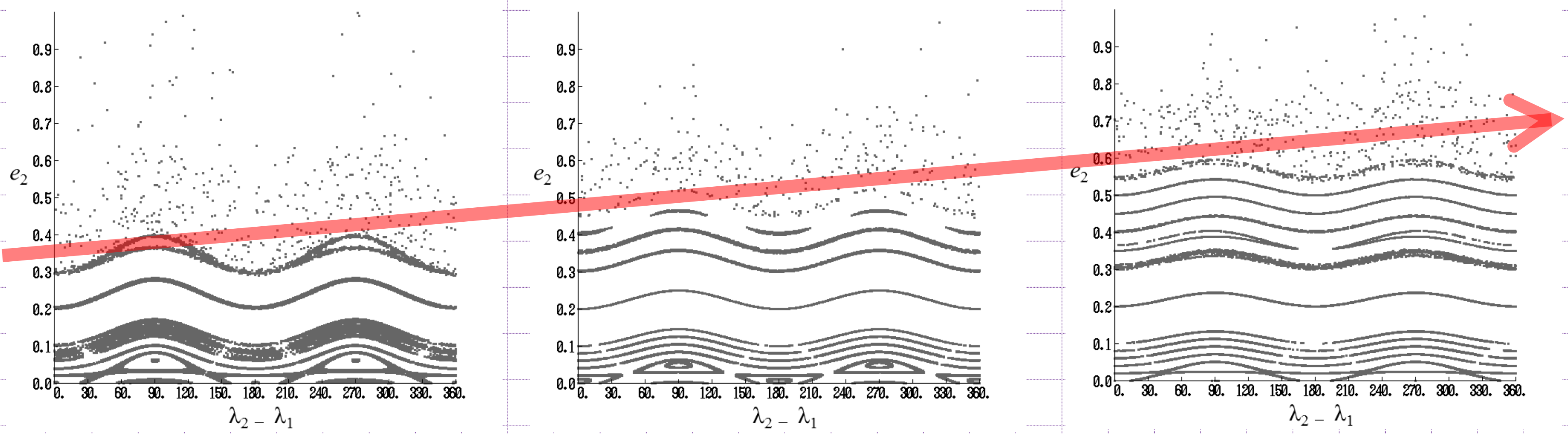
- 2〜4回の急激なe_2の変化を経て、脱出に至る軌道の例。
- q_2/a_1を大きくすると、回数が増えるので、進化パターンはRW的になる。



安定軌道の特徴 (q_2/a_1が大きい場合)

質量比 m_0=0.5, m_1= 0.5, m_2 = 1/100

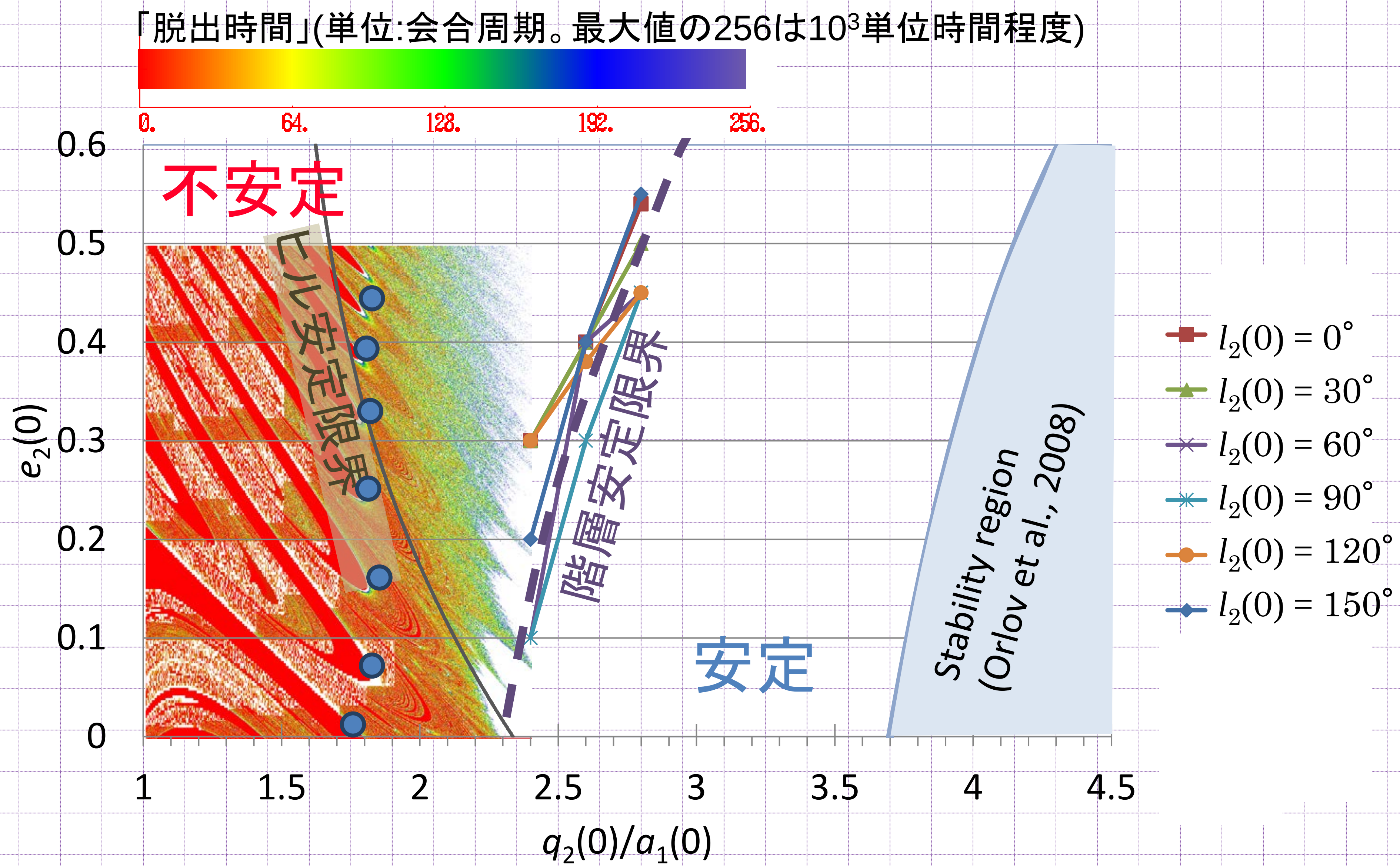
q_2 = 2.4　　　　q_2 = 2.6　　　　q_2 = 2.8



- Outer binaryが近点(f_2=0)にいるときの軌跡
- q_2について単調増加な臨界値 $e_{2,\mathrm{crit}}(q_2)$が存在する
  - $e_2 < e_{2,\mathrm{crit}}(q_2)$ ならば、軌道は準周期的
  - $e_2 > e_{2,\mathrm{crit}}(q_2)$ ならば、酔歩的な変動を経て$e_2 > 1$(脱出)に至る。
- この境界を数値的な安定限界と考える。

初期値面上の構造のまとめ

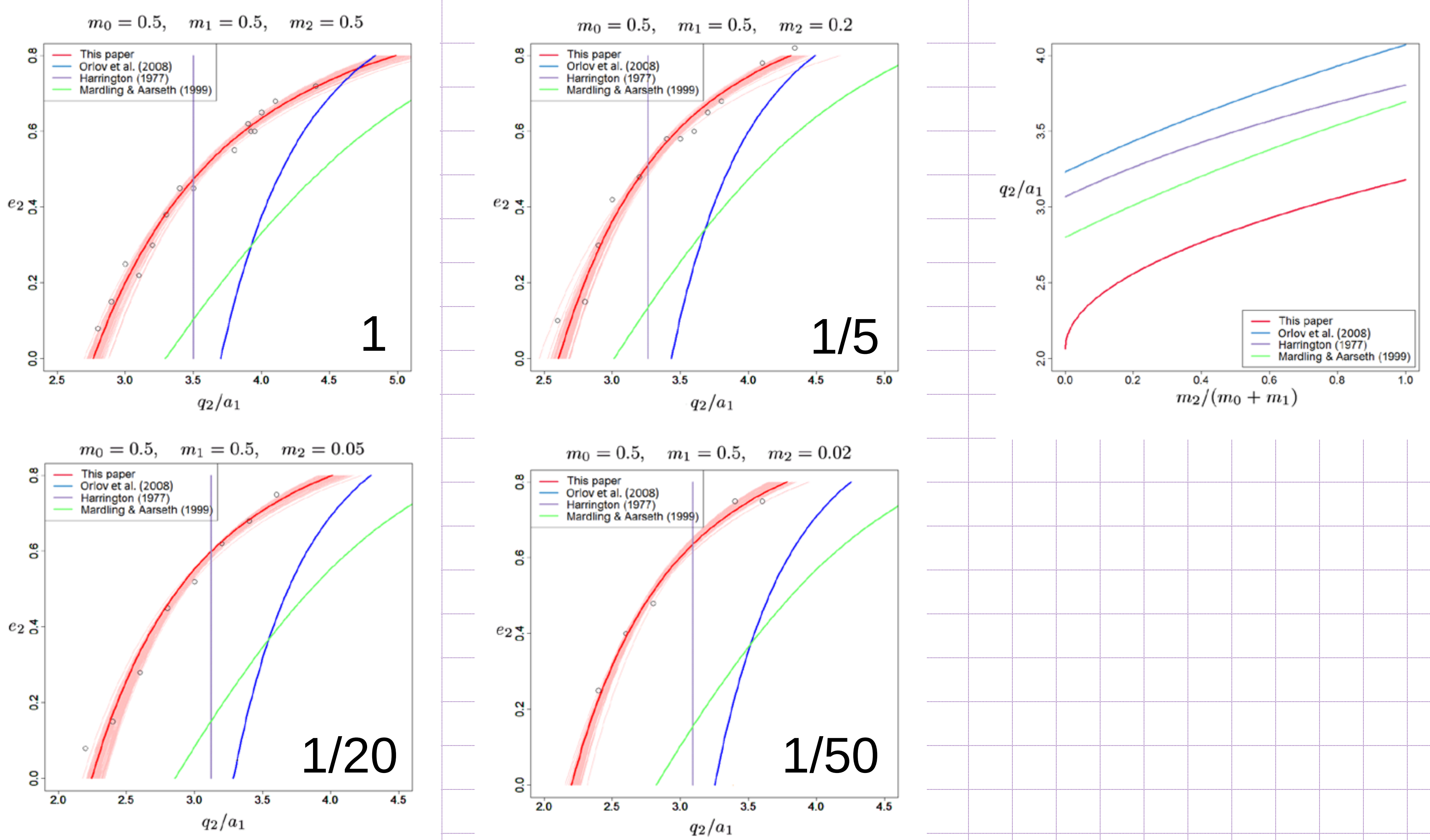
質量比 m_0=0.5, m_1= 0.5, m_2 = 1/100



他の質量比への適用

$m_2/(m_0+m_1)$ = 1/5000, 1/50, 1/20, 1/10, 1/5, 1/2, 1 (Saito et al., 2013)

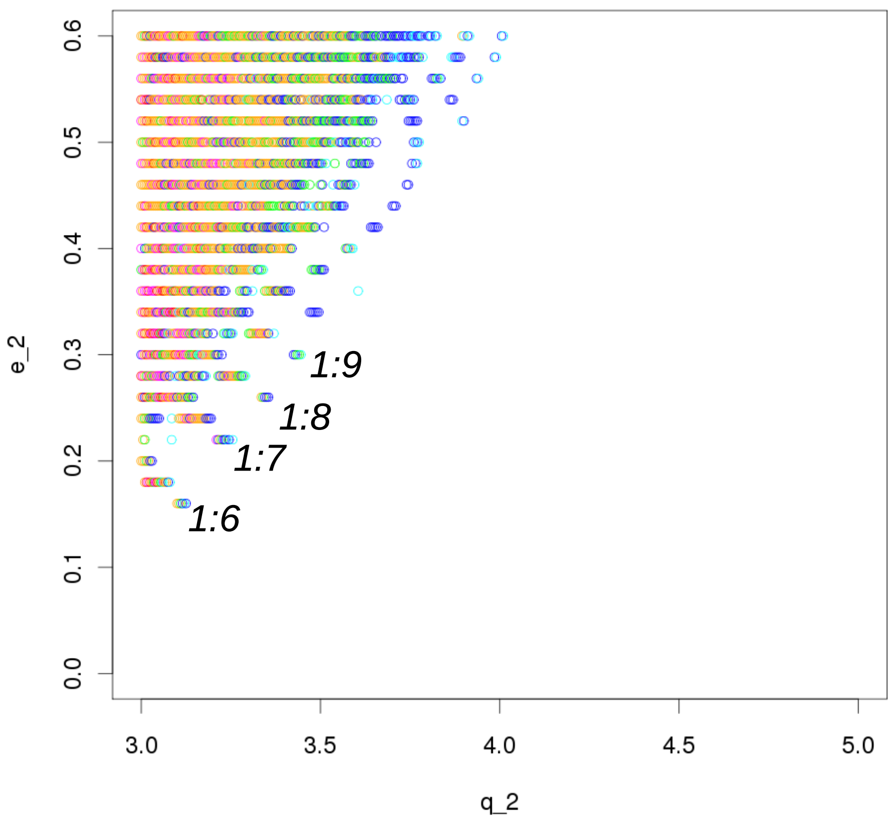
$$\left(\frac{q_2}{a_1}\right)_{\rm crit} = \left[1.11\left(\frac{m_2}{m_0+m_1}\right)^{0.51} + 2.07\right](1-e_2)^{-1/3}$$



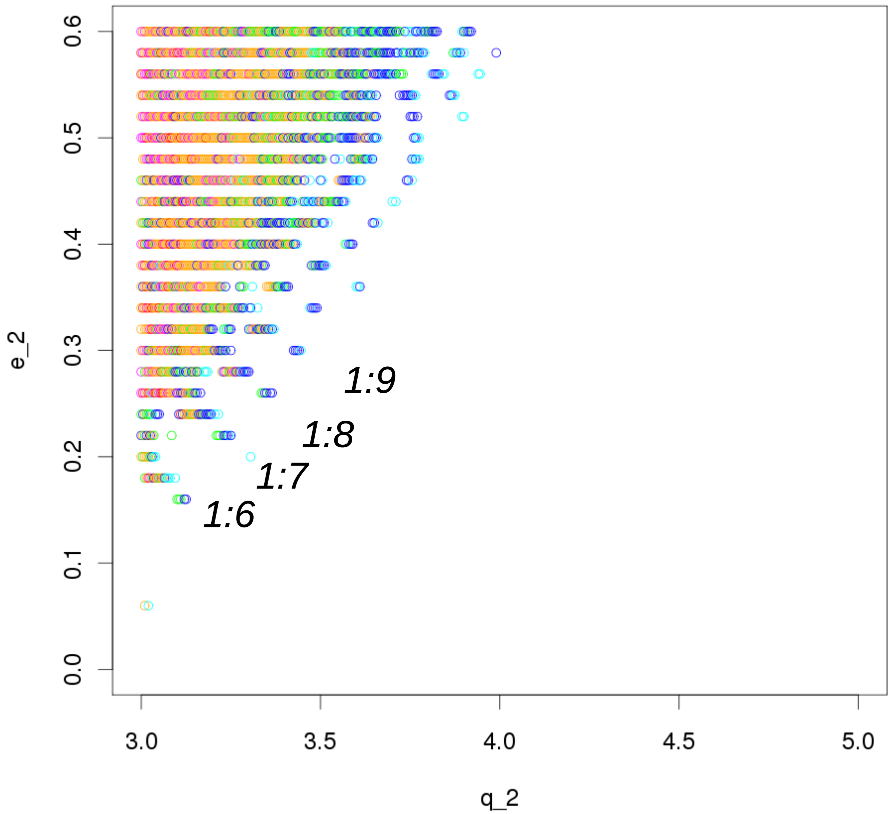
3次元($I > 0$)の場合

$I=0,\ t_{esc} < 10^6$

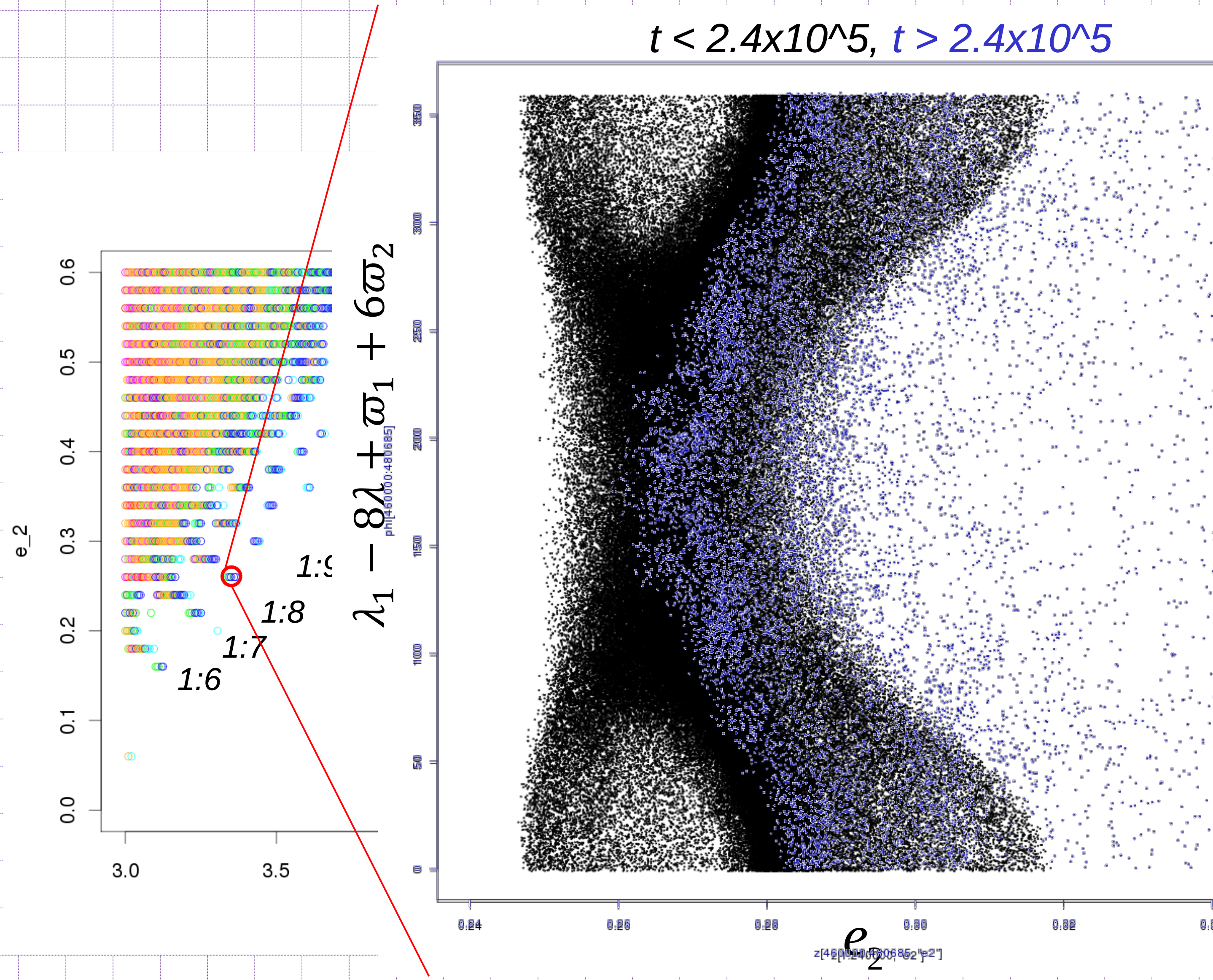
質量比 $m_0 = m_1 = m_2 = 1$



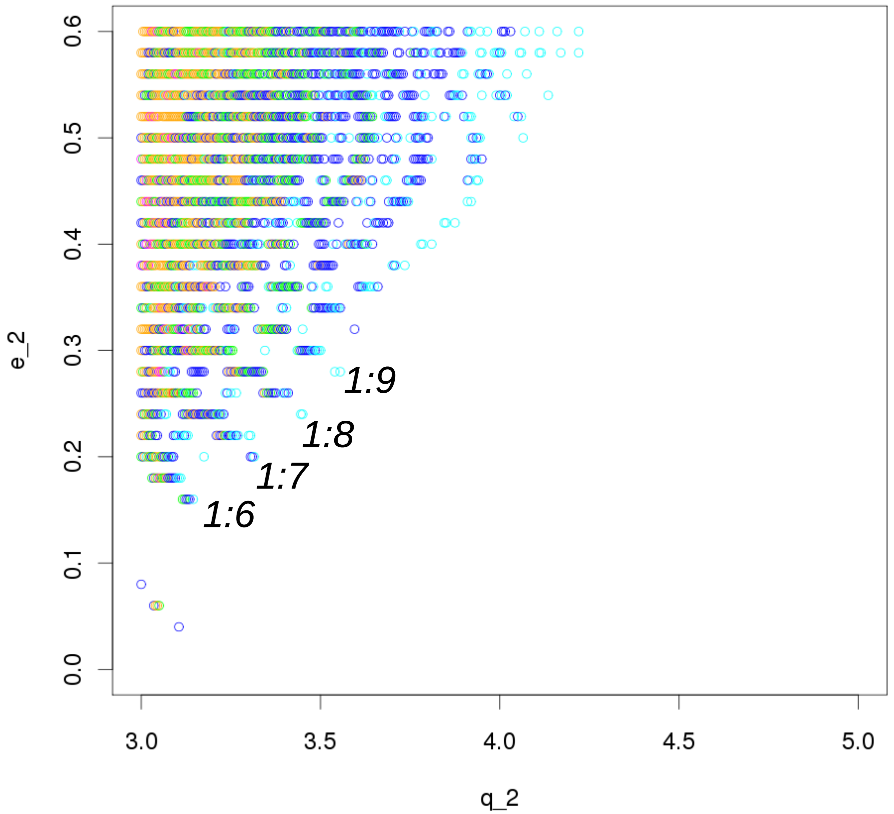
$I = 10, t_{esc} < 10^6$



I=10, $t_{esc} < 10^6$

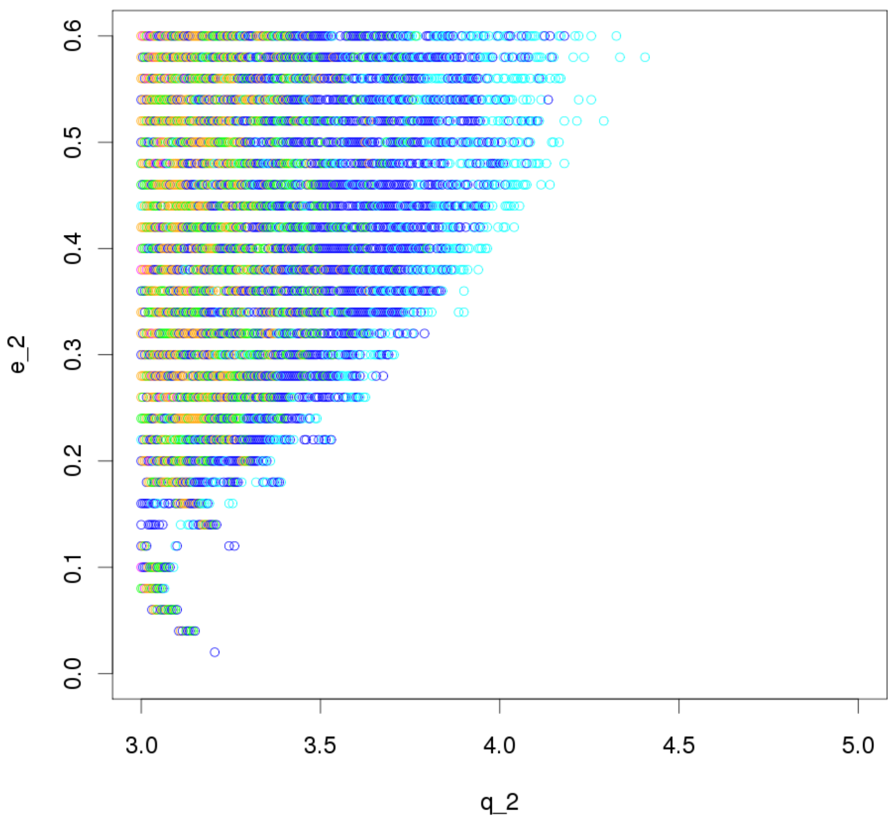


I=45, $t_{esc} < 10^6$



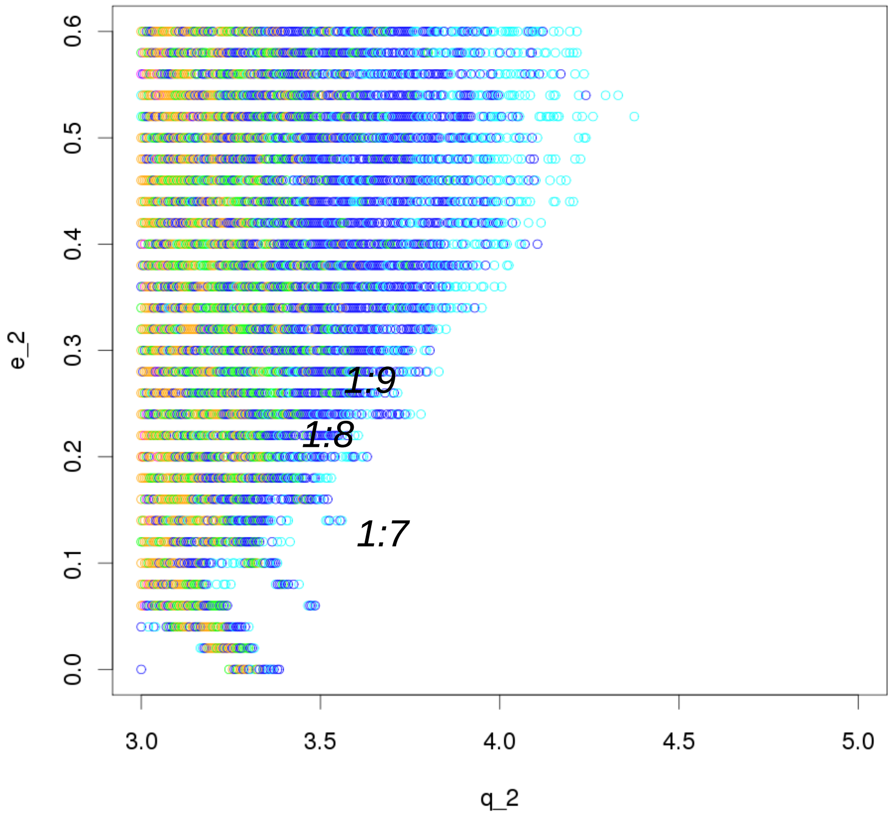
Iの増加にともない、平均運動共鳴に対応する棒状の不安定領域が拡大する

I=50, $t_{esc} < 10^6$



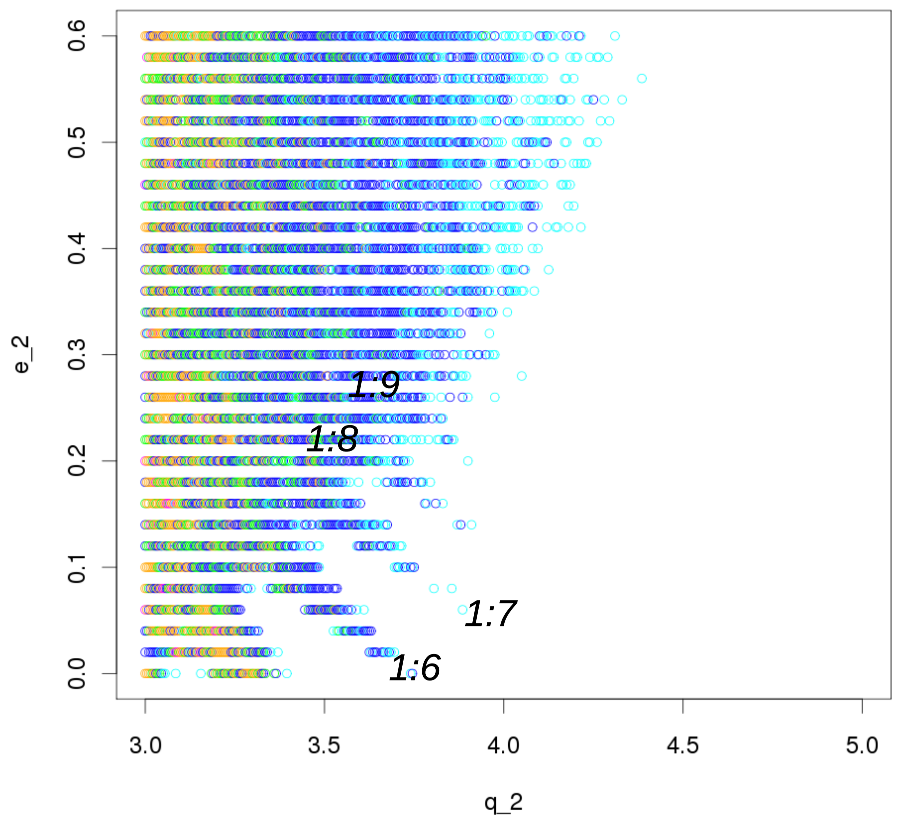
Iの増加にともない、平均運動共鳴に対応する棒状の不安定領域が拡大する

I=55, t_{esc} < 10^6



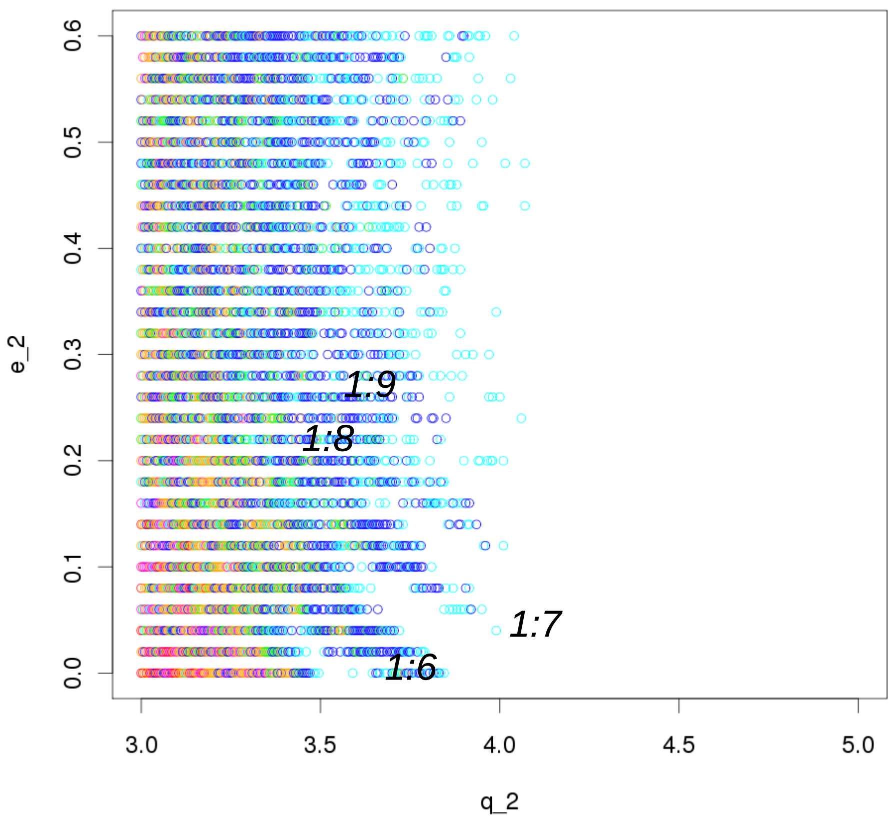
Iの増加にともない、平均運動共鳴に対応する棒状の不安定領域が拡大する

I=60, $t_{esc} < 10^6$



Iの増加にともない、平均運動共鳴に対応する棒状の不安定領域が拡大する

I=90, $t_{esc} < 10^6$



Iの増加にともない、平均運動共鳴に対応する棒状の不安定領域が拡大する

考察

- Iを大きくすると、この領域は太くなる。一般にe,Iが大きくなるとMMRの(aの幅で測って)stability regionが大きくなる。その結果、resonance overlapが起こる領域が拡大し、不安定領域が拡大すると解釈できる。
- Mydruk & Wu(2006)を踏まえると、ひとつひとつの「棒」はひとつの周期比に対応するMMRのsubresonances同士の重なりであろう。$m_0 \approx m_1$の制限三体問題よりさらに相互作用が強いので、共鳴重合はより強化されるはずである。
- Iをさらに大きくすると(I > 45)、異なる周期比のMMR同士でresonance overlapが起こり、不安定領域の本体と融合していくと解釈できる。
- 脱出に至るまでの時間の増大。数値計算の限界。

計算量

ひとつのI値に対する計算

$N(q\_2) = (5.0 – 3.0) / 0.005 = 400$, $N(e\_2) = (1.0 – 0.0)/ 0.02 = 50$

$N\_orbit = 400x50 = 20{,}000$

$t\_orbit = 10min$ ($t_esc < 10^6$の場合)

$N\_proc = 512$

$t\_run = t\_orbit \times N\_orbit / N\_proc = 390.625min = 6.5h$

(cf. $t\_run1 = t\_orbit \times N\_orbit = 140$ days)