

最小二乗SPH法を用いた 陽解法マントル対流計算フレームワークの開発

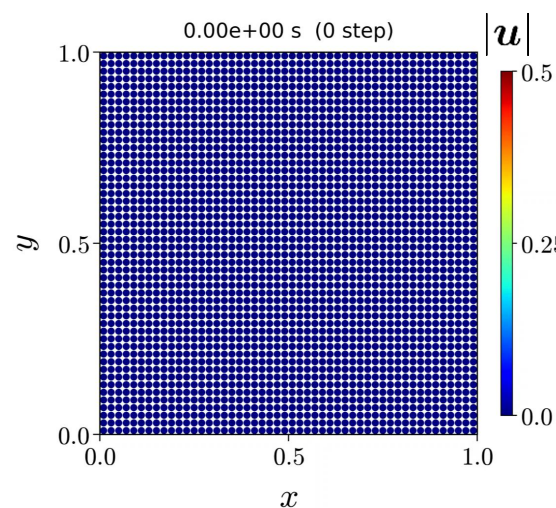
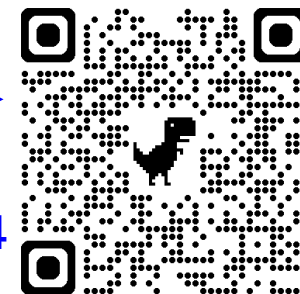
菖蒲迫 健介

九州大学 大学院理学府 地球惑星科学専攻 博士後期課程3年

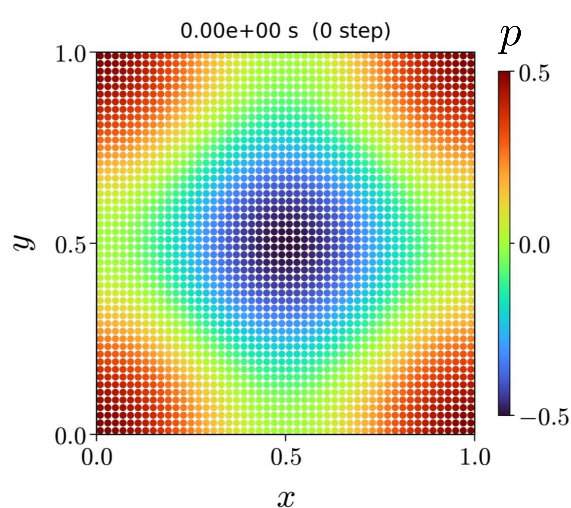
6月に論文が出版されました→

Shobuzako et al. (2025)

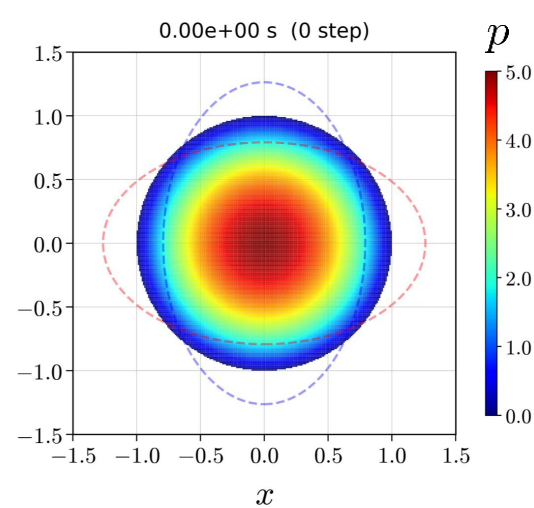
Results Appl. Math., 26, 100594



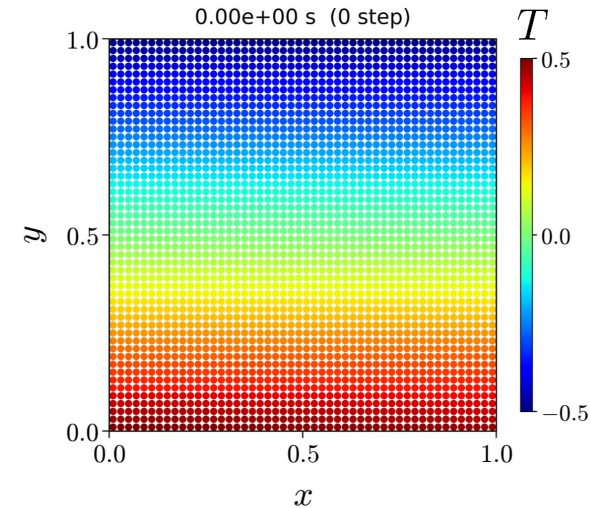
Lid-driven cavity flow



Taylor-Green vortex



Oscillating drop



Rayleigh-Benard convection



菖蒲迫と吉田先生(2023年)

菖蒲迫 健介 (Shobuzako Kensuke)

九州大学 理学府 地球惑星科学専攻 地球内部ダイナミクス研究室 D3

【研究】地球コア形成/数値流体計算 (**粒子法**)

【研究活動でお世話になっている方々】

吉田茂生 准教授 (九大・指導教員) / 川田佳史さん (東大) /
中島涼輔 特任助教 (神戸大) / 浅井光輝 教授 (九大・工学) などなど
本セミナーでは 大淵済 教授 (神戸大) にお世話になりました

これまでの研究

1

陰解法は大変

2

計算精度が悪い

[論文] SPH法の精度向上



背景 > 精度向上 > 検証①②③ > 高速化 > 線形解析 > 検証 > まとめと今後

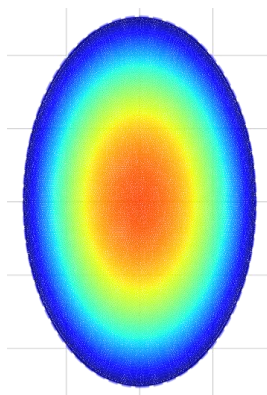
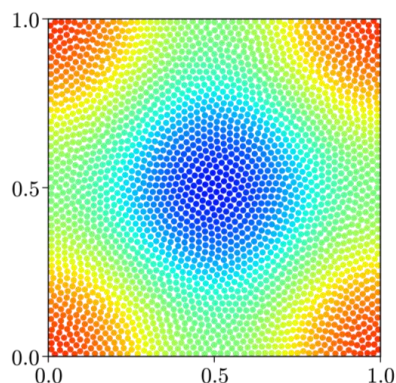
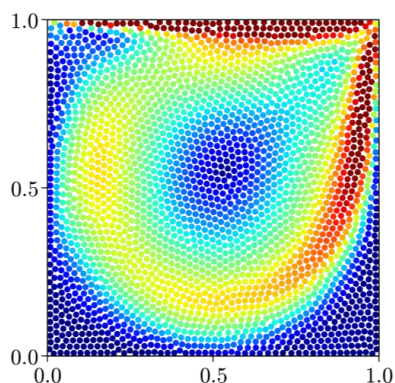
本発表の要旨

ブシネスク対流を**高精度**かつ**高速**に扱える粒子法を構築した

JpGU 2025

① 高精度SPH法の開発と検証

② 陽解法の時間刻み幅を増大



3つのベンチマークテストを実施

音速低減法 + 慣性変化法
Hotta et al. (2012) Takeyama et al. (2017)

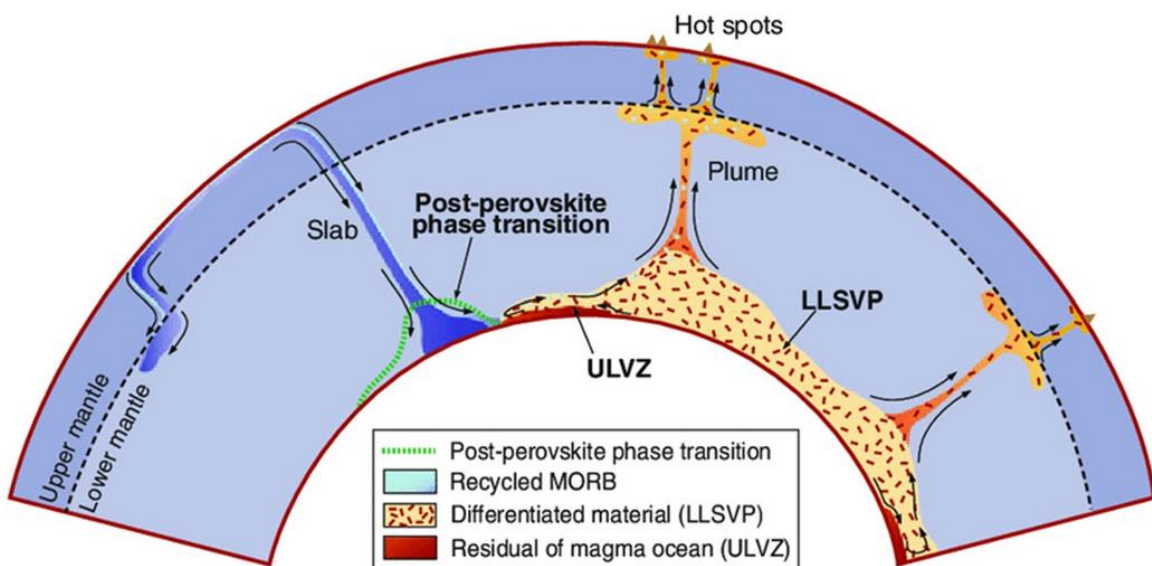
$$\zeta^2 \frac{d\rho}{dt} = -\rho_0 \nabla \cdot \mathbf{u} \quad \xi^2 \frac{d\mathbf{u}}{dt} = -\frac{1}{\rho_0} p' + \nu \nabla^2 \mathbf{u} + \alpha T' \mathbf{g}$$

$$\Delta t_{\text{CFL}} < \zeta \xi \frac{\Delta x}{c_0}$$

$$\Delta t_{\text{vis}} < \xi^2 \frac{(\Delta x)^2}{\nu}$$

背景 > 精度向上 > 検証①②③ > 高速化 > 線形解析 > 検証 > まとめと今後

地球内部には物質異常が点在
BMO? / 巨大衝突? / 海洋地殻?

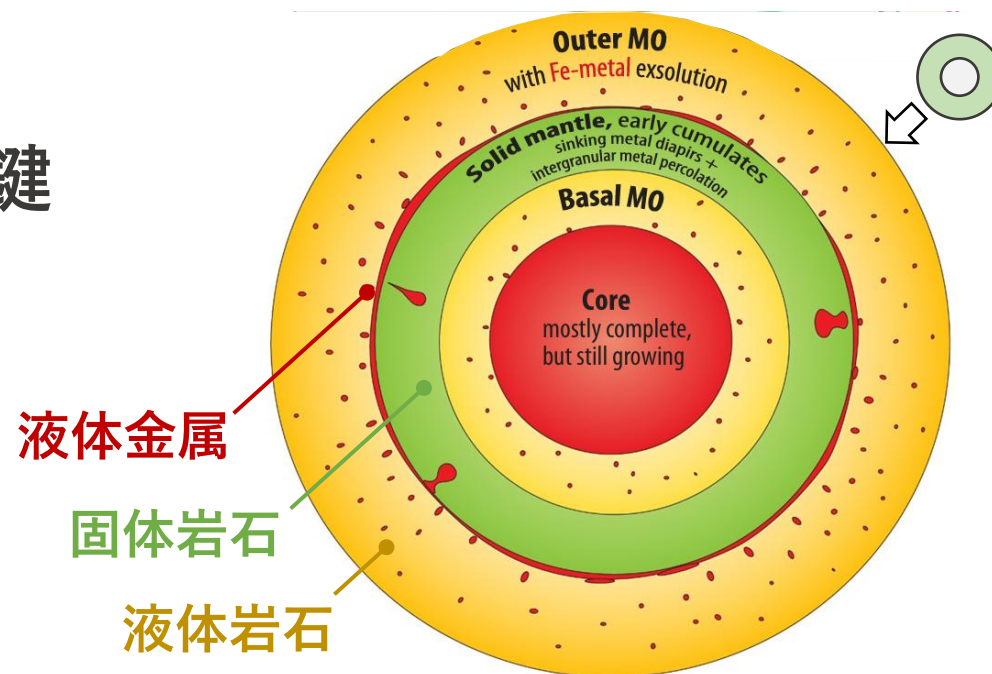


Dehant et al. (2022)

解明の鍵



地球内部の物質進化過程
地球初期からの連続的な理解

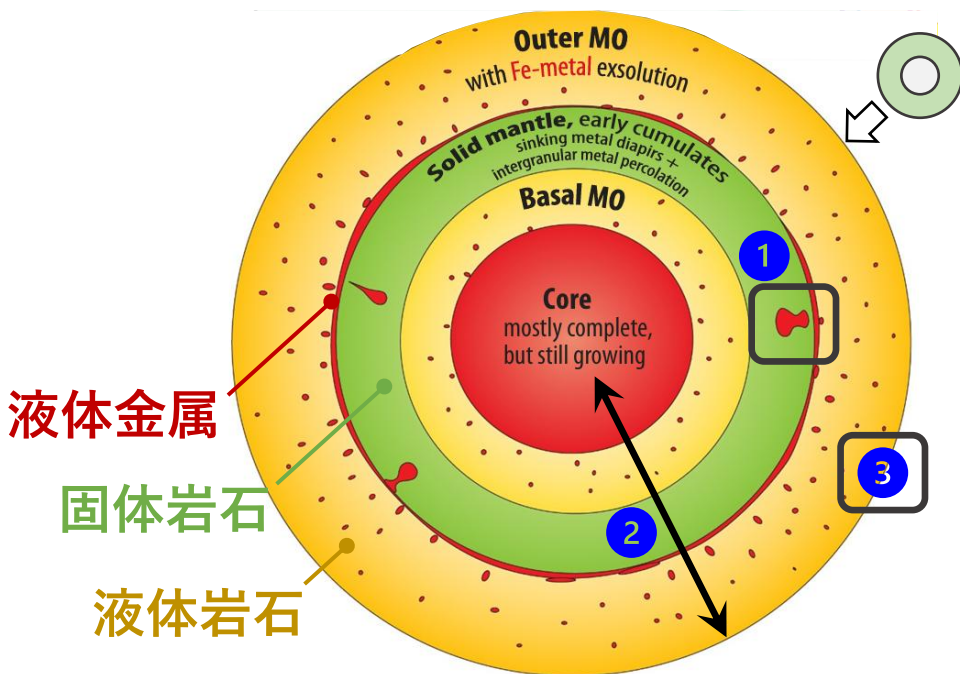


Tronnes et al. (2019)

【研究の大目標】 46億年に及ぶ地球内部ダイナミクス過程を再現する

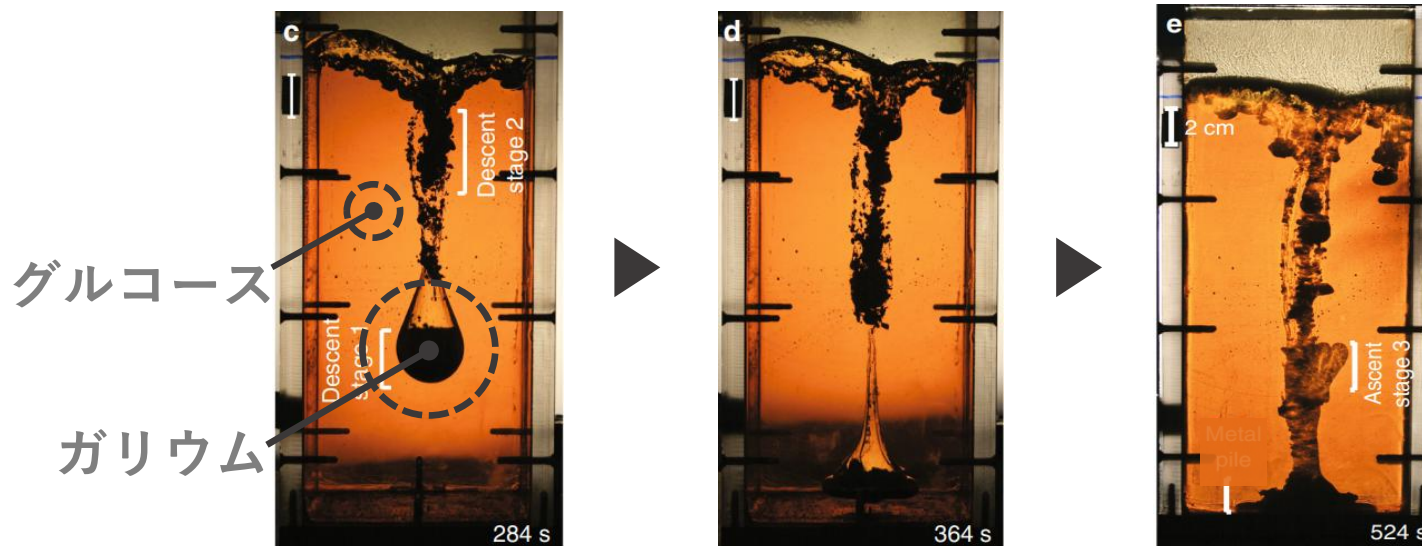
背景 > 精度向上 > 検証①②③ > 高速化 > 線形解析 > 検証 > まとめと今後

地球初期の現象は多様



Tronnes et al. (2019)

① 金属と岩石に関する複雑な混相流



Fleck et al. (2018)

② 温度圧力変化による相変化 (物性変化)

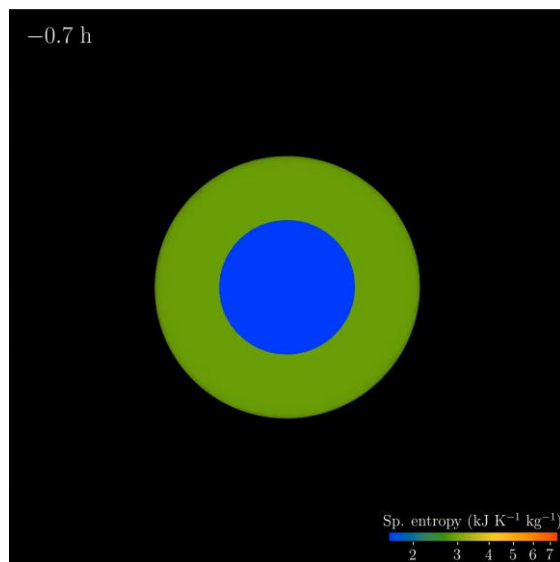
③ 自由表面を含む境界の大変形

【数値流体計算上の課題】 「混相流 + 相変化 + 大変形」 を正しく扱う

背景 > 精度向上 > 検証①②③ > 高速化 > 線形解析 > 検証 > まとめと今後

メッシュフリーな粒子法は ① 混相流 ② 相変化 ③ 大変形 に有効

SPH法による巨大衝突計算

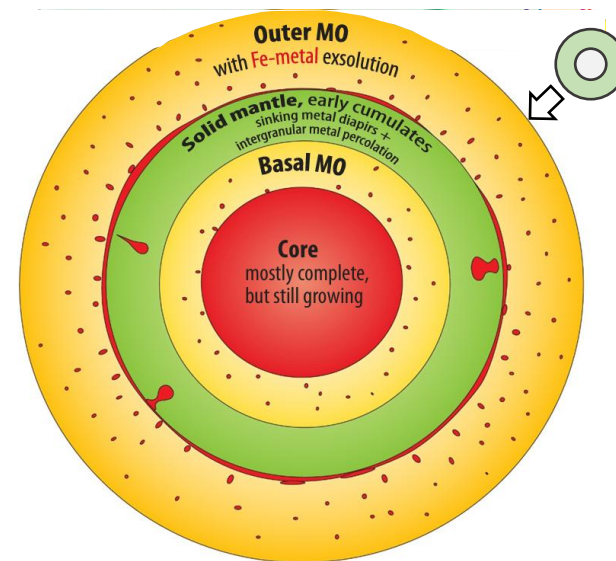


Yuan et al. (2023)

応用



惑星内部の進化計算



Tronnes et al. (2019)

【研究動機】 SPH法を惑星内部のダイナミクス現象に応用したい

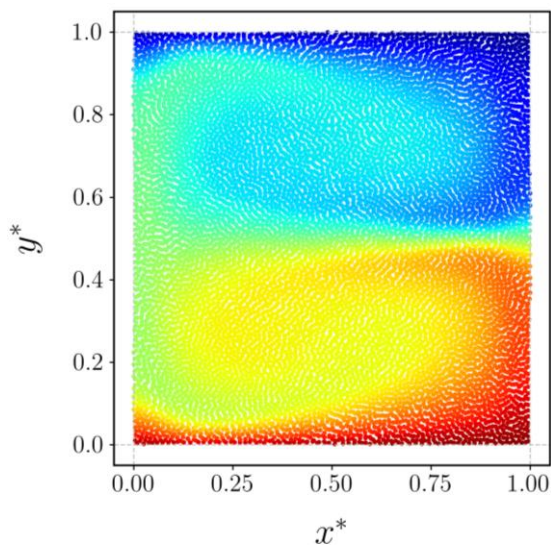
背景 > 精度向上 > 検証①②③ > 高速化 > 線形解析 > 検証 > まとめと今後

マントル対流の最も簡単な近似

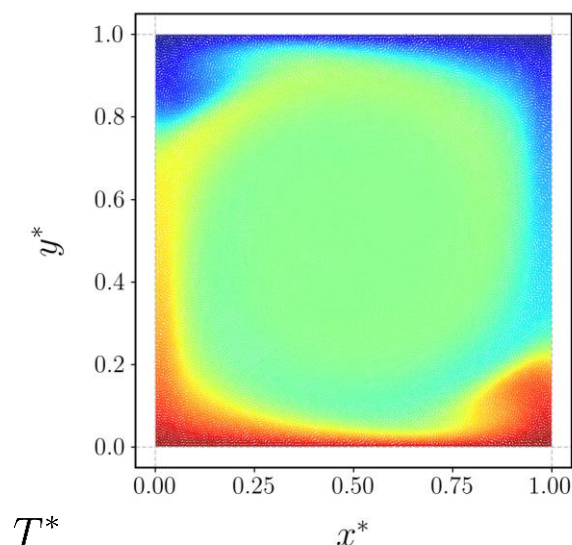
【はじめの第一歩】 1相のブシネスク対流をSPH法(粒子法)で実装する

$Ra = 10^6$, $Pr = 0.71$ (乾燥空気)

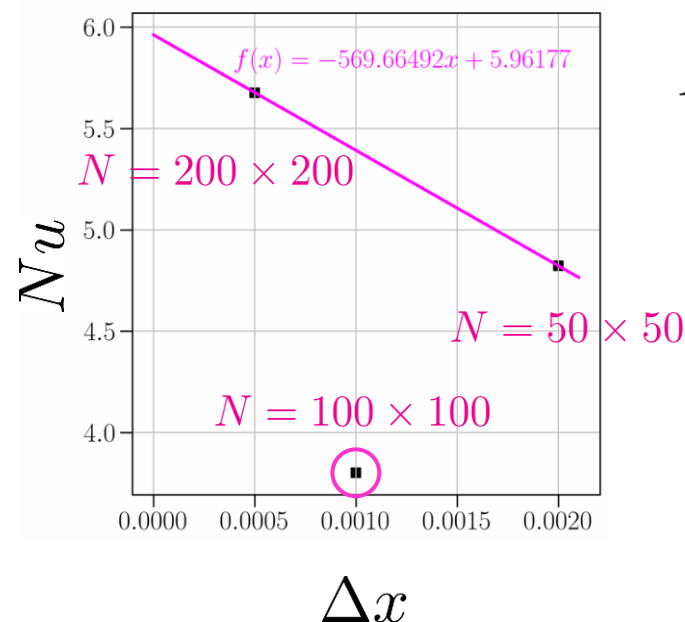
$N = 100 \times 100$



$N = 200 \times 200$



$Nu = 5.9617$



$$Nu = - \frac{\int_0^L \frac{\partial T}{\partial y} \Big|_{y=0,L} dx}{\Delta T / L}$$

Ouertatani et al. (2008)

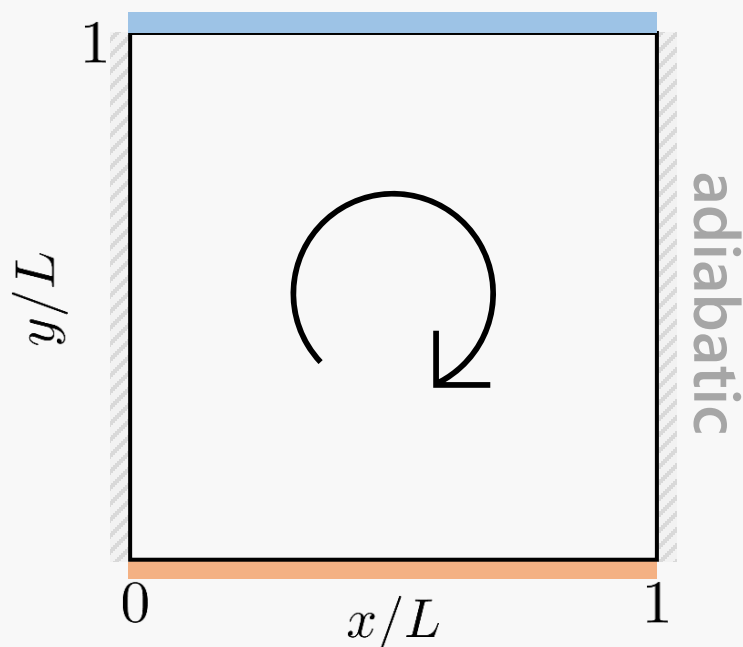
$Nu = 6.3092$
(有限体積法)

【修論で生じた疑問】 SPH法の空間離散化精度はどうなっている？

背景 > 精度向上 > 検証①②③ > 高速化 > 線形解析 > 検証 > まとめと今後

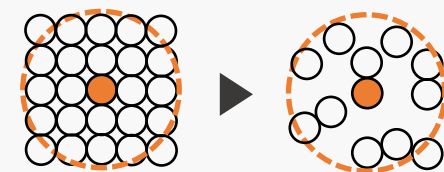
【はじめの第一歩】 1相のブシネスク対流をSPH法(粒子法)で実装する

ブシネスク系の
Rayleigh-Benard 対流
Blankenbach et al. (1989)



数値計算上の課題

- 1 従来のSPH法は精度が低い



【原因】 粒子配置の対称性などを仮定

【本研究】 高精度SPH法を開発・実装

- 2 粒子法は陰解法に不向き

位置情報 未知量
 $Ax = b$

【原因】 相互作用する相手が毎ステップ変化

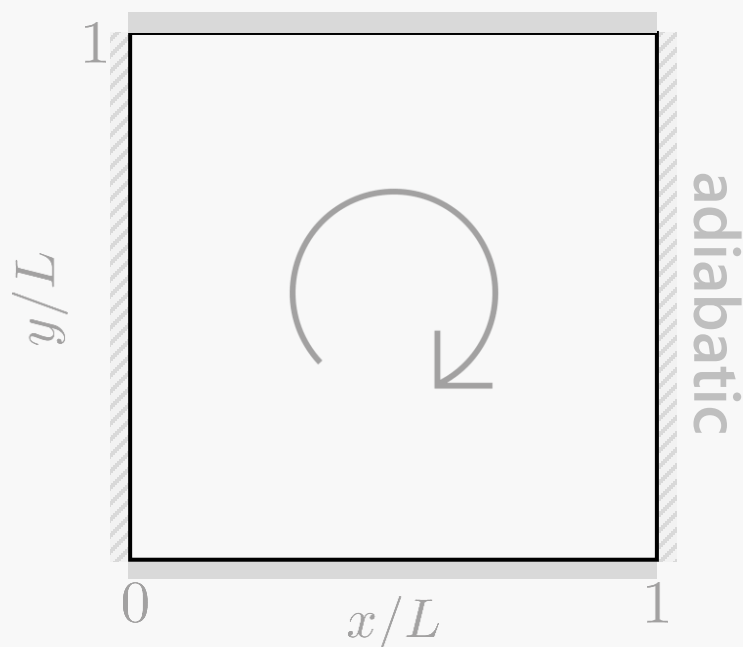
【本研究】 陽解法化 + 時間刻み制約を緩和

背景 > 精度向上 > 検証①②③ > 高速化 > 線形解析 > 検証 > まとめと今後

【はじめの第一歩】 1相のブシネスク対流をSPH法(粒子法)で実装する

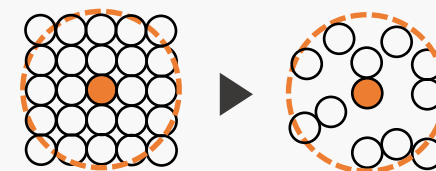
ブシネスク系を対象

Blankenbach et al. (1989)



数値計算上の課題

① 従来のSPH法は精度が低い



精度悪化

【原因】 粒子配置の対称性などを仮定

【本研究】 高精度SPH法を開発・実装

② 粒子法は陰解法に不向き

位置情報 未知量

$$Ax = b$$

【原因】 相互作用する相手が毎ステップ変化

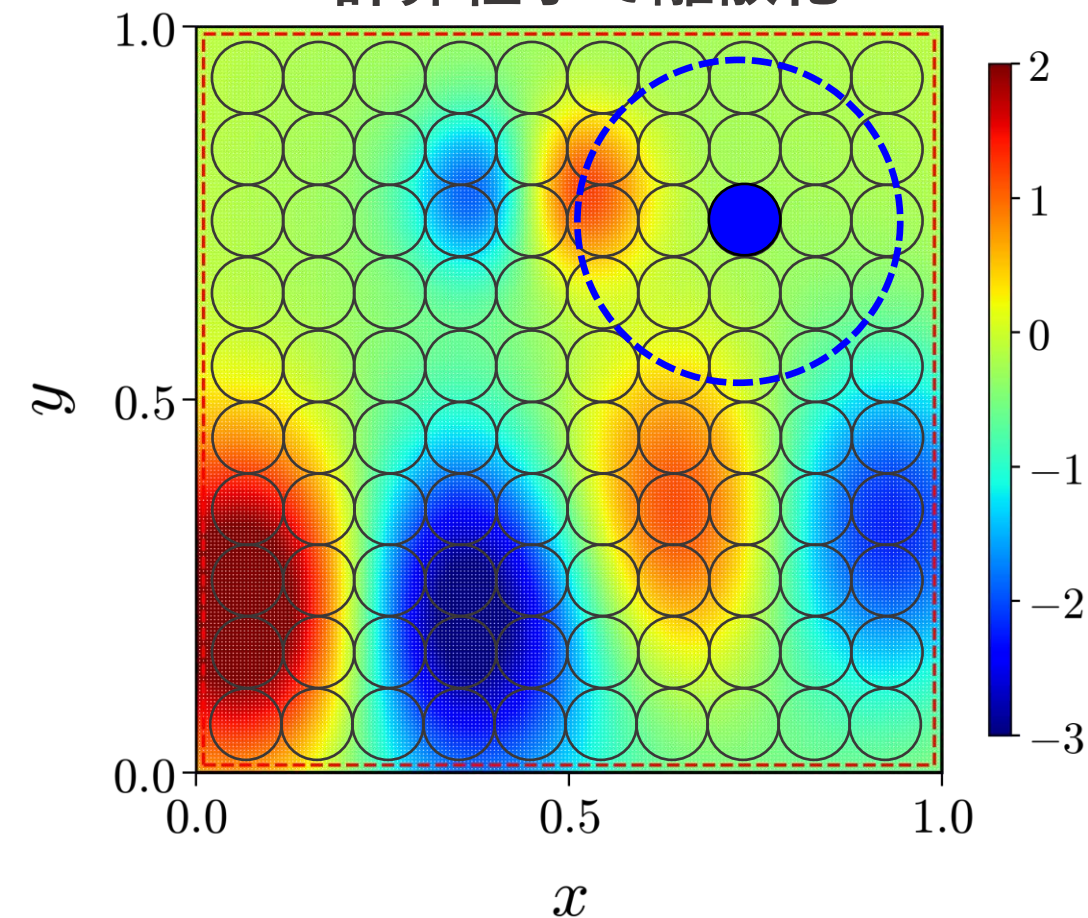
【本研究】 陽解法化 + 時間刻み制約を緩和

背景 > 精度向上 > 検証①②③ > 高速化 > 線形解析 > 検証 > まとめと今後

Smoothed Particle Hydrodynamics method

Gingold & Monaghan (1977); Lucy (1977)

計算粒子で離散化



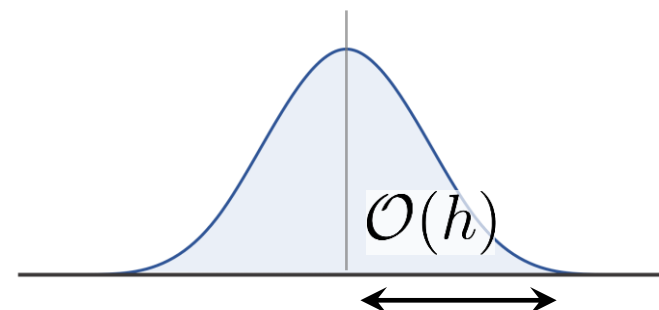
運動量保存の式

$$\rho \frac{du}{dt} = -\nabla p + \eta \nabla^2 u - \rho g$$

空間微分の離散化を
どのように扱うか？

Taylor 展開

$$f(\mathbf{x}_j) = f(\mathbf{x}_i) + \nabla f(\mathbf{x}_i) \cdot (\mathbf{x}_j - \mathbf{x}_i) + R_2$$



重み付き積分

$$\nabla f(\mathbf{x}_i) = \sum_j^N f(\mathbf{x}_j) \nabla W(|\mathbf{x}_i - \mathbf{x}_j|; h) V_j + \mathcal{O}(h^2)$$

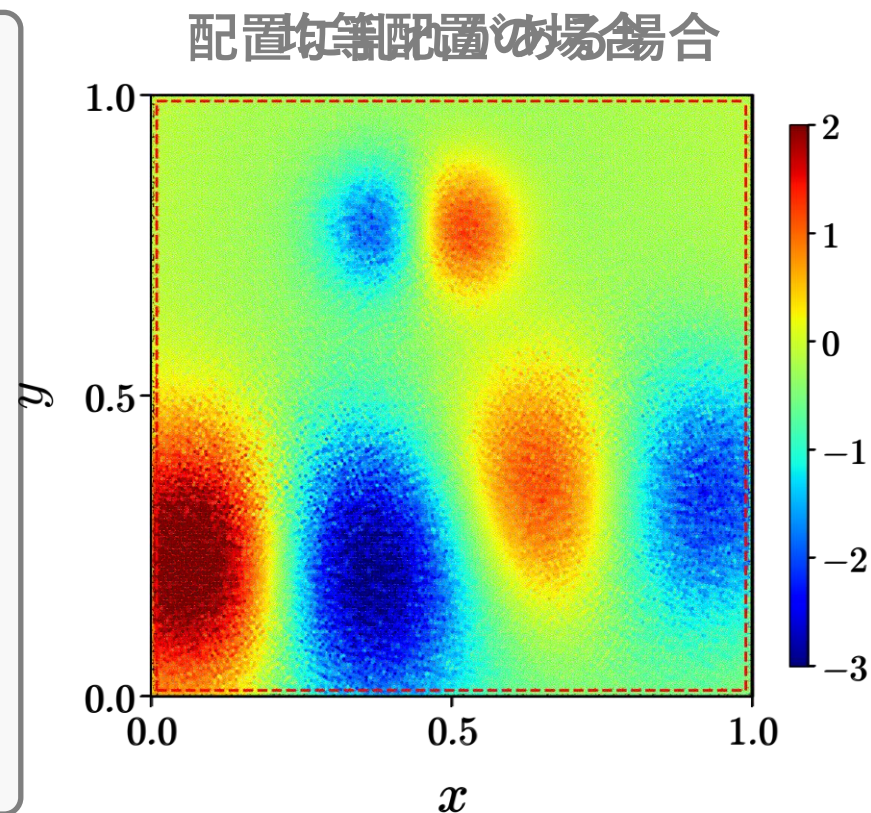
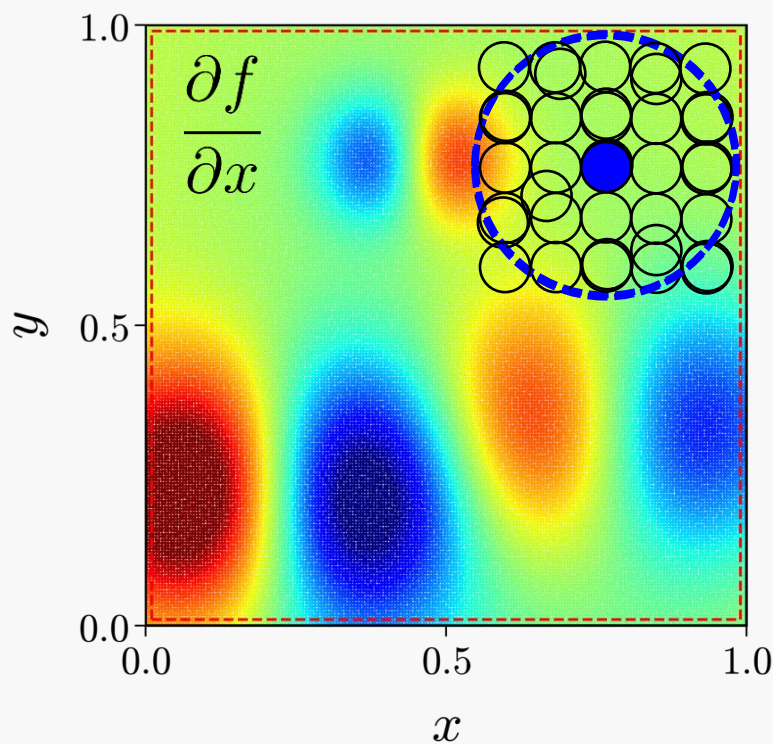
背景 > 精度向上 > 検証①②③ > 高速化 > 線形解析 > 検証 > まとめと今後

粒子配置に乱れが生じると空間離散精度が悪化する

e.g., Basic et al. (2017), Asai et al. (2023)

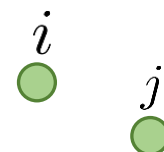
Franke's function [Franke, 1979]

$$f(x, y) = \frac{3}{4} \exp \left[-\frac{(9x-2)^2}{4} - \frac{(9y-2)^2}{4} \right] + \frac{3}{4} \exp \left[-\frac{(9x+1)^2}{49} - \frac{(9y+1)^2}{10} \right] + \frac{1}{2} \exp \left[-\frac{(9x-7)^2}{4} - \frac{(9y-3)^2}{4} \right] - \frac{1}{5} \exp \left[-(9x-4)^2 - (9y-7)^2 \right]$$

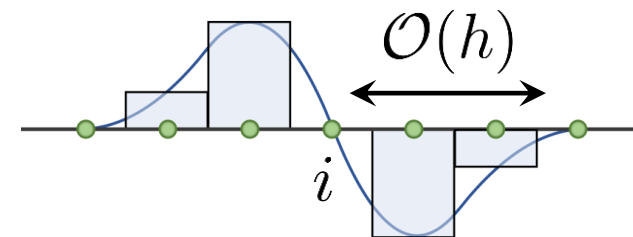


背景 > 精度向上 > 検証①②③ > 高速化 > 線形解析 > 検証 > まとめと今後

Taylor 展開 $f(\mathbf{x}_j) = f(\mathbf{x}_i) + \nabla f(\mathbf{x}_i) \cdot (\mathbf{x}_j - \mathbf{x}_i) + R_2$



$\nabla W(|\mathbf{x}_i - \mathbf{x}_j|; h) =: \nabla W_{ij}$ を掛けて空間積分
 V_j (粒子体積) を掛けて和を取る



$$\sum_j^N f(\mathbf{x}_j) \nabla W_{ij} V_j = f(\mathbf{x}_i) \sum_j^N \nabla W_{ij} V_j + \nabla f(\mathbf{x}_i) \cdot \left[\sum_j^N (\mathbf{x}_j - \mathbf{x}_i) \nabla W_{ij} V_j \right] + \left[\sum_j^N R_2 \nabla W_{ij} V_j \right]$$

$\sim \mathcal{O}(h^0)$ $\sim \mathcal{O}(h^1)$
 $= \text{単位行列}$ $= 0$

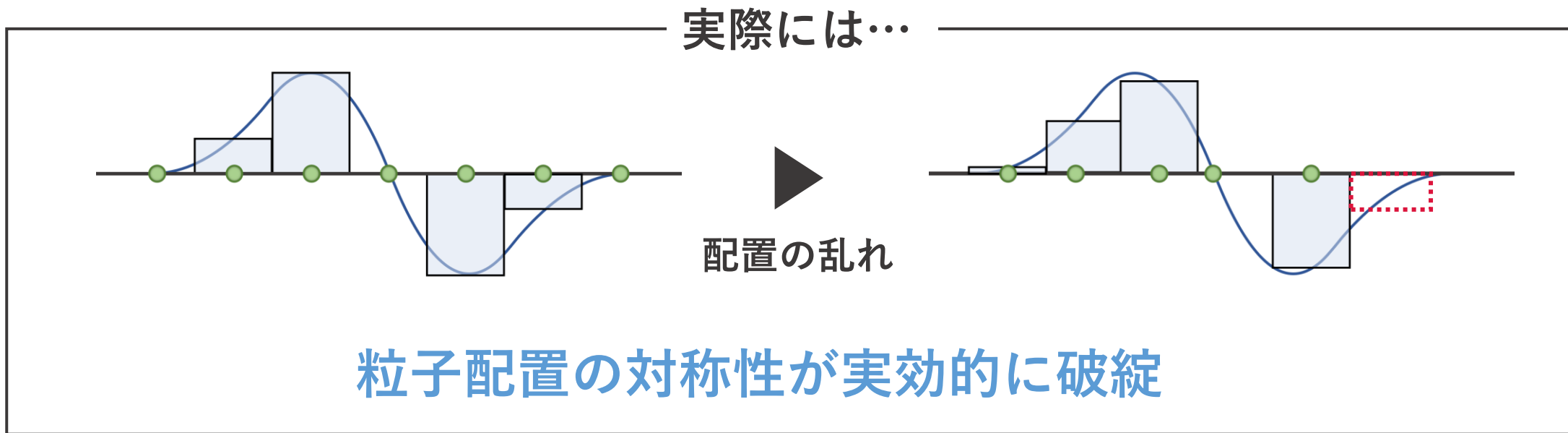
粒子配置の対称性 + 重み関数の規格化性

$$\nabla f(\mathbf{x}_i) = \sum_j^N \left(f(\mathbf{x}_j) - f(\mathbf{x}_i) \right) \nabla W_{ij} V_j + \mathcal{O}(h^2)$$

背景 > 精度向上 > 検証①②③ > 高速化 > 線形解析 > 検証 > まとめと今後

$$\sum_j^N f(\mathbf{x}_j) \nabla W_{ij} V_j = f(\mathbf{x}_i) \sum_j^N \nabla W_{ij} V_j + \nabla f(\mathbf{x}_i) \cdot \boxed{\sum_j^N (\mathbf{x}_j - \mathbf{x}_i) \nabla W_{ij} V_j} + \boxed{\sum_j^N R_2 \nabla W_{ij} V_j}$$

$\sim \mathcal{O}(h^0)$ $\sim \mathcal{O}(h^1)$



$$\nabla f(\mathbf{x}_i) = \sum_j^N \left(f(\mathbf{x}_j) - f(\mathbf{x}_i) \right) \nabla W(|\mathbf{x}_i - \mathbf{x}_j|; h) V_j + \mathcal{O}(h^0)$$

▶ 解像度を上げてても
誤差は減らない

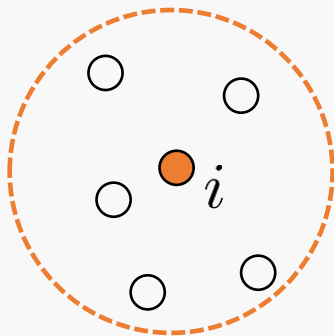
背景 > 精度向上 > 検証①②③ > 高速化 > 線形解析 > 検証 > まとめと今後

【原因】 均等配置の仮定 ▶ 【対策】 均等配置を仮定しない (高次の項を考慮)

最小二乗法に基づく高精度粒子法を参考

- LSMPS [Tamai & Koshizuka, 2014]
- CPHSF [Yamamoto & Makino, 2017]

$$\begin{cases} f_i + \nabla f_i \cdot (\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_i) + \cdots = f_1 \\ f_i + \nabla f_i \cdot (\mathbf{x}_2 - \mathbf{x}_i) + \cdots = f_2 \\ \vdots \\ f_i + \nabla f_i \cdot (\mathbf{x}_N - \mathbf{x}_i) + \cdots = f_N \end{cases}$$



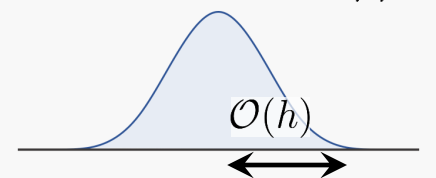
重み付き最小二乗法

$$\mathbf{A}\mathbf{X} = \mathbf{b} \quad \blacktriangleright \quad \mathbf{A}^\top \Psi \mathbf{A} \mathbf{X} = \mathbf{A}^\top \Psi \mathbf{b}$$

• 距離に関する重み $\Psi = \text{diag}\{\psi_1 \cdots \psi_N\}$

$$\psi_j \propto \frac{\partial^\beta W(r_{ij}; h)}{\partial r_{ij}^\beta} V_j$$

カーネル関数 W



β 0以上の整数 V_j 粒子体積

• 適切に選ぶことで従来のSPH法を再現

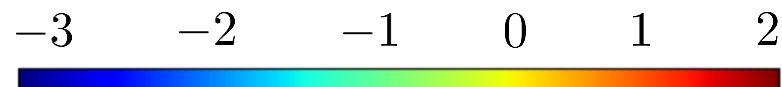
→ 一般化されたSPH法

Shobuzako et al. (2025)

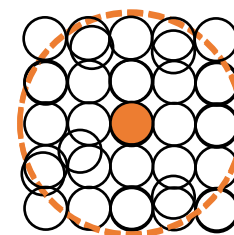
• 任意の階数の微分を

任意の精度で求めることが可能

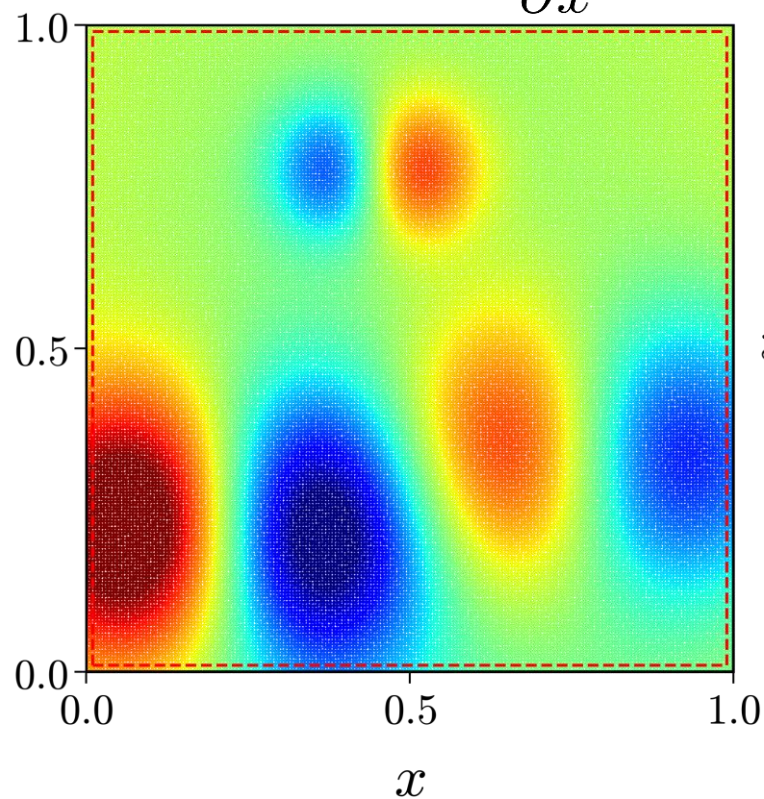
背景 > 精度向上 > 検証①②③ > 高速化 > 線形解析 > 検証 > まとめと今後



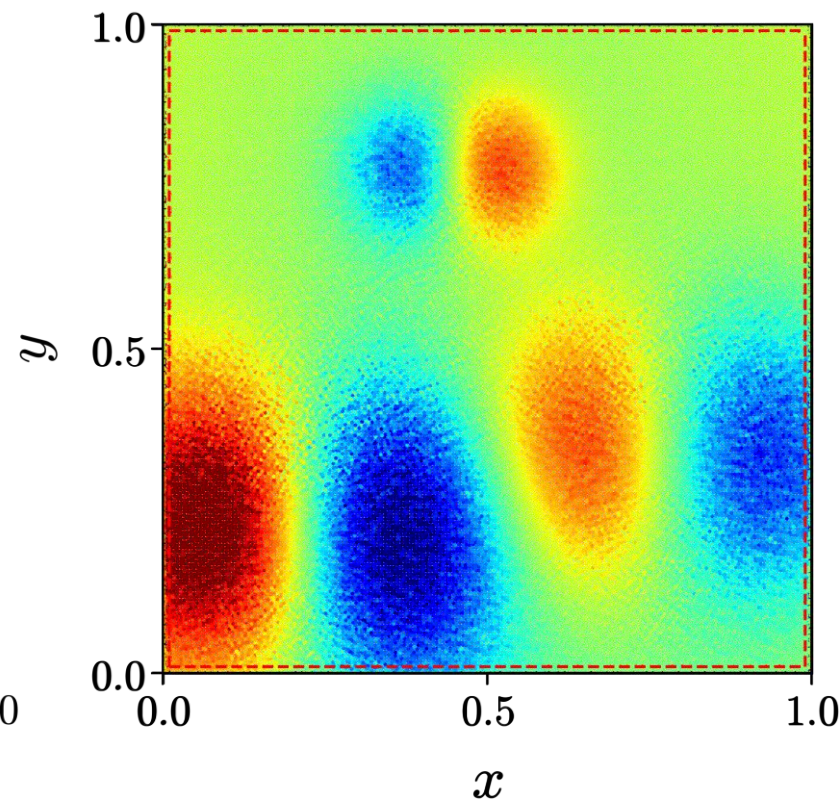
配置点等配置の場合



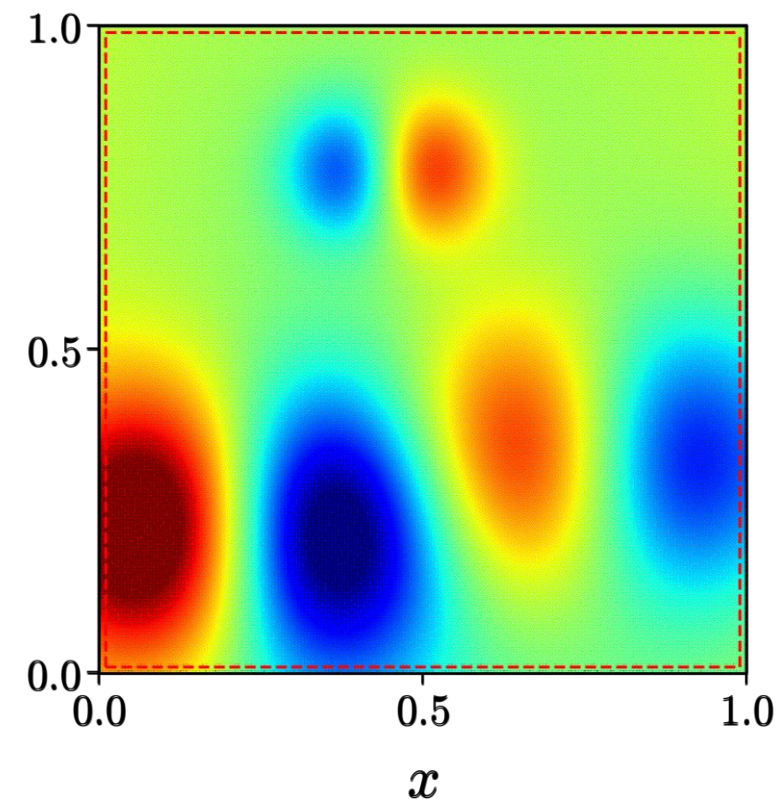
元の関数 $\frac{\partial f}{\partial x}$



従来のSPH法

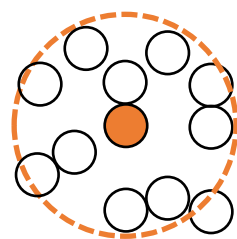


最小二乗SPH法

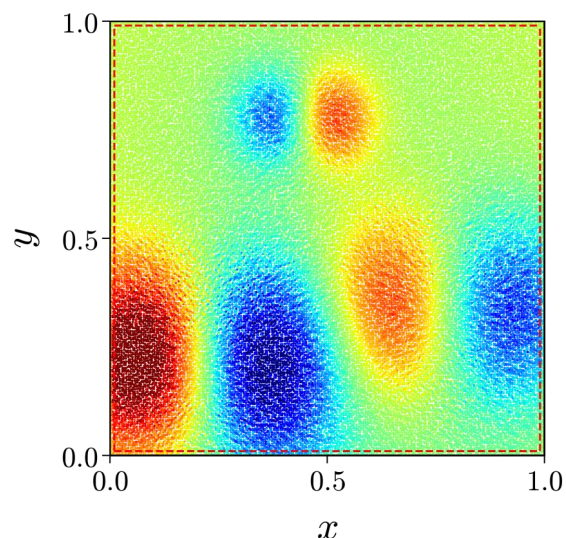


背景 > 精度向上 > 検証①②③ > 高速化 > 線形解析 > 検証 > まとめと今後

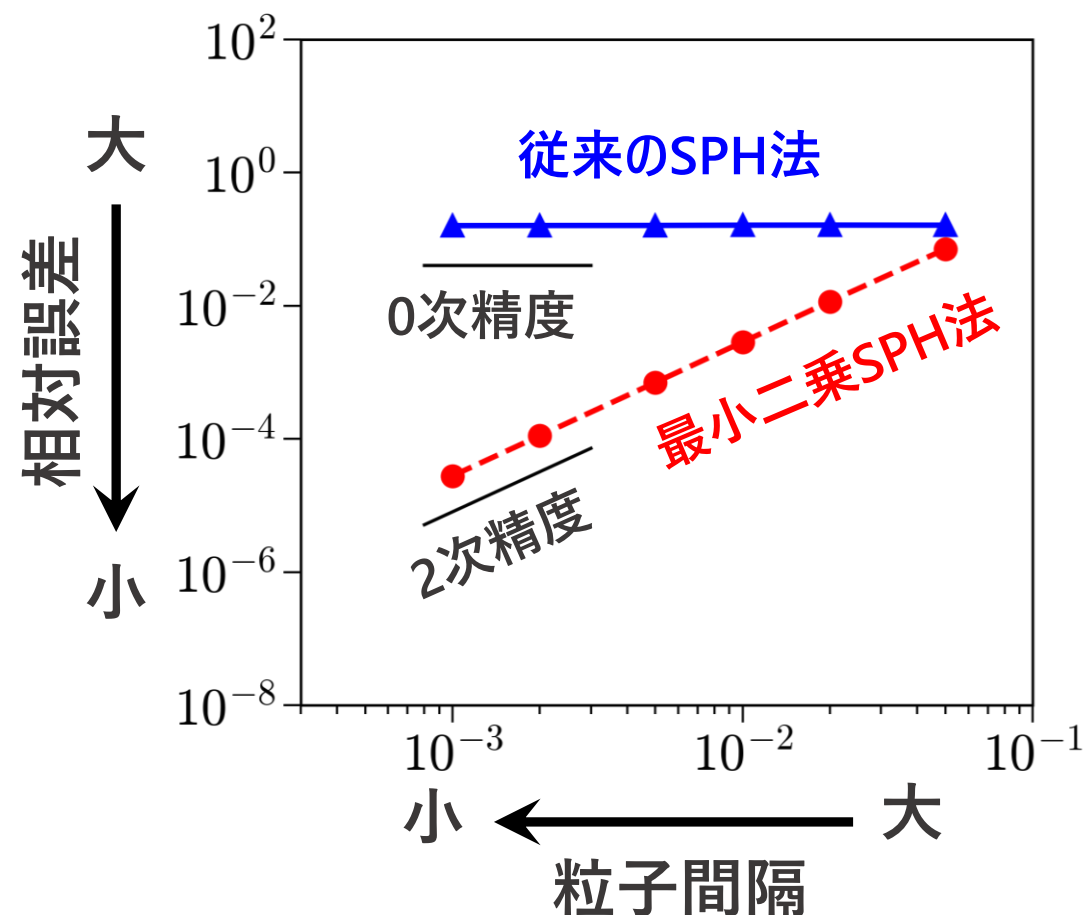
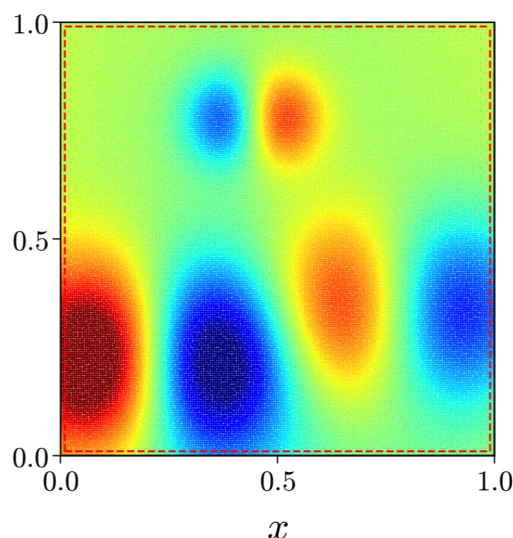
配置に乱れがある場合



従来のSPH法

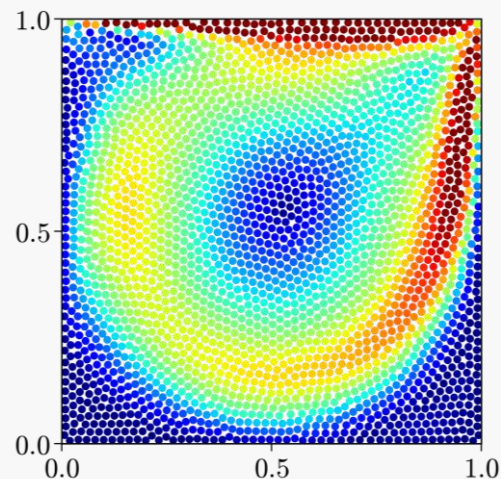


最小二乗SPH法



【結果】 従来のSPH法は0次精度 / 最小二乗SPH法は高精度

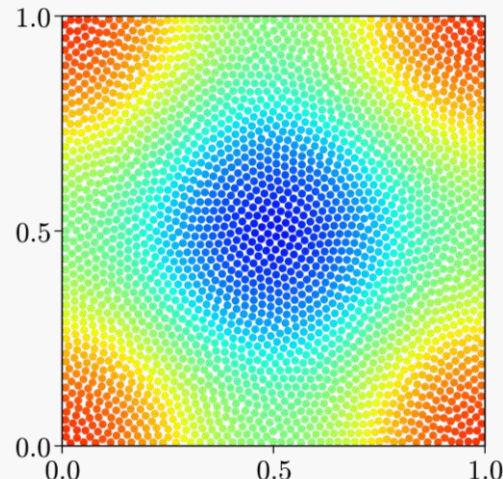
流体計算に関するベンチマークテスト(2次元)を実施 ▶ 従来法 vs 提案法



Cavity flow

Ghia et al. (1982)

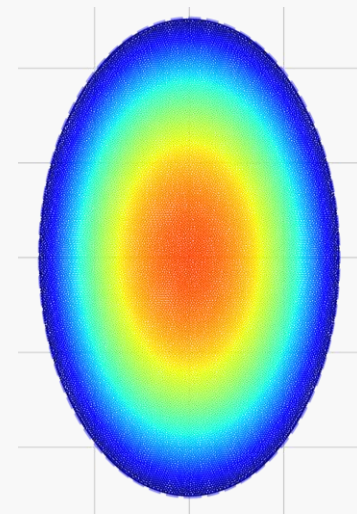
上壁に一定速度を与える問題
定常 (参照解と比較)



Taylor-Green vortex

Taylor and Green (1923)

粘性によって速度が減衰する問題
非定常 (厳密解と比較)



Oscillating drop

Monaghan and Rafiee (2013)

自由表面を有する問題
非定常 (準解析解と比較)

背景 > 精度向上 > 検証①②③ > 高速化 > 線形解析 > 検証 > まとめと今後

基礎方程式（弱圧縮性近似を適用）

1 質量保存の式

$$\frac{d\rho_i}{dt} = -\rho_i \langle \nabla \cdot \mathbf{u} \rangle_i$$

2 運動量保存の式

$$\frac{d\mathbf{u}_i}{dt} = -\frac{1}{\rho_i} \langle \nabla p \rangle_i + \nu \langle \nabla^2 \mathbf{u} \rangle_i + \mathbf{F}_{\text{ext},i}$$

3 状態方程式

Chorin (1967)

$$p_i = c_0^2 (\rho_i - \rho_0)$$

ρ 密度 t 時間 $\mathbf{u}$ 速度 p 圧力 ν 動粘性率 $\mathbf{F}_{\text{ext},i}$ 外力 $c_0 = 10|\mathbf{u}|_{\text{max}}$ 人為的な音速

本当の流体はCFL条件が厳しい

$$\Delta t = \Delta x / c_0$$

遅い流れに対して

本質的でない音波を 低減 or 増大

弱圧縮性近似

CFL条件を緩める

音速 低減

音速 増大

本当の流体

非圧縮性近似

CFL条件を除去 ($\nabla \cdot \mathbf{u} = 0$)

弱圧縮性近似の利点: 高速な逐次計算が可能 ($\because$ 各粒子の時間発展式が独立)

背景 > 精度向上 > 検証①②③ > 高速化 > 線形解析 > 検証 > まとめと今後

◆ 基礎方程式 (弱圧縮性近似を適用)

- 1 質量保存の式 $\frac{d\rho_i}{dt} = -\rho_i \langle \nabla \cdot \mathbf{u} \rangle_i$
- 2 運動量保存の式 $\frac{d\mathbf{u}_i}{dt} = -\frac{1}{\rho_i} \langle \nabla p \rangle_i + \nu \langle \nabla^2 \mathbf{u} \rangle_i + \mathbf{F}_{\text{ext},i}$
- 3 状態方程式 $p_i = c_0^2(\rho_i - \rho_0)$

◆ SPHの微分モデル (従来法 vs 提案法)

従来SPH

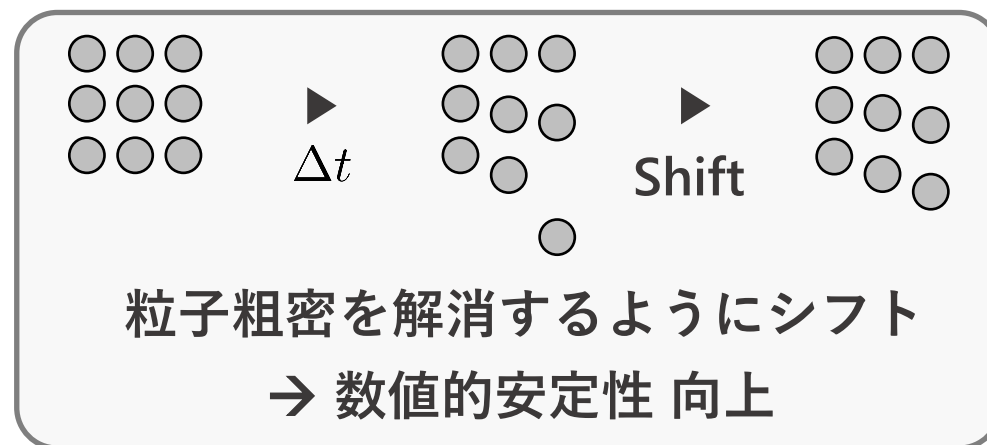
$$\langle \nabla f \rangle_i = \sum_j^N (f_j - f_i) \nabla_i W_{ij} V_j$$

$$\langle \nabla^2 f \rangle_i = \sum_j^N (f_j - f_i) \frac{\mathbf{x}_{ji} \cdot \nabla_i W_{ij}}{r_{ij}} V_j$$

LS-SPH 1階微分: 2次精度 2階微分: 1次精度

◆ 安定化スキーム $A^T \Psi A \mathbf{X} = A^T \Psi \mathbf{b}$

- 1 Particle Shifting 法を適用 Lind et al. (2012)



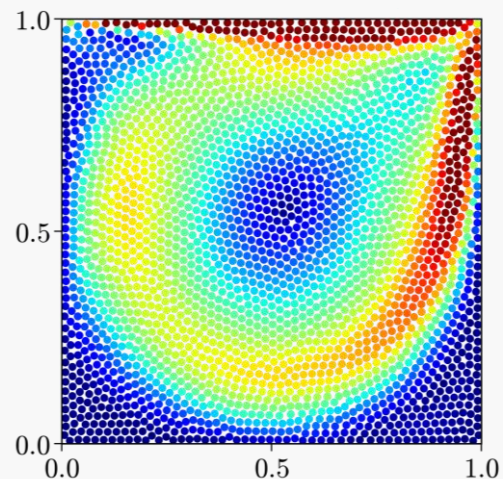
- 2 密度拡散項を導入 Antuono et al. (2010)

$$\frac{d\rho_i}{dt} = -\rho_i \langle \nabla \cdot \mathbf{u} \rangle_i + \delta \langle \nabla^2 \rho \rangle_i$$

粒子法では境界条件の付与が困難
→ 境界付近で高周波な音波が発生
→ 高周波ノイズを拡散させて除去

背景 > 精度向上 > 検証①②③ > 高速化 > 線形解析 > 検証 > まとめと今後

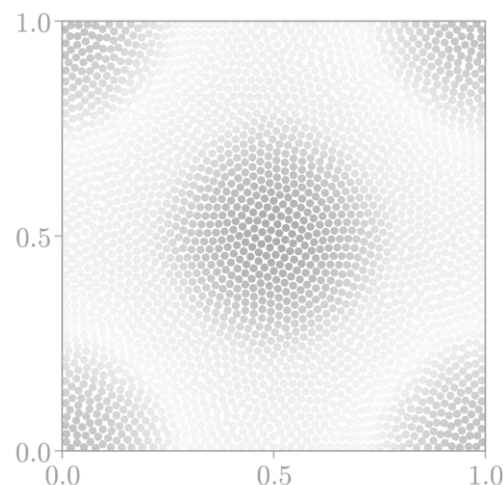
流体計算に関するベンチマークテスト(2次元)を実施 ▶ 従来法 vs 提案法



Cavity flow

Ghia et al. (1982)

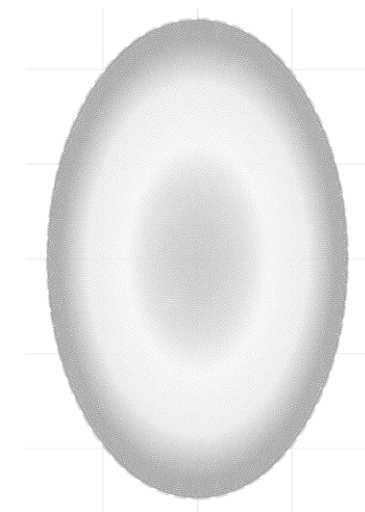
上壁に一定速度を与える問題
定常 (参照解と比較)



Taylor-Green vortex

Taylor and Green (1923)

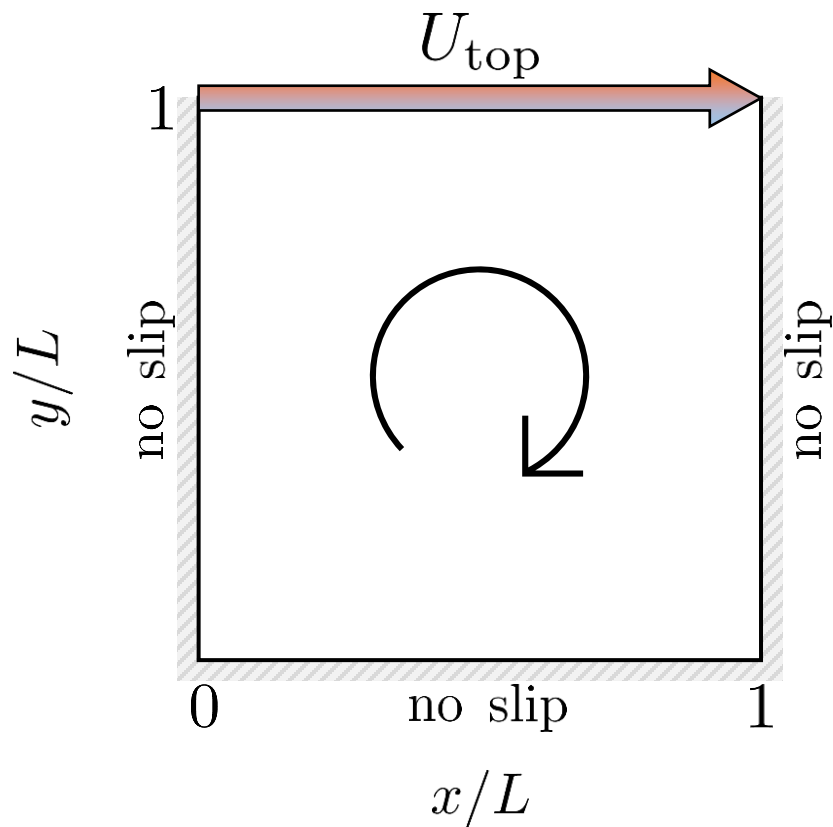
粘性によって速度が減衰する問題
非定常 (厳密解と比較)



Oscillating drop

Monaghan and Rafiee (2013)

自由表面を有する問題
非定常 (準解析解と比較)



■ 基礎方程式（オリジナル） Ghia et al. (1982)

$$\frac{d\mathbf{u}}{dt} = -\frac{1}{\rho_0} \nabla p + \nu \nabla^2 \mathbf{u}$$

$$\nabla \cdot \mathbf{u} = 0 \quad \text{弱}$$

$$\frac{d\rho_i}{dt} = -\rho_i \langle \nabla \cdot \mathbf{u} \rangle_i + \delta \langle \nabla^2 \rho \rangle_i$$

密度拡散項

$$p_i = c_0^2 (\rho_i - \rho_0)$$

■ 無次元パラメータ: レイノルズ数

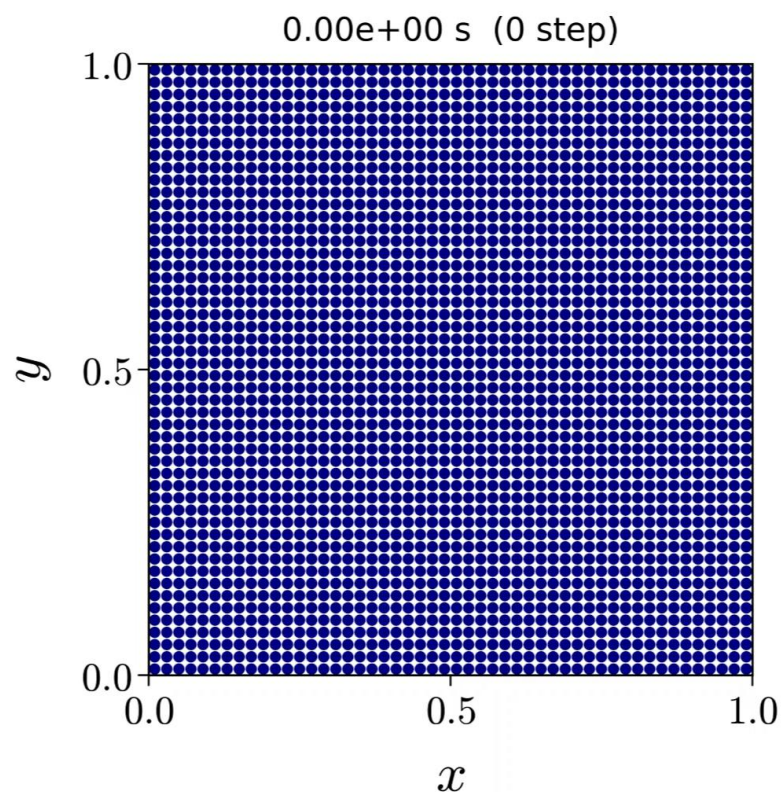
$$Re = \frac{LU_{\text{top}}}{\nu} = 1000$$

■ 定常解が得られるまで計算

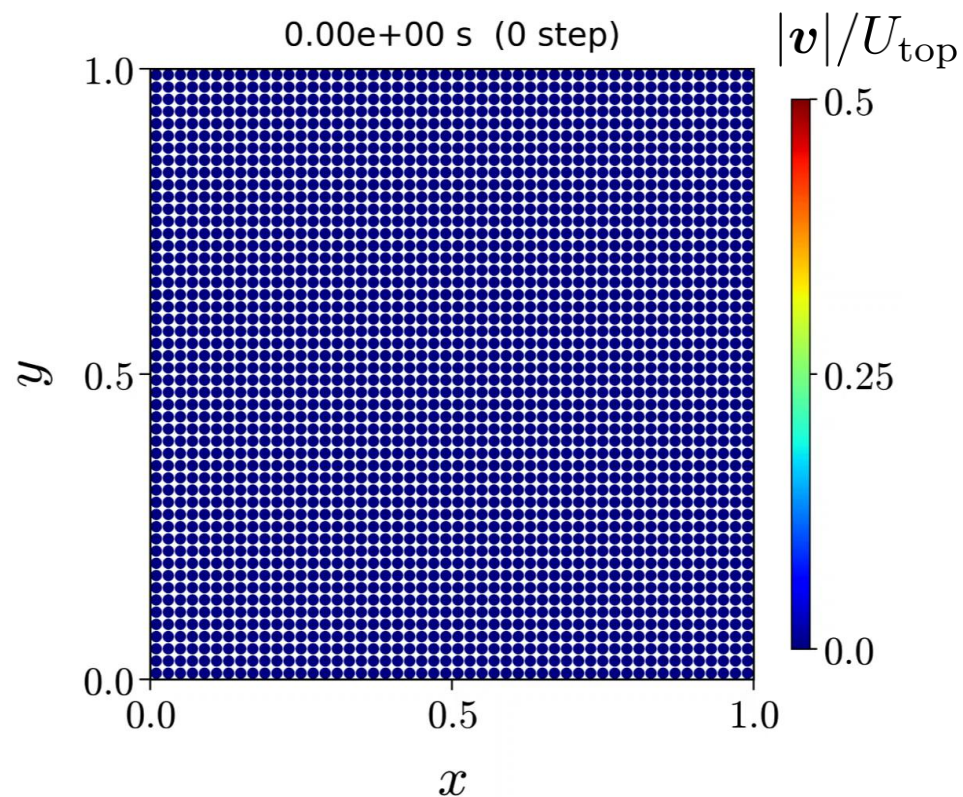
背景 > 精度向上 > 検証①②③ > 高速化 > 線形解析 > 検証 > まとめと今後

$$Re = 1000, N = 50 \times 50$$

【従来SPH】

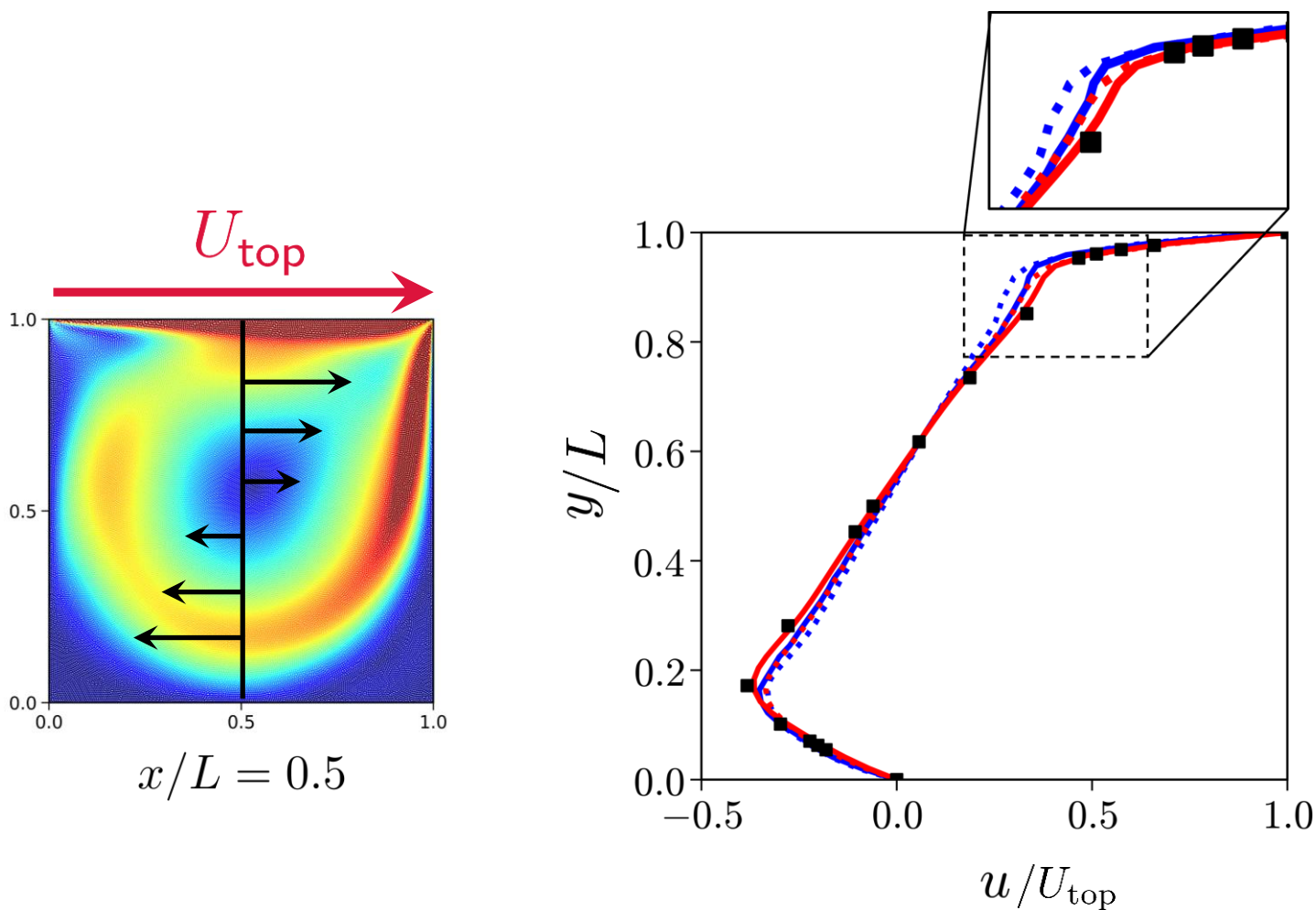


【LS-SPH】



定性的には両モデルでほとんど同じ

背景 > 精度向上 > 検証①②③ > 高速化 > 線形解析 > 検証 > まとめと今後



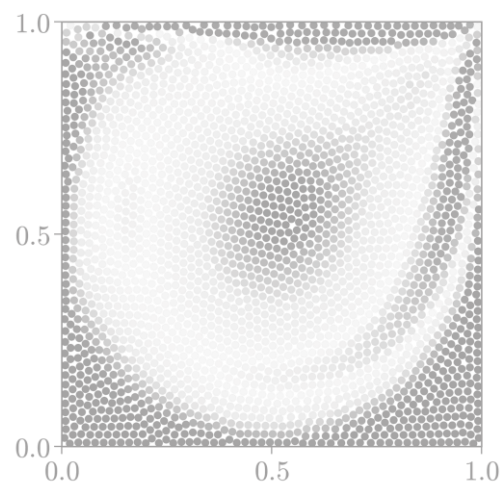
■ Ghia et al. (1982)
有限体積法

従来SPH		$N = 50 \times 50$
	——	$N = 200 \times 200$
LS-SPH		$N = 50 \times 50$
	——	$N = 200 \times 200$

【結果】 LS-SPHの方が精確 / 従来SPHはそれほど悪くない

背景 > 精度向上 > 検証①②③ > 高速化 > 線形解析 > 検証 > まとめと今後

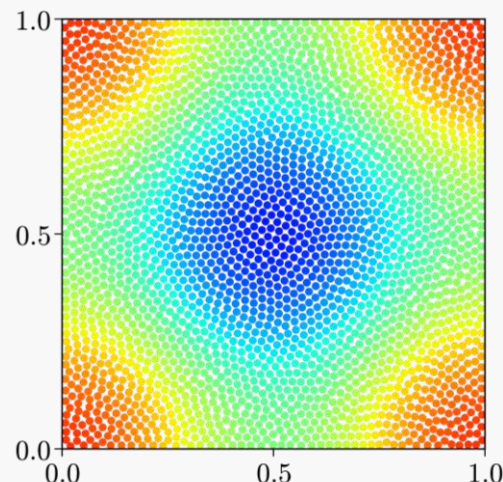
流体計算に関するベンチマークテスト(2次元)を実施 ▶ 従来法 vs 提案法



Cavity flow

Ghia et al. (1982)

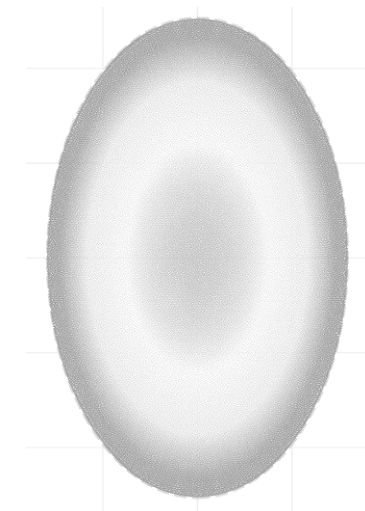
上壁に一定速度を与える問題
定常 (参照解と比較)



Taylor-Green vortex

Taylor and Green (1923)

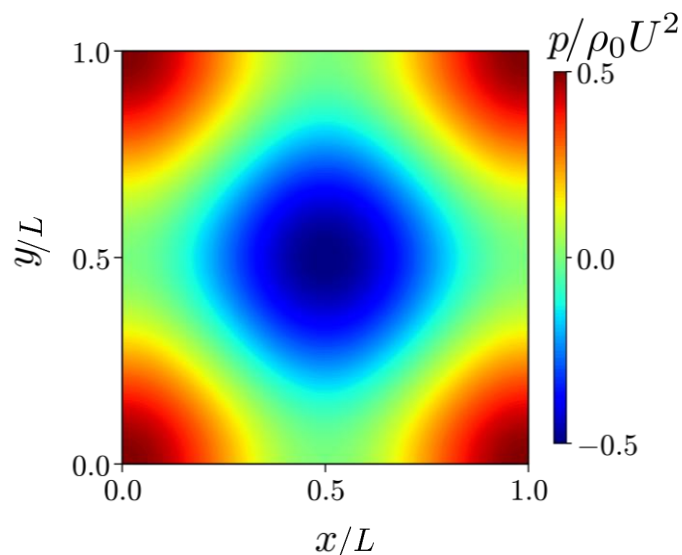
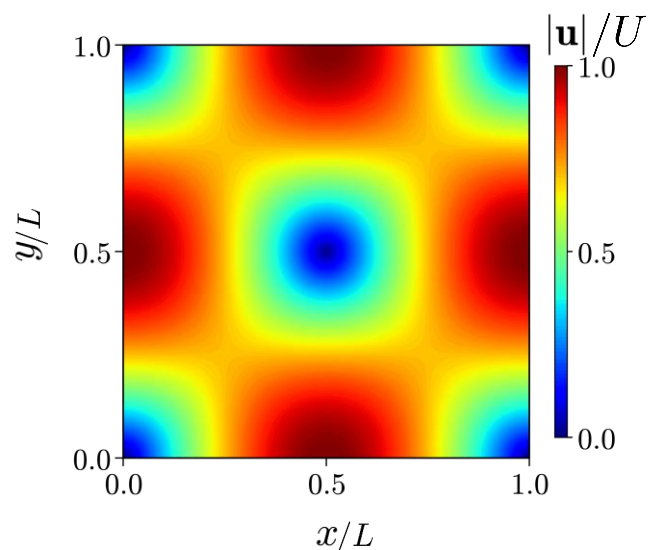
粘性によって速度が減衰する問題
非定常 (厳密解と比較)



Oscillating drop

Monaghan and Rafiee (2013)

自由表面を有する問題
非定常 (準解析解と比較)



■ 基礎方程式（オリジナル） Taylor and Green (1923)

$$\frac{d\mathbf{u}}{dt} = -\frac{1}{\rho_0} \nabla p + \nu \nabla^2 \mathbf{u}$$

$$\nabla \cdot \mathbf{u} = 0 \quad \text{弱}$$

$$\frac{d\rho_i}{dt} = -\rho_i \langle \nabla \cdot \mathbf{u} \rangle_i \quad \text{密度拡散項なし}$$

$$p_i = c_0^2 (\rho_i - \rho_0)$$

■ 厳密解が存在（非圧縮 + Free-slip条件）

$$u(x, y, t) = U e^{-2\pi^2 \nu t / L^2} \sin(\pi x / L) \cos(\pi y / L)$$

$$v(x, y, t) = -U e^{-2\pi^2 \nu t / L^2} \cos(\pi x / L) \sin(\pi y / L)$$

$$p(x, y, t) = \frac{\rho_0 U^2}{4} e^{-4\pi^2 \nu t / L^2} [\cos(2\pi x / L) + \cos(2\pi y / L)]$$

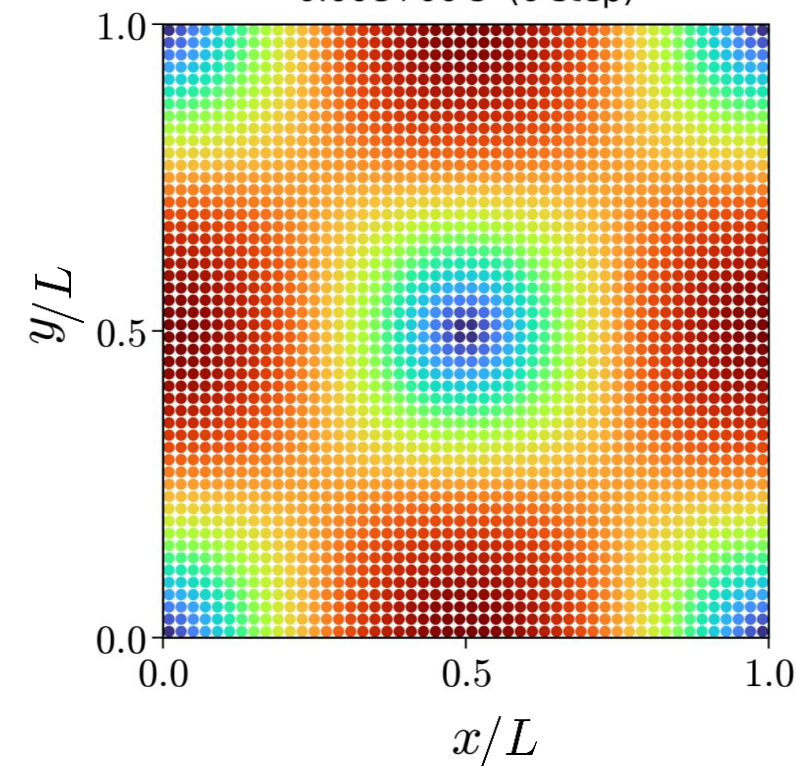
■ 無次元パラメータ: レイノルズ数 $Re = \frac{LU}{\nu}$

背景 > 精度向上 > 検証①②③ > 高速化 > 線形解析 > 検証 > まとめと今後

$$Re = 100, N = 50 \times 50$$

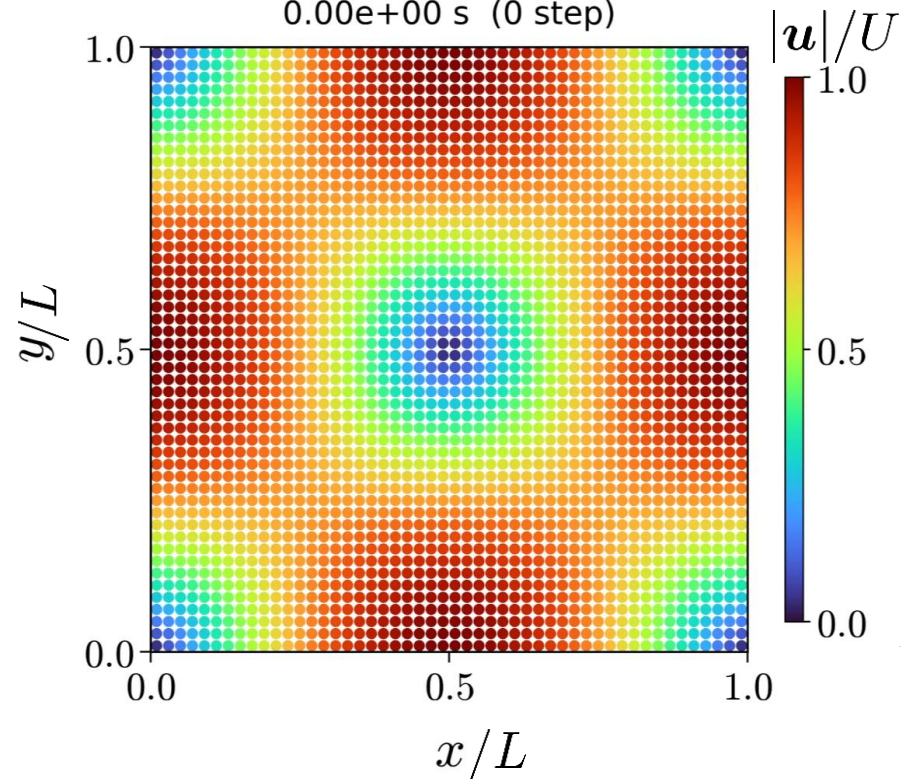
【従来SPH】

0.00e+00 s (0 step)



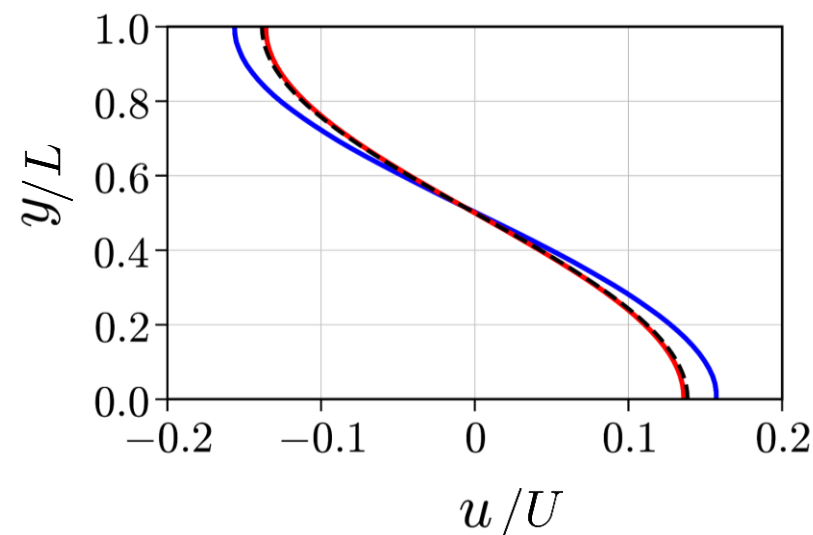
【LS-SPH】

0.00e+00 s (0 step)



【速度プロファイル】

$t/(L/U) = 10, x/L = 0.5$



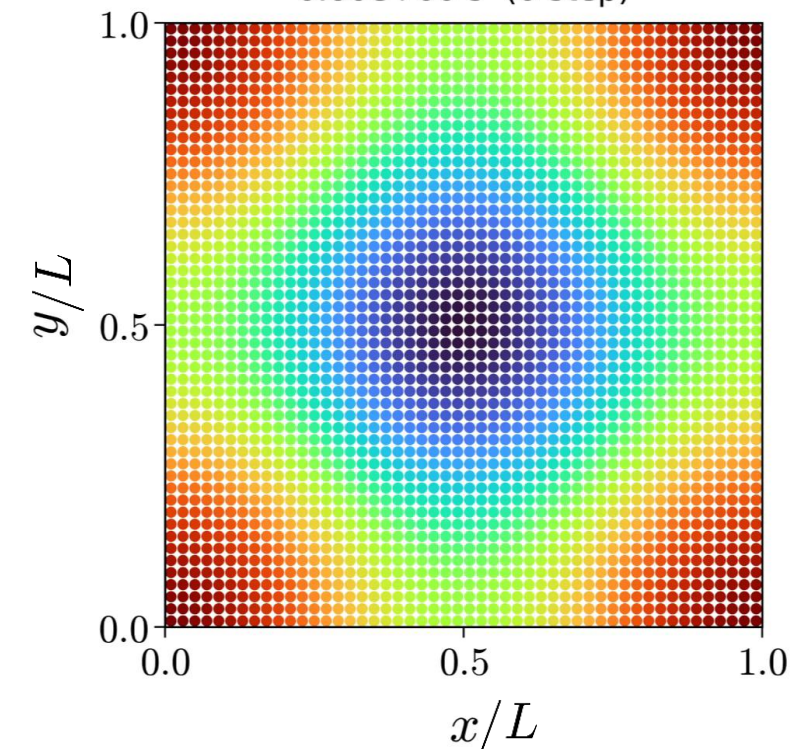
⋯ 厳密解 — 従来SPH — LS-SPH

背景 > 精度向上 > 検証①②③ > 高速化 > 線形解析 > 検証 > まとめと今後

$$Re = 100, N = 50 \times 50$$

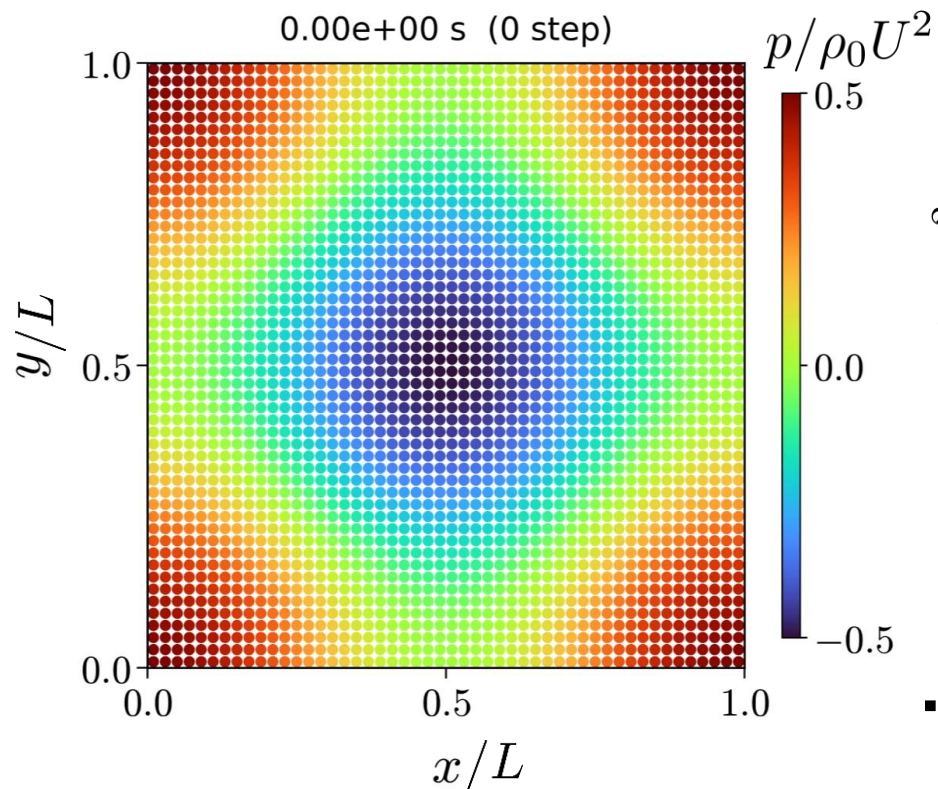
【従来SPH】

0.00e+00 s (0 step)



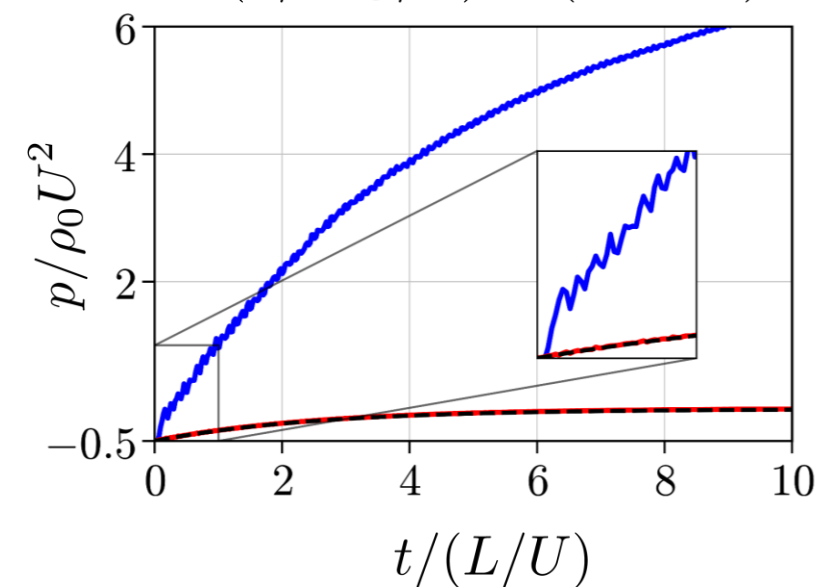
【LS-SPH】

0.00e+00 s (0 step)



【圧力の時間変化】

@ $(x/L, y/L) = (0.5, 0.5)$



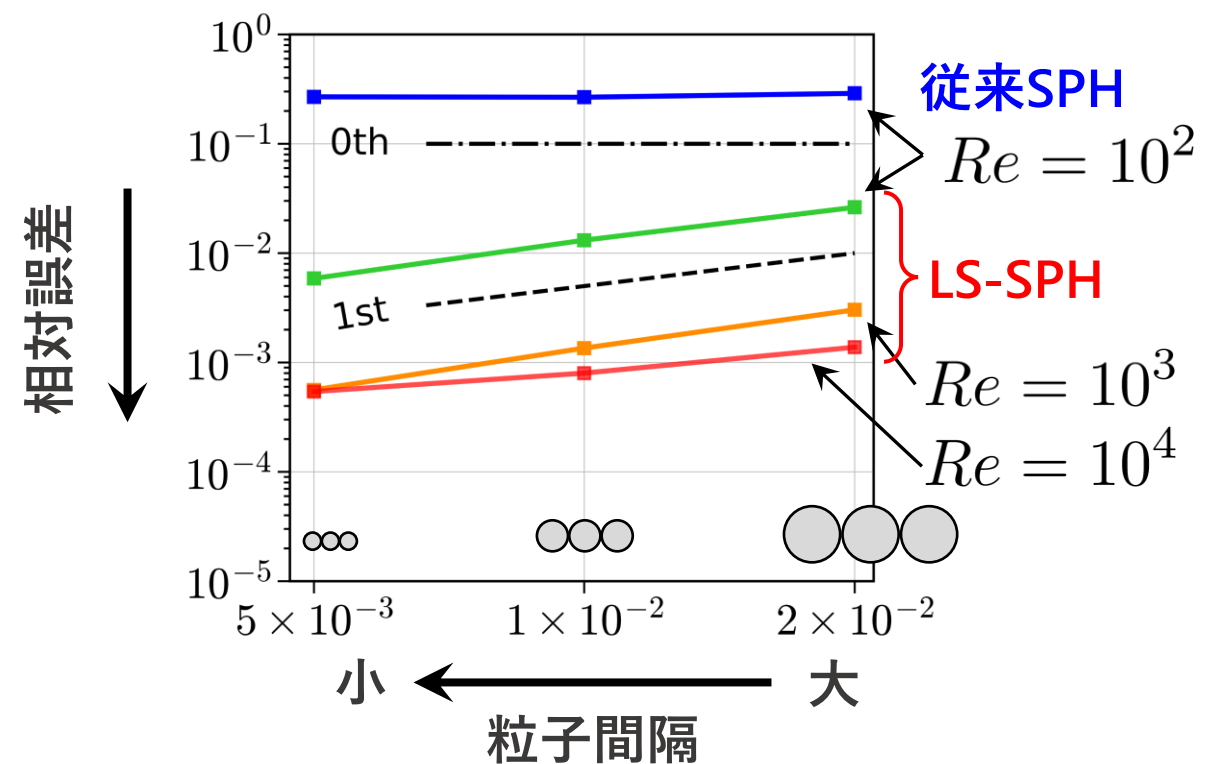
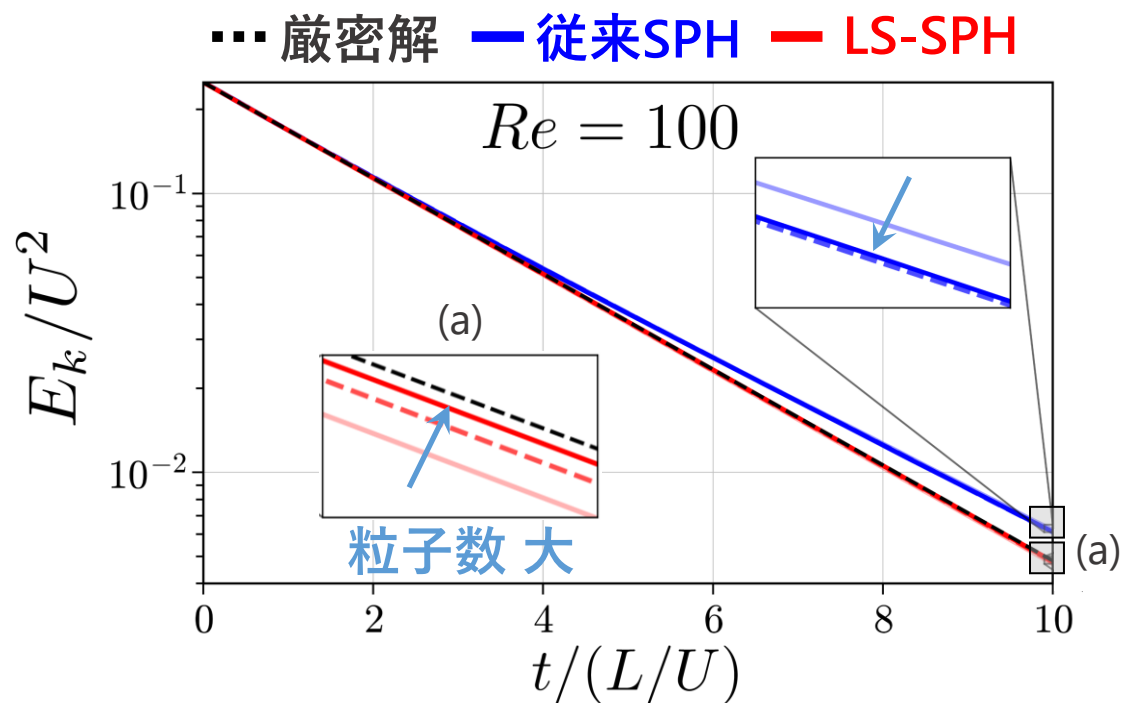
... 厳密解 — 従来SPH — LS-SPH

背景 > 精度向上 > 検証①②③ > 高速化 > 線形解析 > 検証 > まとめと今後

運動エネルギーの保存性を確認

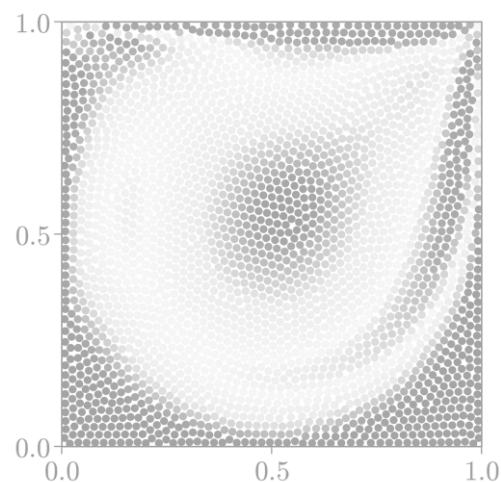
 $N = 50 \times 50, 100 \times 100, 200 \times 200$

$$\text{系の運動エネルギー } E_k = \frac{1}{2N} \sum_{i=1}^N |u_i|^2$$

**【結果】 従来SPHは0次精度 / LS-SPHは~1次精度**

背景 > 精度向上 > 検証①②③ > 高速化 > 線形解析 > 検証 > まとめと今後

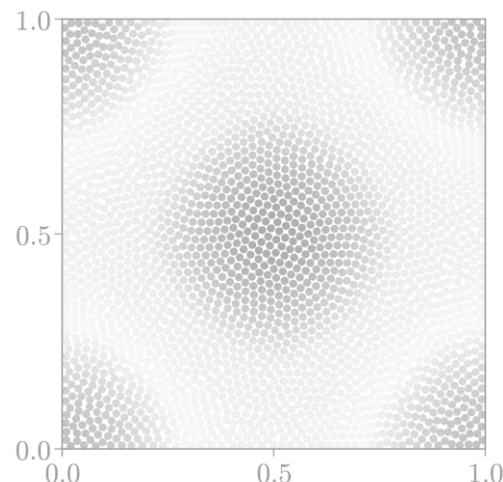
流体計算に関するベンチマークテスト(2次元)を実施 ▶ 従来法 vs 提案法



Cavity flow

Ghia et al. (1982)

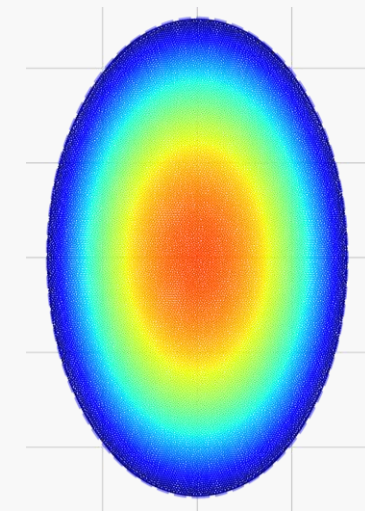
上壁に一定速度を与える問題
定常 (参照解と比較)



Taylor-Green vortex

Taylor and Green (1923)

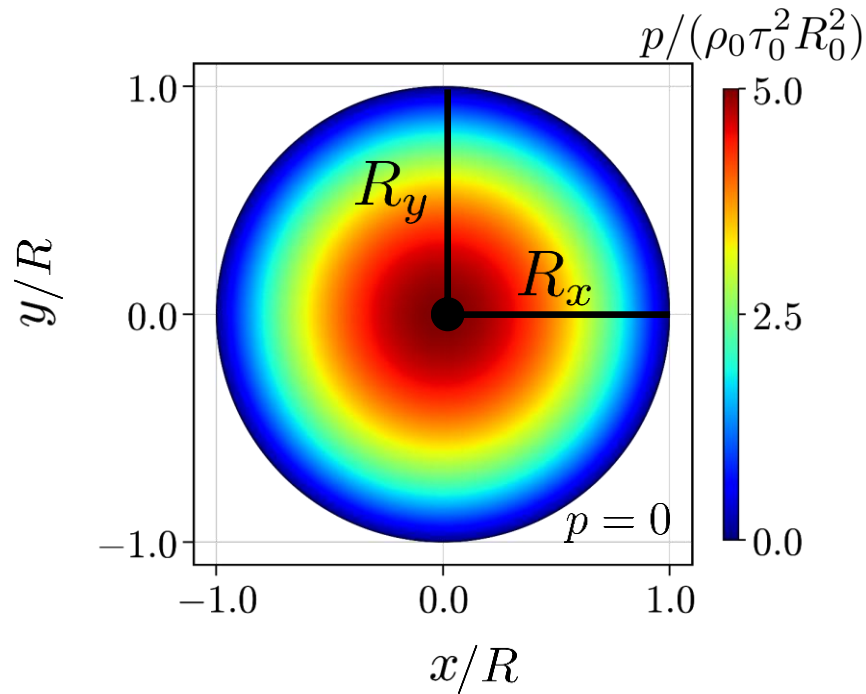
粘性によって速度が減衰する問題
非定常 (厳密解と比較)



Oscillating drop

Monaghan and Rafiee (2013)

自由表面を有する問題
非定常 (準解析解と比較)



■ 基礎方程式 Monaghan and Rafiee (2013)

中心力 ▶ ポテンシャルが存在

$$\frac{d\mathbf{u}}{dt} = -\frac{1}{\rho_0} \nabla p + \nu \nabla^2 \mathbf{u} - \omega^2 \mathbf{x}_i$$

$$\nabla \cdot \mathbf{u} = 0 \quad \text{▶ 弱}$$

$$\frac{d\rho_i}{dt} = -\rho_i \langle \nabla \cdot \mathbf{u} \rangle_i + \delta \langle \nabla^2 \rho \rangle_i$$

密度拡散項

$$p_i = c_0^2 (\rho_i - \rho_0)$$

■ 非圧縮かつ非粘性の場合に準解析解が存在

$$u(x, y, t) = \tau x \quad v(x, y, t) = -\tau y \quad \frac{d\tau(t)}{dt} = (\tau^2 + \omega^2) \frac{R_y^2 - R_x^2}{R_y^2 + R_x^2}$$

$$p(x, y, t) = \frac{\rho_0}{2} (\tau^2 + \omega^2) (R^2 - (x^2 + y^2))$$

■ パラメータ Khayyer et al. (2017)

小さい粘性を導入

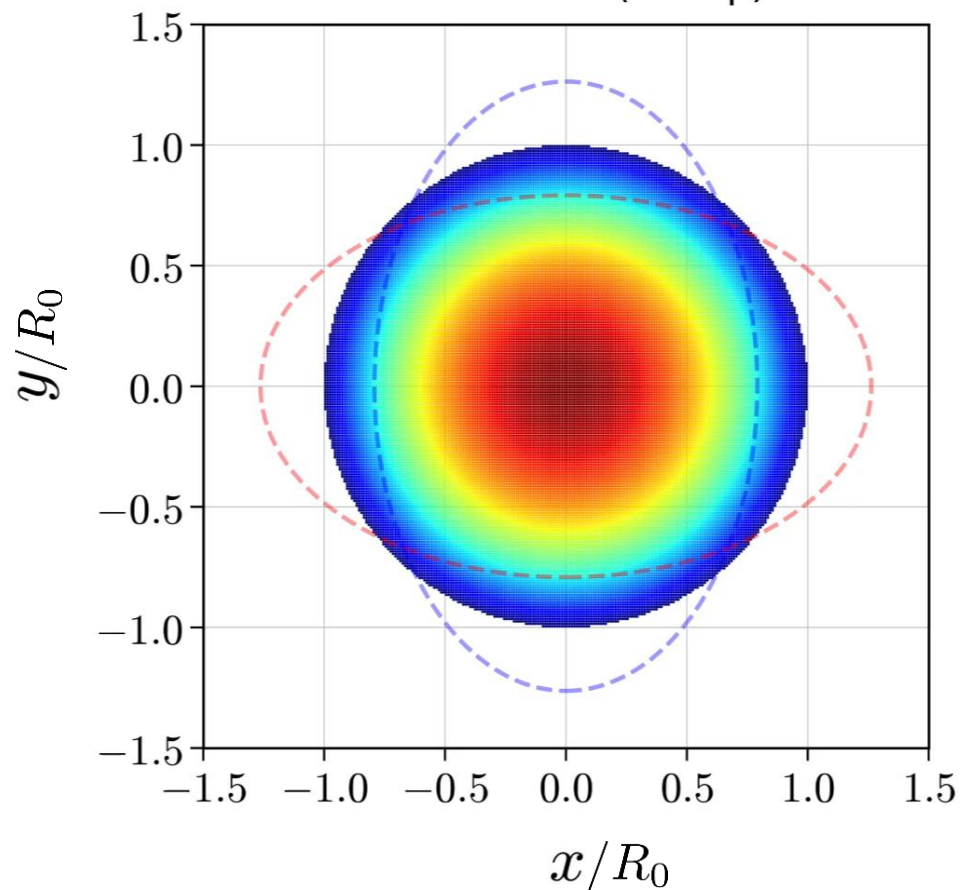
$$R_0 = 0.5 \text{ m} \quad \omega = 1.2 \text{ s}^{-1} \quad \tau = 0.4 \text{ s}^{-1} \quad \rho_0 = 1.0 \text{ kg m}^{-3} \quad \nu = 10^{-3} \text{ m}^2 \text{ s}^{-1}$$

背景 > 精度向上 > 検証①②③ > 高速化 > 線形解析 > 検証 > まとめと今後

$R_0/\Delta x = 100 \leftarrow$ 半径方向に100粒子

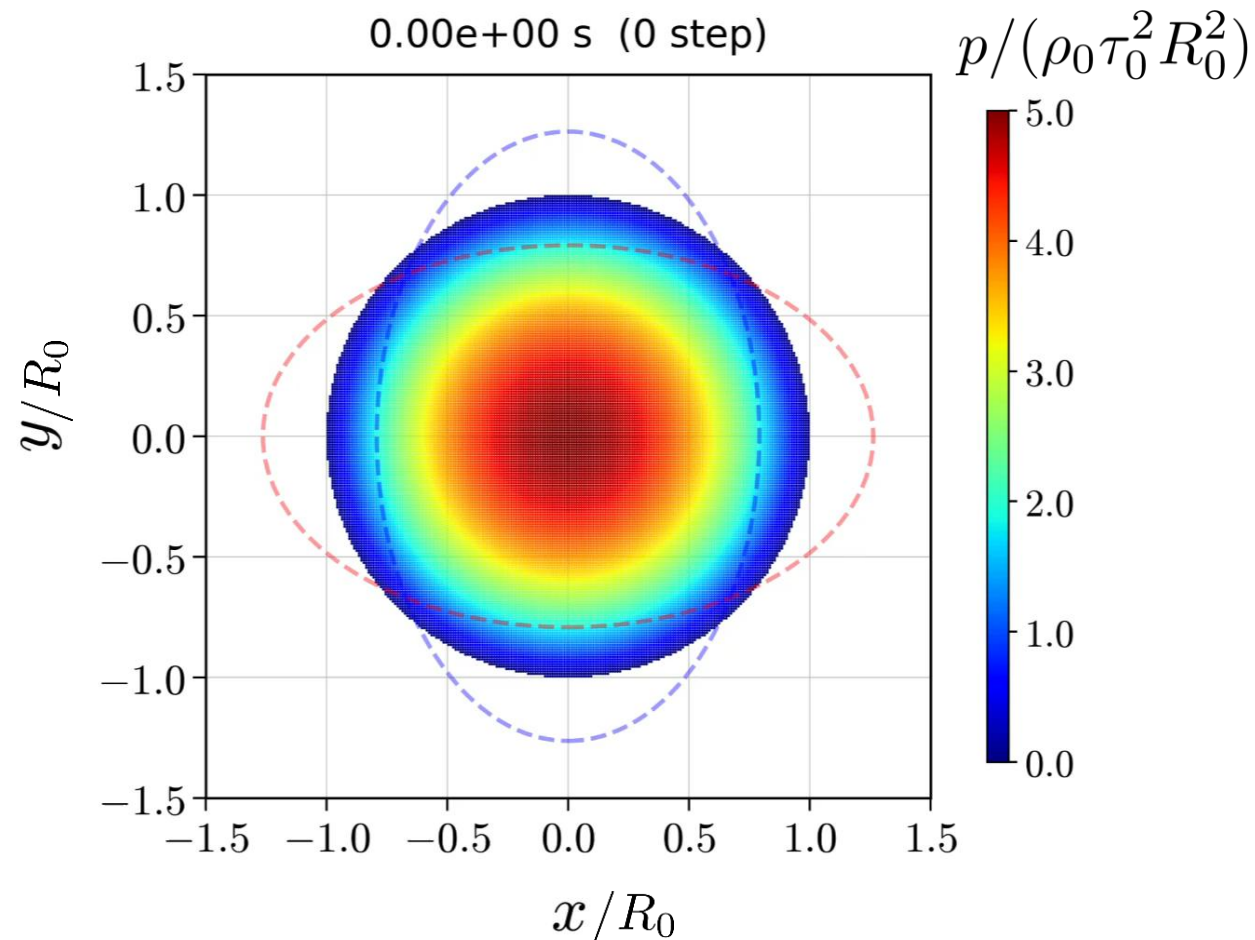
【従来SPH】

0.00e+00 s (0 step)



【LS-SPH】

0.00e+00 s (0 step)



Oscillating drop 【結果 2/3】

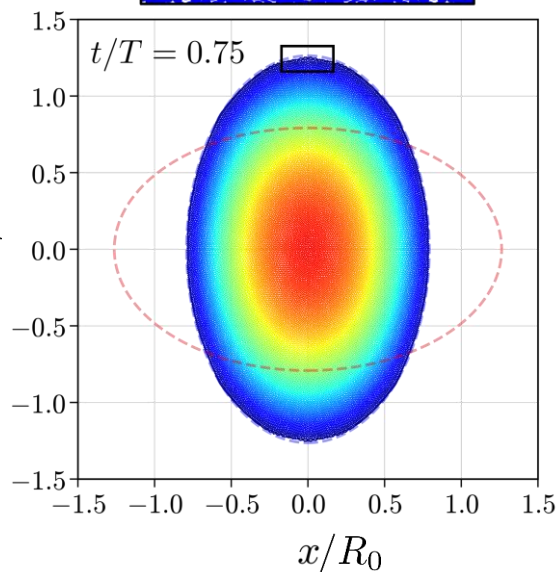
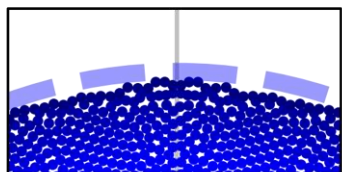
32 / 43

背景 > 精度向上 > 検証①②③ > 高速化 > 線形解析 > 検証 > まとめと今後

0.0 0.1 0.2 0.3 0.4 0.5 $p/(\rho_0 \tau_0^2 R_0^2)$

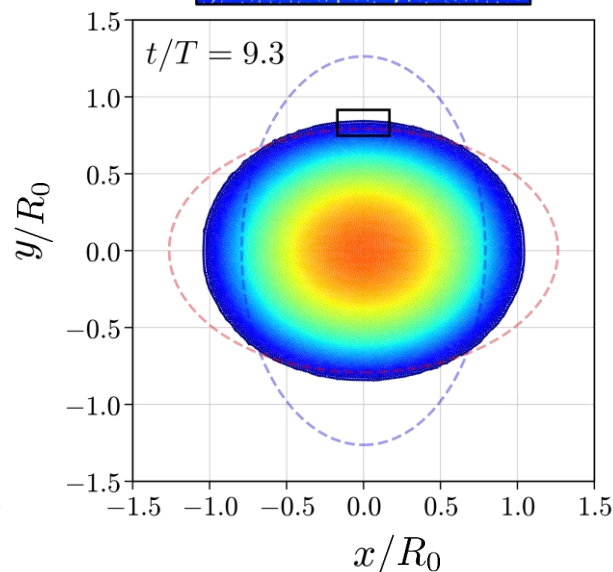
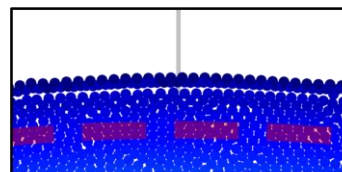
$$T \approx \sqrt{2}\pi/\omega$$

$t/T = 0.75$

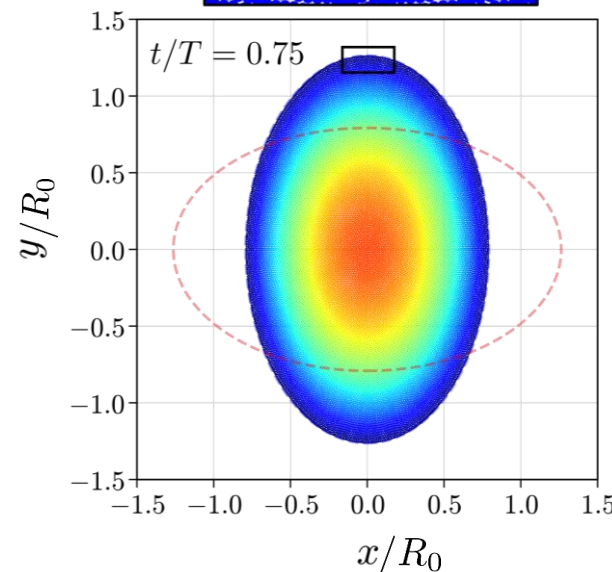
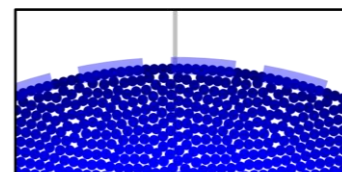


【従来SPH】

$t/T = 9.3$

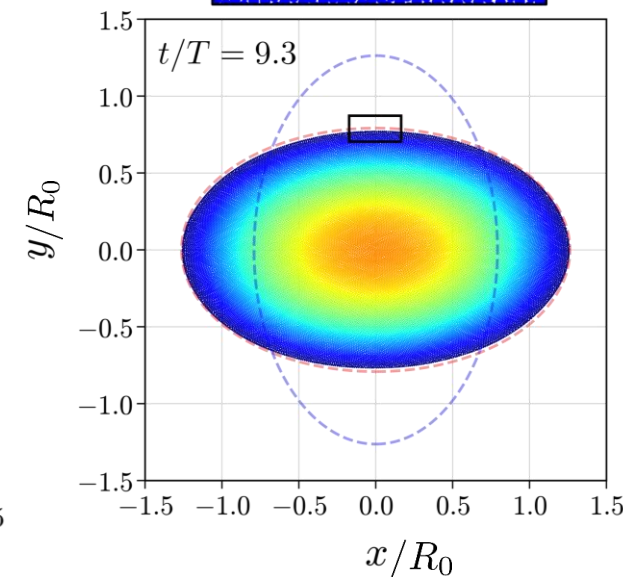
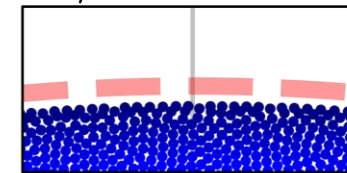


$t/T = 0.75$



【LS-SPH】

$t/T = 9.3$

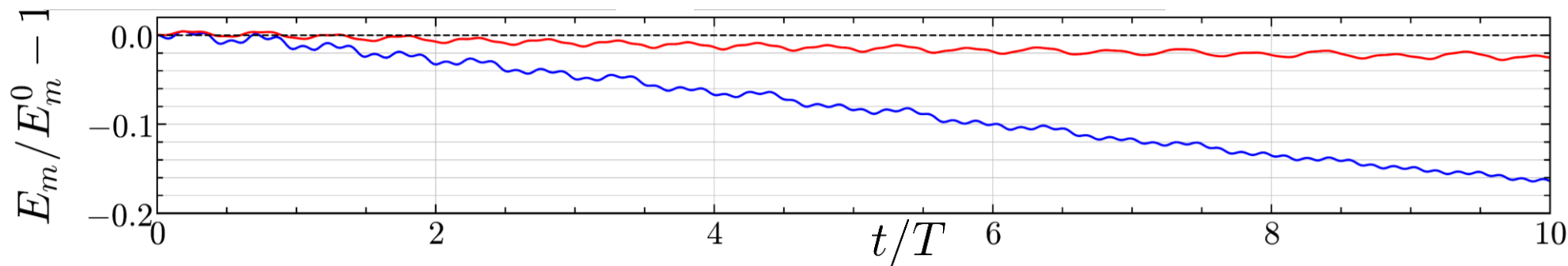
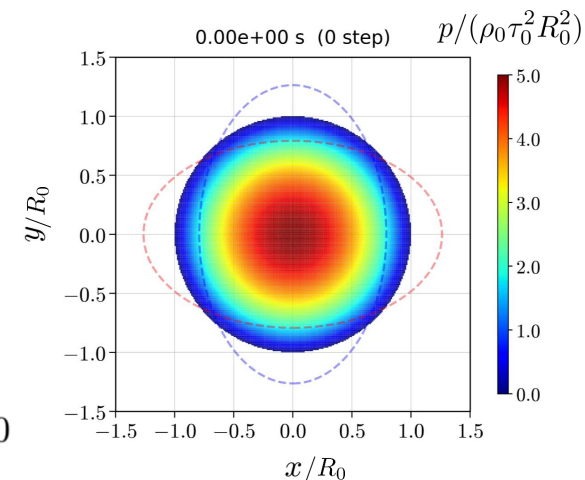
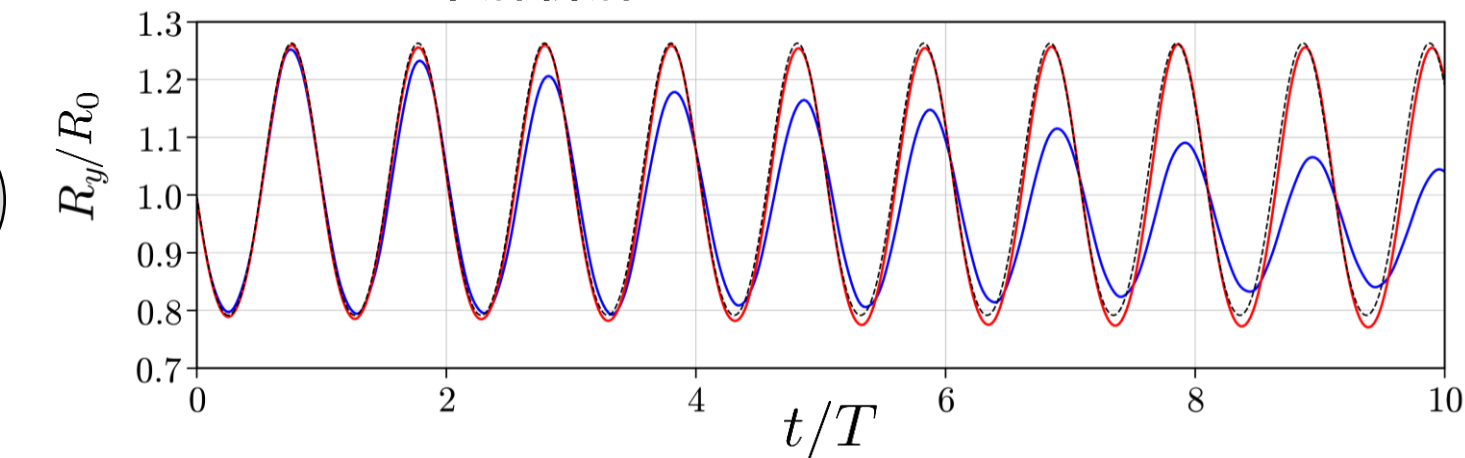
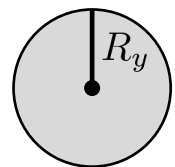


従来SPHは全く異なる解 / LS-SPHは準解析解と整合的

背景 > 精度向上 > 検証①②③ > 高速化 > 線形解析 > 検証 > まとめと今後

軸と力学的エネルギーの時間変化

... 準解析解 — 従来SPH — LS-SPH



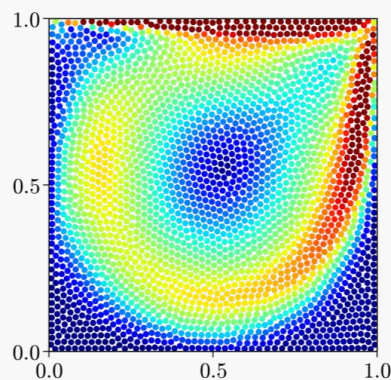
~2%消失

~16%消失

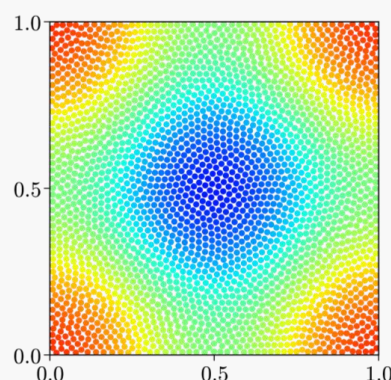
【結果】 従来SPHはどんどん減衰する / LS-SPHは準解析解と整合的

背景 > 精度向上 > 検証①②③ > 高速化 > 線形解析 > 検証 > まとめと今後

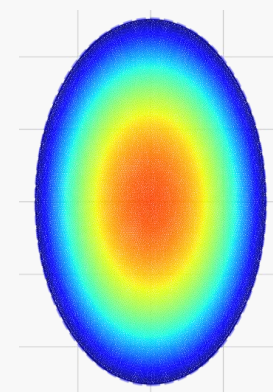
- 1 従来のSPH法は精度が低い ▶ 高精度な**最小二乗SPH法**を開発
- 2 ベンチマークテストにより**最小二乗SPH法**の妥当性を検証



Cavity flow
定常解



Taylor-Green vortex
非定常解



Oscillating drop
非定常解

従来SPH



×

×

LS-SPH

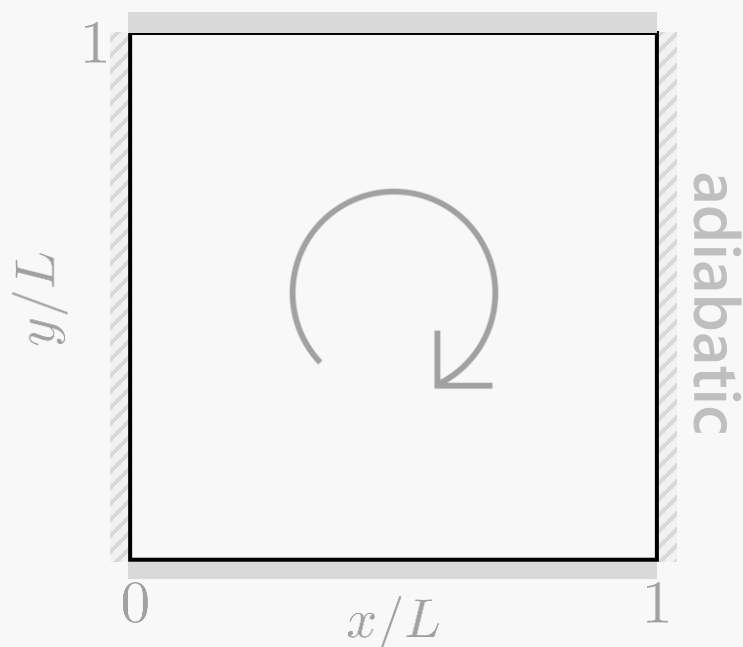


背景 > 精度向上 > 検証①②③ > 高速化 > 線形解析 > 検証 > まとめと今後

【はじめの第一歩】1相のブシネスク対流をSPH法(粒子法)で実装する

ブシネスク系を対象

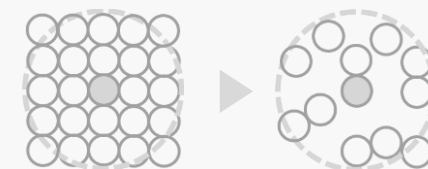
Blankenbach et al. (1989)



数値計算上の課題

- 1 従来のSPH法は精度が低い

精度悪化



【原因】粒子配置の対称性などを仮定

【本研究】高精度SPH法を開発・実装

- 2 粒子法は陰解法に不向き

位置情報 未知量

$$Ax = b$$

【原因】相互作用する相手が毎ステップ変化

【本研究】陽解法化 + 時間刻み制約を緩和

背景 > 精度向上 > 検証①②③ > 高速化 > 線形解析 > 検証 > まとめと今後

1 質量保存の式

$$\cancel{\frac{d\rho}{dt}} = -\rho \nabla \cdot \mathbf{u} \quad \rightarrow \quad 0 = \nabla \cdot \mathbf{u}$$

非圧縮性近似

2 運動量保存の式

$$\cancel{\rho \frac{d\mathbf{u}}{dt}} = -\nabla p + \eta \nabla^2 \mathbf{u} - \rho \mathbf{g} \quad \rightarrow \quad 0 = -\frac{1}{\rho_0} p' + \nu \nabla^2 \mathbf{u} + \boxed{\alpha T' \mathbf{g}}$$

慣性ゼロ近似

3 エネルギー保存の式

粘性散逸と断熱圧縮なし

$$\frac{dT}{dt} = \kappa \nabla^2 T$$

浮力は温度に依存
(ブシネスク近似)

4 状態方程式

$$\rho' = \frac{1}{c_0^2} p' - \rho_0 \alpha T'$$

【陰解法】 巨大な連立方程式 $Ax = b$

毎ステップ更新 → 計算コスト大

数値的安定性条件(陽解法) ^{制約} ▶ マントル対流の時間スケール $\sim O(10^{15})$ [s] まで解けない

$$\cancel{\Delta t_{\text{CFL}}} < \frac{\Delta x}{c_0} \sim O(1) \text{ [s]} \quad \cancel{\Delta t_{\text{vis}}} < \frac{(\Delta x)^2}{\nu} \sim O(10^{-12}) \text{ [s]}$$

$$\Delta t_{\text{th}} < \frac{(\Delta x)^2}{\kappa} \sim O(10^{13}) \text{ [s]}$$

熱対流最も短い時間刻み幅で計算を進めないと数値的不安定が生じる
熱対流の時間スケールと同程度

背景 > 精度向上 > 検証①②③ > 高速化 > 線形解析 > 検証 > まとめと今後

陽解法化するために、**音速低減法** + **慣性変化法**を適用

Hotta et al. (2012) Takeyama et al. (2017)

【陽解法】 ← 音速低減 + 慣性変化 ● 非圧縮 + 慣性ゼロ → 【陰解法】

$$\zeta^2 \frac{d\rho}{dt} = -\rho_0 \nabla \cdot \mathbf{u}$$

$$\xi^2 \frac{d\mathbf{u}}{dt} = -\frac{1}{\rho_0} p' + \nu \nabla^2 \mathbf{u} + \alpha T' \mathbf{g}$$

$$\frac{dT}{dt} = \kappa \nabla^2 T$$

$$p' = c_0^2 \rho'$$

$$\cancel{\frac{d\rho}{dt}} = -\rho \nabla \cdot \mathbf{u}$$

$$\cancel{\rho} \frac{d\mathbf{u}}{dt} = -\nabla p + \eta \nabla^2 \mathbf{u} - \rho \mathbf{g}$$

$$\frac{dT}{dt} = \kappa \nabla^2 T$$

$$\rho' = \frac{1}{c_0^2} p' - \rho_0 \alpha T'$$

$$0 = \nabla \cdot \mathbf{u}$$

$$0 = -\frac{1}{\rho_0} p' + \nu \nabla^2 \mathbf{u} + \alpha T' \mathbf{g}$$

$$\frac{dT}{dt} = \kappa \nabla^2 T$$

緩和パラメータ ζ, ξ を大きく取る → 時間刻み幅が増大

$$\Delta t_{\text{CFL}} < \zeta \xi \frac{\Delta x}{c_0}$$

$$\Delta t_{\text{vis}} < \xi^2 \frac{(\Delta x)^2}{\nu}$$

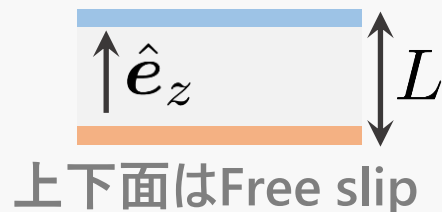
$$\Delta t_{\text{th}} < \frac{(\Delta x)^2}{\kappa} \sim O(10^{13}) \text{ [s]}$$

背景 > 精度向上 > 検証①②③ > 高速化 > 線形解析 > 検証 > まとめと今後

緩和パラメータ ζ, ξ は線形安定性解析から理論的に制約 Kawada (2020) JpGU

① 問題設定

Chandrasekhar (1961)



② 基礎方程式を無次元化 → 線形化

基準状態は「静止解 + 熱伝導解」

$$\zeta^2 M_{th}^2 Pr \frac{\partial p}{\partial t} = -\nabla \cdot \mathbf{u}$$

$$\xi^2 \frac{\partial \mathbf{u}}{Pr \partial t} = -\nabla p + \nabla^2 \mathbf{u} + T \hat{e}_z$$

$$\frac{\partial T}{\partial t} = \nabla^2 T + Ra(\mathbf{u} \cdot \hat{e}_z)$$

無次元パラメータ

$$M_{th} = \frac{\kappa/L}{c_0} \quad Pr = \frac{\nu}{\kappa} \quad Ra = \frac{\alpha \Delta T g L^3}{\kappa \nu}$$

③ exp型の解を与える

$$(p, \mathbf{u}, T) \propto \exp \{i(k_x x + k_y y) + \sigma t\}$$

σ の実部が正の場合に不安定

④ 境界条件を考慮して変形 → 固有値問題 に帰着

$$A \begin{pmatrix} p \\ D \\ w \\ T \end{pmatrix} = \sigma \begin{pmatrix} p \\ D \\ w \\ T \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{u} = (u, v, w) \quad D = i(uk_x + vk_y)$$

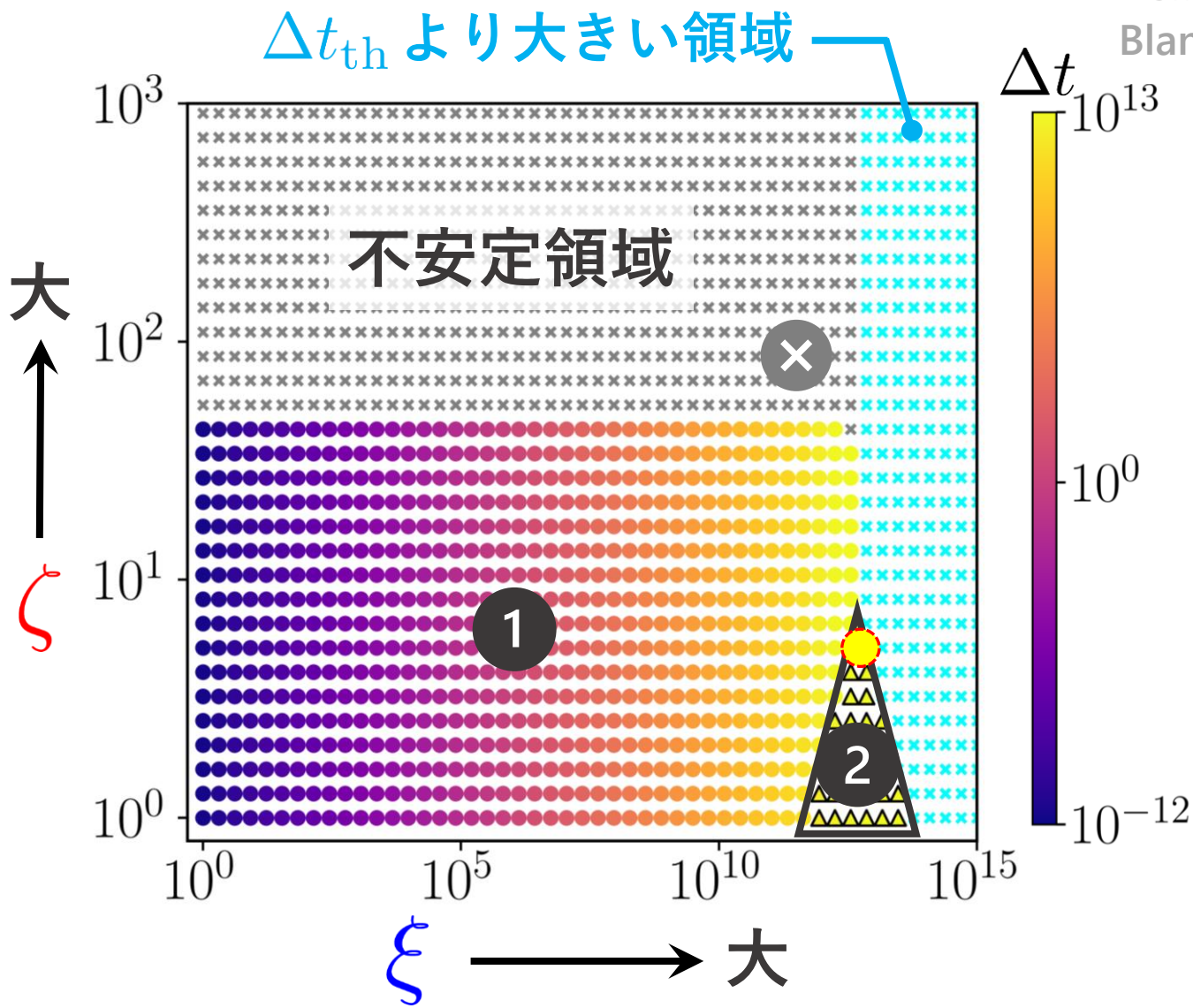
⑤ パラメータ $M_{th}, Pr, Ra, k_x, k_y, \zeta, \xi$

を与えた時に,

対流モードが邪魔されない ζ, ξ を選ぶ

背景 > 精度向上 > 検証①②③ > 高速化 > 線形解析 > 検証 > まとめと今後

$Ra = 10^4$, $Pr = 2.5 \times 10^{25}$, $M_{th} = 1.2 \times 10^{-16}$
 Blankenbach et al. (1989) Dziewonski and Anderson (1981)



1 粘性拡散が律速

$$\Delta t_{vis} < \xi^2 \frac{(\Delta x)^2}{\nu}$$

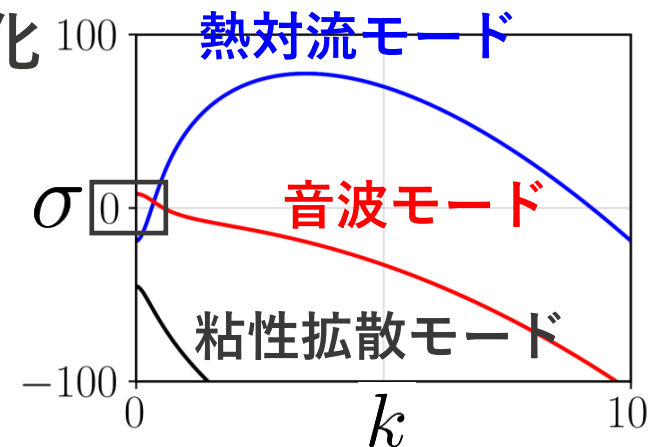
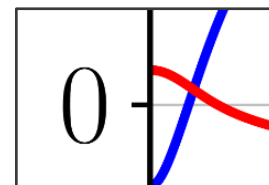
2 音速が律速

$$\Delta t_{CFL} < \xi \frac{\Delta x}{c_0}$$

$$\Delta t_{CFL} \sim \Delta t_{th}$$

熱拡散時間と同程度まで増大可能

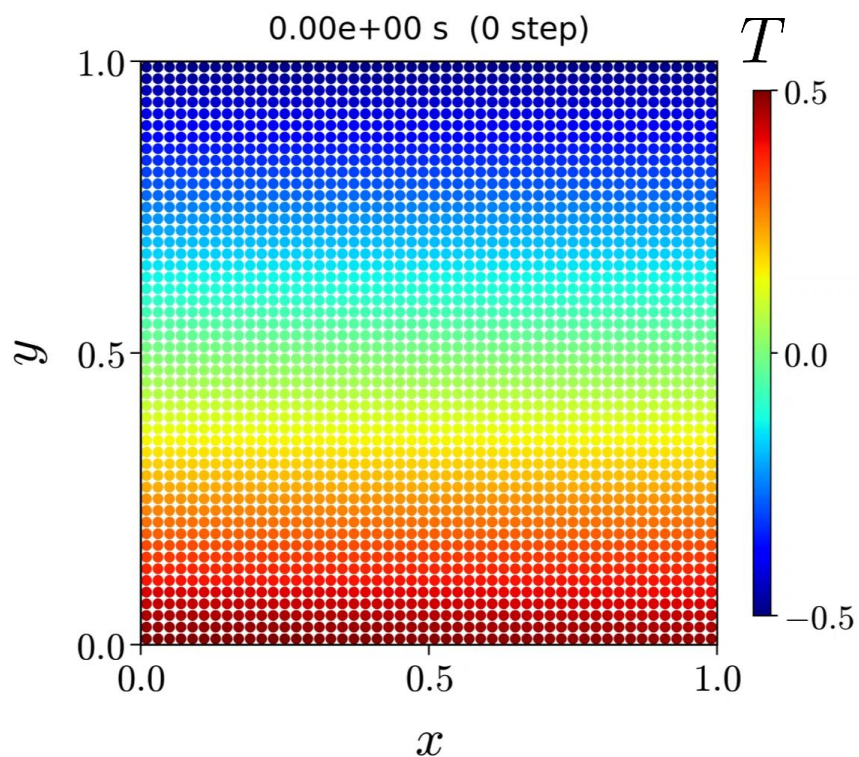
× 音波が不安定化



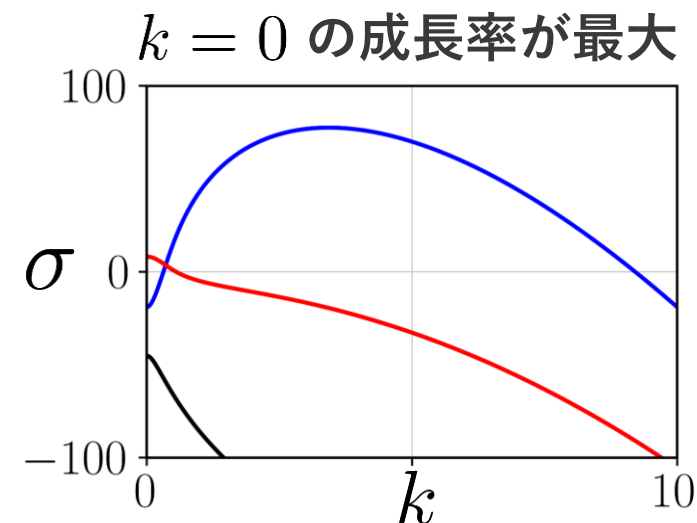
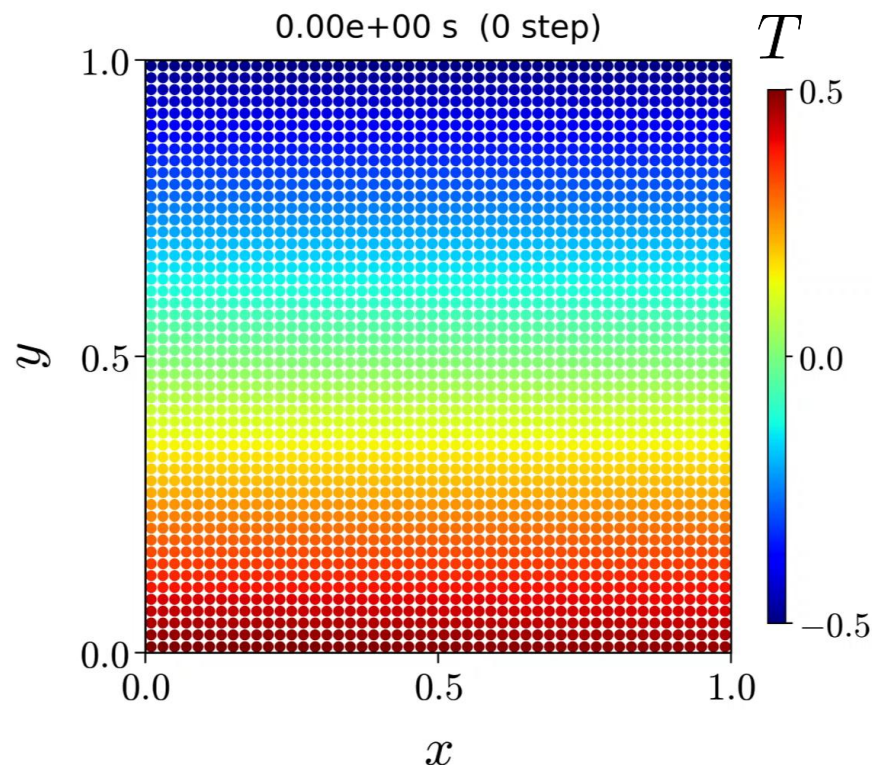
背景 > 精度向上 > 検証①②③ > 高速化 > 線形解析 > 検証 > まとめと今後

$$Ra = 10^4, Pr = 2.5 \times 10^{25}, M_{th} = 1.2 \times 10^{-16}$$

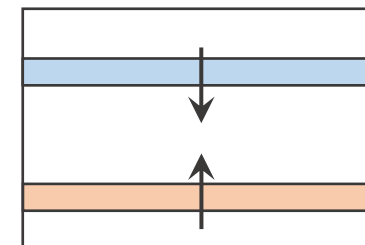
安定領域 ($\Delta t_{CFL} \sim \Delta t_{th}$)



不安定領域



水平方向に一樣なモード
の振幅が速く成長する

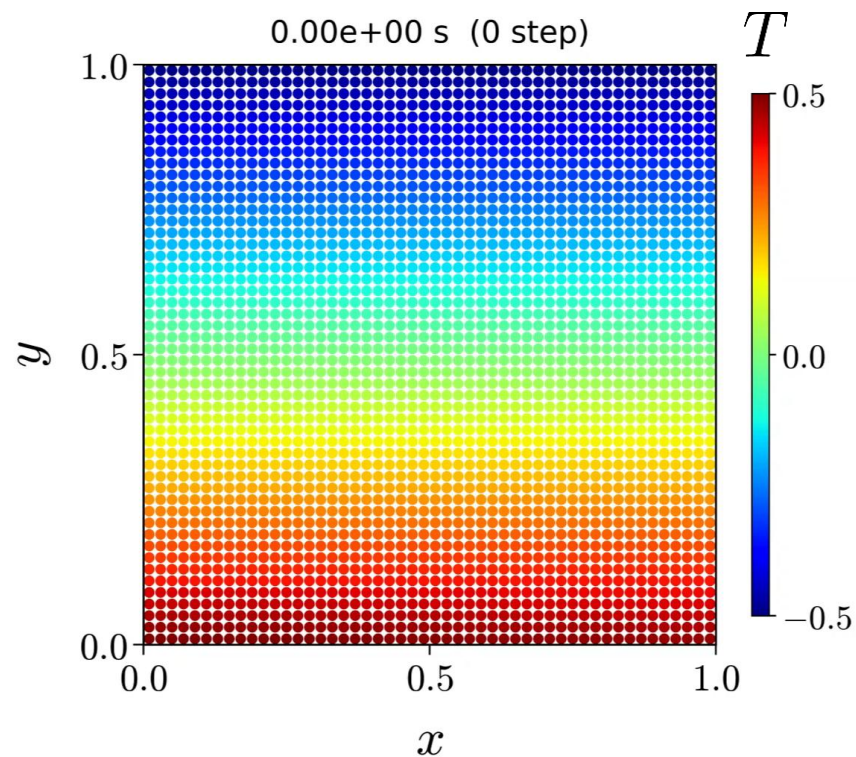


ζ, ξ の上限は線形論で制約可能

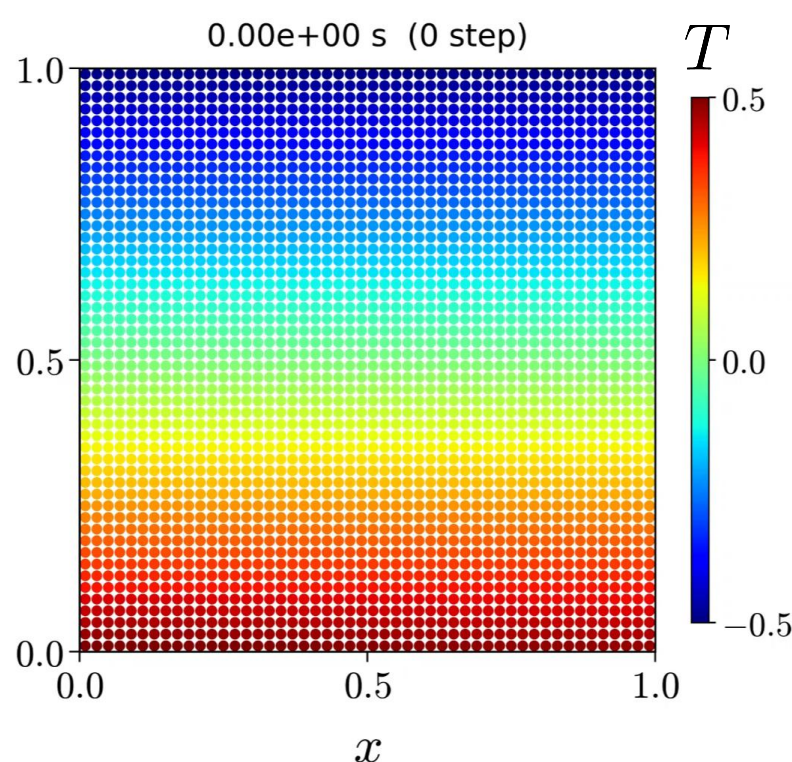
背景 > 精度向上 > 検証①②③ > 高速化 > 線形解析 > 検証 > まとめと今後

$$Ra = 10^4, Pr = 2.5 \times 10^{25}, M_{th} = 1.2 \times 10^{-16}$$

従来SPH



LS-SPH



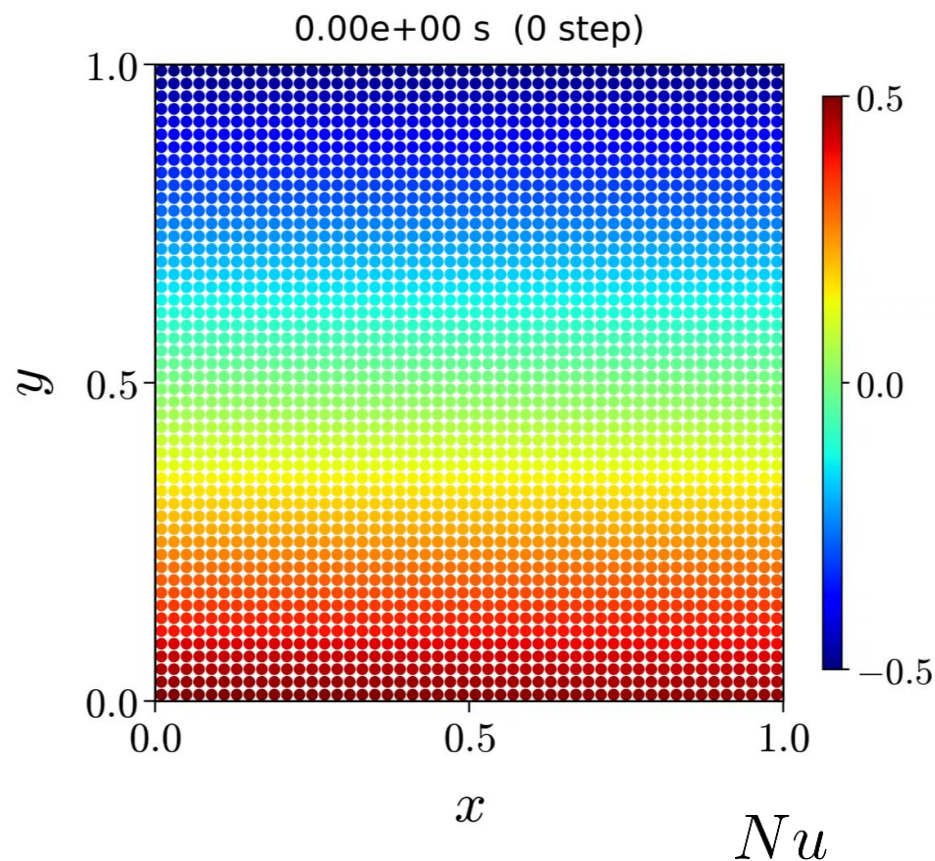
定量的な比較

$$Nu = - \frac{\int_0^L \frac{\partial T}{\partial y} \Big|_{y=0,L} dx}{\Delta T / L}$$

$N = 50 \times 50$	Nu
LS-SPH	4.8374
従来SPH	5.8573
Blankenbach et al. (1989)	4.8844

従来SPHは**相対誤差20%** / LS-SPHは**相対誤差1%**

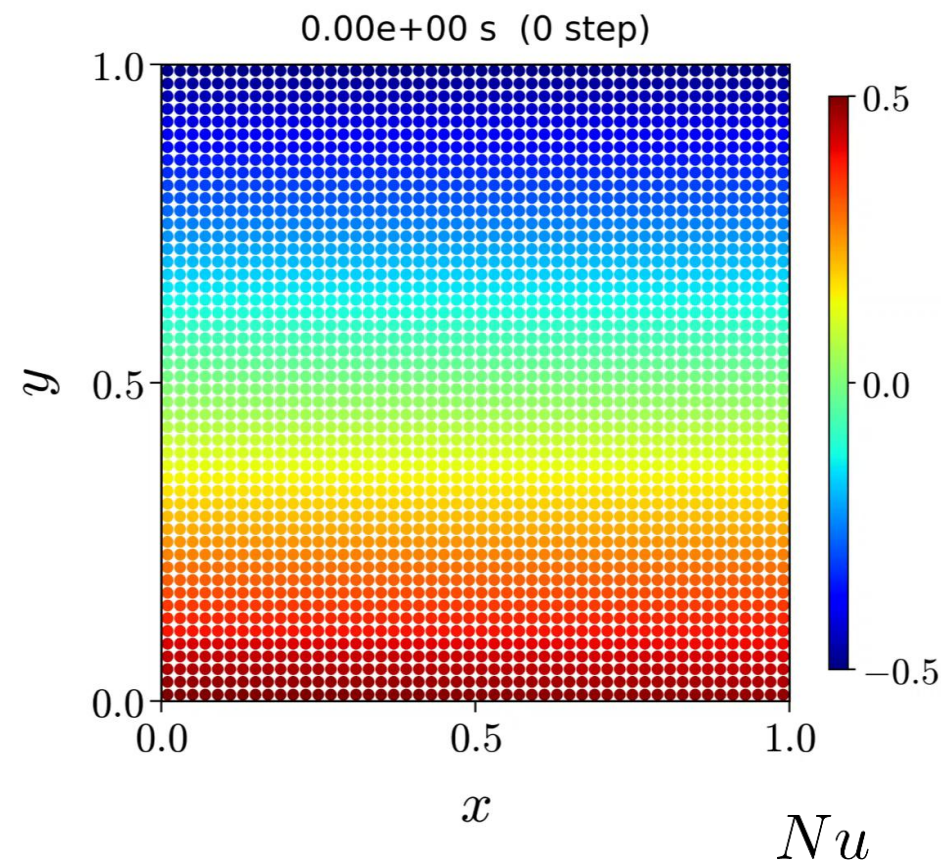
$$Ra = 10^5, Pr = 2.5 \times 10^{24}$$



LS-SPH 10.479

Blankenbach et al. (1989) 10.534

$$Ra = 10^6, Pr = 2.5 \times 10^{23}$$



LS-SPH 21.073

Blankenbach et al. (1989) 21.972

まとめ

- 1 従来のSPH法は精度が低い ▶ 高精度な**最小二乗SPH法**を実装
- 2 音速低減法と慣性変化法のハイブリッドにより**陽解法**の**高速化**
- 3 緩和パラメータの上限を**線形論**から制約 ▶ 数値的検証

今後の研究

境界条件（固定壁境界/自由表面）の取り扱いを高精度化

