将来的な高解像度大気シミュレーションを念頭においた不連続ガラーキン法に基づく大気力学コアの開発

河合 佑太, 富田浩文

理化学研究所 計算科学研究センター

複合系気候科学研究チーム

本研究は, JSPS 科研費 JP20H05731, JPMJMS2286, JPMJSA2109, FOCUS の助成を受けたものです.

CPS セミナー@神戸大 CPS (2024 年 9 月 2 日)

目次

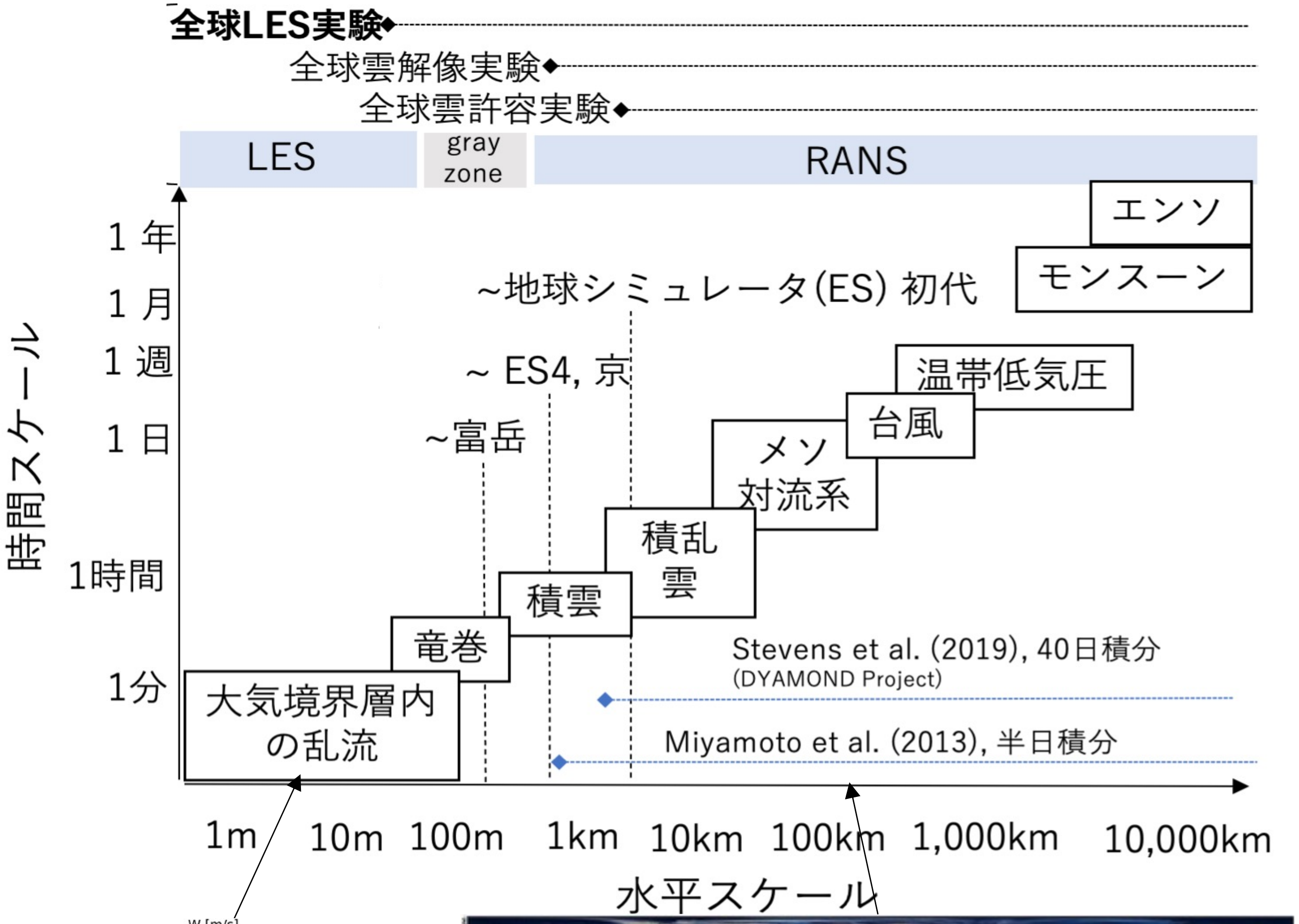
- 自己紹介
- 研究背景
- 大気 LES で必要とされる力学スキームの離散精度の検証 (Kawai & Tomita, 2021)
- 不連続ガラーキン法(DGM)の大気計算への適用可能性の研究, DGM に基づく大気力学コアの開発
  - Kawai & Tomita (2021) の DGM の枠組みへの拡張 (Kawai & Tomita, 2023)
  - DG に基づく全球力学コアへの乱流モデルの導入
- 今後の展開
- まとめ

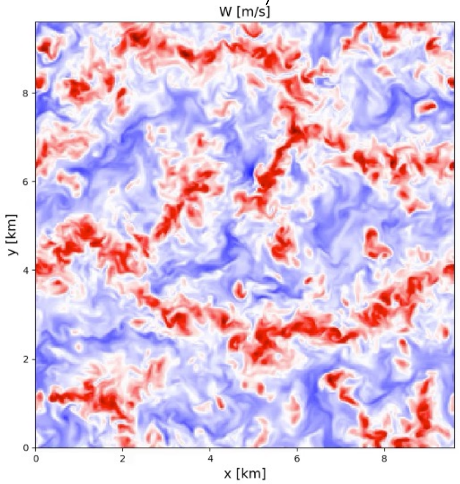
大気 LES で必要とされる力学スキームの離散精度の検証

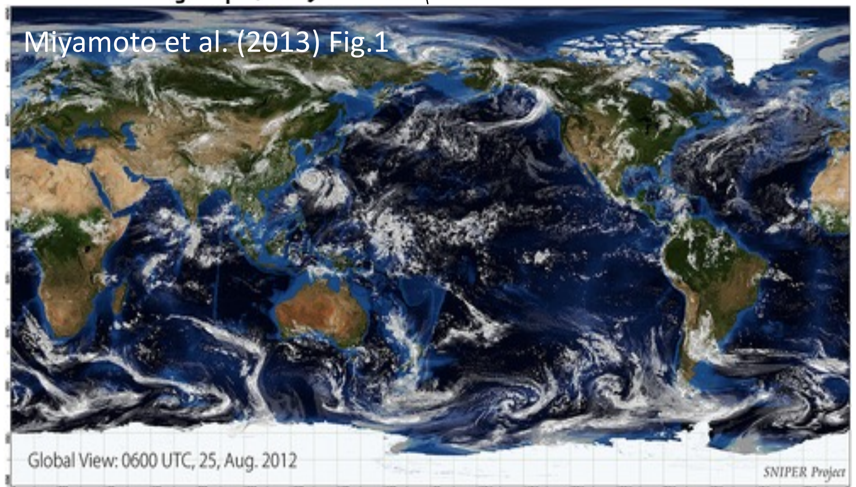
研究の背景 (1/2)

- 全球大気モデルの高解像度化が進み, 雲微物理スキームを用いることで, 雲を陽に取り扱う計算が可能になってきた (Miyamoto et al., 2013; Stevens et al., 2019).
- 将来的に, 全球計算でも水平解像度は O(10-100 m)に達すると考えられる (e.g., Satoh et al., 2019).
    - 境界層内のスケールの大きな渦を解像
    - RANS では, 乱流の効果を二重カウントする「グレーゾーン問題」に直面する (Wyngaard, 2004).
        - 解像できないスケールの小さな渦の効果だけ, パラメタリゼーションする必要がある.

      -> Large-Eddy Simulation (LES)







研究の背景 (2/2)

- 全球規模での LES に向けた問題点
  - 最先端の全球非静力学大気モデルの流体コンポーネント(力学コア)では, 低次精度スキームが広く適用されている (Tomita and Satoh, 2004; Skamarock et al., 2012 等).
  - 低次精度スキームの数値誤差が, 乱流モデルによる乱流混合の効果を卓越する可能性がある.
  - この懸念は数値流体力学の分野では歴史的に議論されてきた(Rogallo and Moin, 1984; Verman et al., 1994: Ghosal, 1996 等) .
    - 気象計算で典型的な状況では検証されていない.

空間フィルタを適用した支配方程式系

resolved 項

Sub-grid scale (SGS) 項

$$\boxed{\frac{\partial \bar{\rho}}{\partial t} + \frac{\partial \tilde{u}_j \bar{\rho}}{\partial x_j}} = 0,$$

$$\boxed{\frac{\partial \bar{\rho}\tilde{u}_i}{\partial t} + \frac{\partial \tilde{u}_i \bar{\rho} \tilde{u}_j}{\partial x_j} = -\frac{\partial \bar{p}}{\partial x_i} - g\bar{\rho}\delta_{i3}} - \boxed{\frac{\partial \bar{\rho}\tau_{ij}}{\partial x_j}},$$

$$\boxed{\frac{\partial \bar{\rho}\tilde{\theta}}{\partial t} + \frac{\partial \tilde{u}_j \bar{\rho}\tilde{\theta}}{\partial x_j}} = Q - \boxed{\frac{\partial \bar{\rho}\tau_j^{*}}{\partial x_j}}$$

Smagorinsky-Lilly 型の乱流パラメタリゼーション

$$\tau_{ij} = -2\nu_{\mathrm{sgs}}\left(S_{ij} - \frac{1}{3}S_{kk}\delta_{ij}\right) + \frac{2}{3}K_{\mathrm{sgs}}\delta_{ij}$$

ここで,

$$S_{ij} = (\partial \tilde{u}_i/\partial x_j + \partial \tilde{u}_j/\partial x_i)/2,$$

$$\nu_{\mathrm{sgs}} = (C_s \Delta_{\mathrm{sgs}})^2 |S| f(R_i)$$

空間離散化・時間離散化を適用すると, 数値誤差が加わる.

- この数値誤差項が SGS 項を卓越するか?
- 有効解像度で SGS 項に物理的な意味を持たせるには何次精度の流体スキームが必要か?

Kawai and Tomita (2021; *Monthly Weather Review*)

Numerical Accuracy of Advection Scheme Necessary for Large-Eddy Simulation of Planetary Boundary Layer Turbulence

- 従来的な大気力学コアで典型的に用いられる格子点法の枠組みで, 大気 LES において移流スキームに要求される離散精度を検討した.
- 線形移流方程式の修正方程式に基づいて, 数値粘性項・数値分散項に伴う時定数を計算し, 乱流スキームの渦粘性項と比較することで, 数値的な指標を定式化した.

$$R_{\mathrm{diff}} \equiv \frac{T_{\mathrm{e,SGS}}}{T_{\mathrm{e,num}}} = \frac{1}{2^2}\left(\frac{\pi}{l}\right)^{2(n-1)}\left(\frac{\gamma_{2n}}{\Delta t}\right)\left(\frac{\Delta x}{C_s \Delta_{\mathrm{SGS}}}\right)^2 \left(|S|\,\beta_e(l,n)\right)^{-1}.$$

$$R_{\mathrm{disp}} \equiv \frac{|S_{p,\mathrm{num}}|}{|S_{p,\mathrm{sgs}}|} = 2^{2n}\left(\frac{\pi}{l}\right)^{2n}\frac{|U\tilde{a}_{\mathrm{num},2n+1}|}{(C_s\Delta_{\mathrm{sgs}})^2|\partial|S|/\partial x|}\,\tilde{\beta}(l,n).$$

$$\frac{\partial f}{\partial t} + \frac{\partial U f}{\partial x} = 0$$

空間離散化に伴う誤差項の例

1st-order upwind	$-\frac{f_{x(2)}\Delta x}{2} + \frac{f_{x(3)}\Delta x^2}{6} - \frac{f_{x(4)}\Delta x^3}{24} + \frac{f_{x(5)}\Delta x^4}{120} \cdots$
2nd-order central	$+\frac{f_{x(3)}\Delta x^2}{6} + \frac{f_{x(5)}\Delta x^4}{120} + \frac{f_{x(7)}\Delta x^6}{5040} + \frac{f_{x(9)}\Delta x^8}{362880} \cdots$
3rd-order upwind	$+\frac{f_{x(4)}\Delta x^3}{12} - \frac{f_{x(5)}\Delta x^4}{30} + \frac{f_{x(6)}\Delta x^5}{72} - \frac{f_{x(7)}\Delta x^6}{252} \cdots$
4th-order central	$-\frac{f_{x(5)}\Delta x^4}{30} - \frac{f_{x(7)}\Delta x^6}{252} - \frac{f_{x(9)}\Delta x^8}{4320} - \frac{17 f_{x(11)}\Delta x^{10}}{1995840} \cdots$

SGS 項に物理的意味を持たせるには,

これらの指標の値が 1 より十分小さい必要がある.

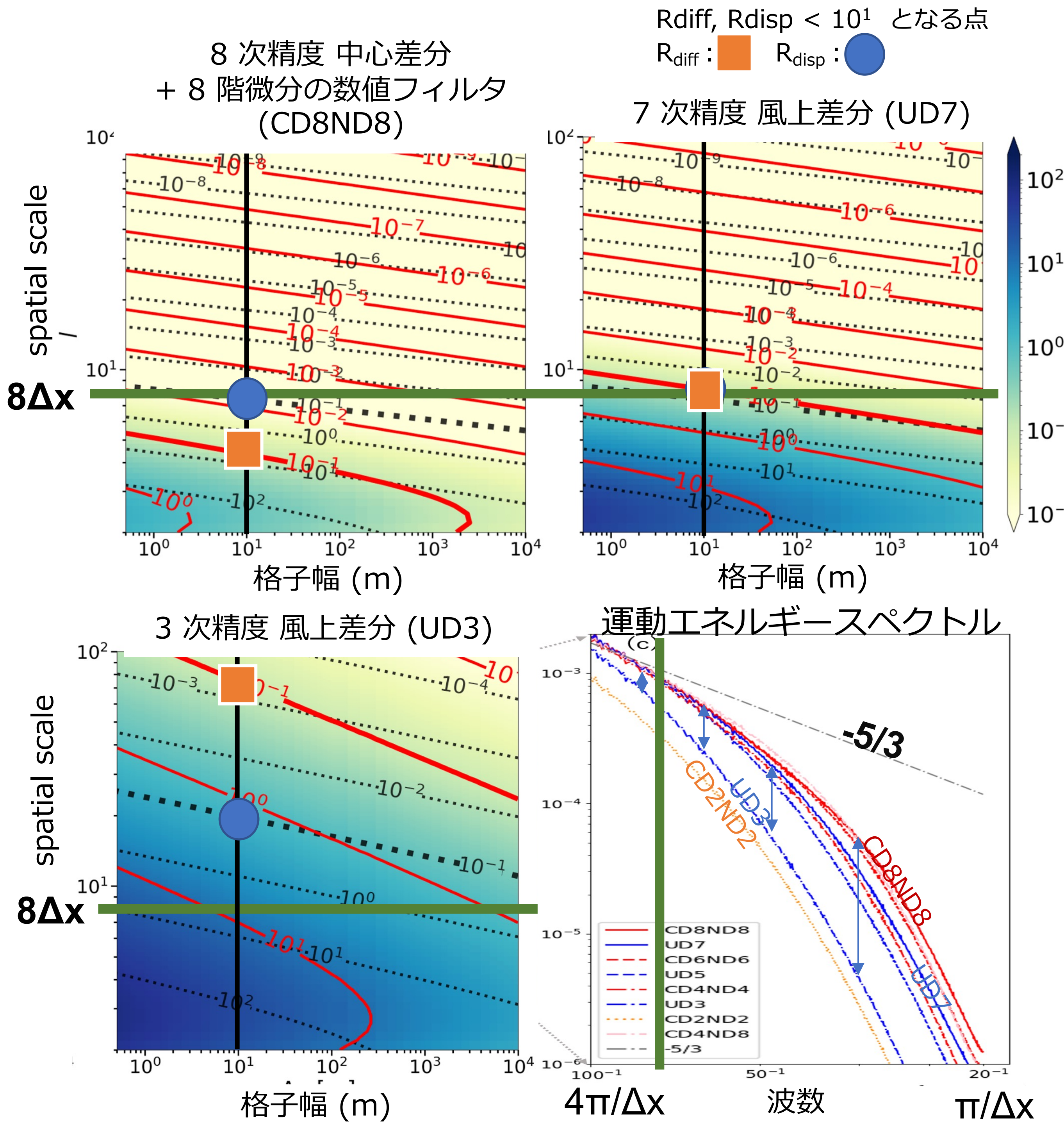
- O(10 m) の格子幅において, 8 格子より長波長に対して R_{diff}, R_{disp} < 10^{-1}を満たす移流スキームの精度を調べる.

Kawai and Tomita (2021, MWR)

- 各精度の移流スキームに対して, R_{diff}, R_{disp} の格子幅・波長依存性を調べた (右図).
  - O(10 m) の格子幅において, 移流項に対して 7, 8 次の離散精度が必要であることが示唆された.

この示唆によれば, 従来的な低次精度の力学コアを大幅に高精度化することが重要である.

- 格子点法の枠組みでの高精度化の問題点
  - ステンシル拡大によってデータ局所性が損なわれて, 計算効率が下がる.
  - 高次精度の有限体積法では定式化が複雑になる.



不連続ガラーキン法(DGM)の

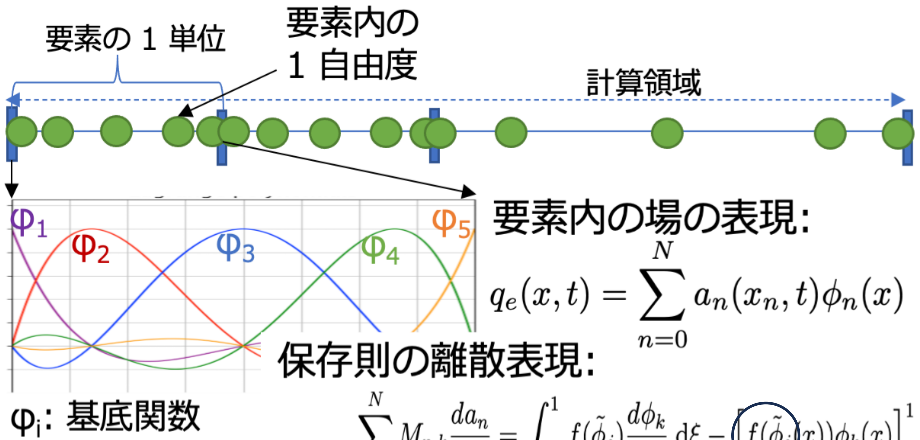
大気計算への適用可能性の研究,

DGM に基づく大気力学コアの開発

将来的な高解像度大気計算で有望な空間離散化手法の検討

- 大気力学コアの高精度化の手法として, 不連続ガラーキン法 (DGM) に注目している.
  - 従来の格子点法と比較したDGM の利点
    - 高精度化の方法が単純
    - 計算の局所性が高い
- 大気力学コアに DGM を適用し研究は増えつつある.
  - 一方で, 計算効率とのバランス, 高次の力学過程と物理過程結合の可能性等の課題がある.

模式図: DGM は, いわば「局所」スペクトル法



要素内の場の表現:

$$q_e(x,t) = \sum_{n=0}^{N} a_n(x_n,t)\phi_n(x)$$

保存則の離散表現:

$$\sum^{N} M_{n,k}\frac{da_n}{dt} = \int_{-1}^{1} f(\tilde{\phi}_j)\frac{d\phi_k}{d\xi}\,d\xi - \left[f(\tilde{\phi}_j(x))\phi_k(x)\right]_{-1}^{1}$$

$$\hat{f}(u_r,u_l) = \frac{1}{2}\left[f(u_r)+f(u_l)-\alpha(u_r-u_l)\right]$$

- 要素境界で場の連続性を課さない.
  - そこでのフラックスは近似リーマンソルバによって計算

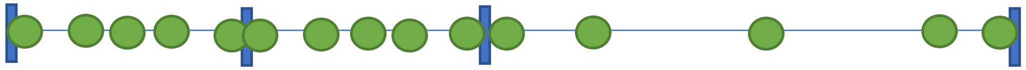
- 我々は DGM の数値特性の基礎的な理解を深めながら, DGM による大気力学コアの構築を進めた.
  - DGM の枠組みにおいて, 大気 LES で必要とされる離散精度を理論的に調査

    Kawai and Tomita (2023; *Monthly Weather Review*):
    Necessary for Large-Eddy Simulation of Planetary Boundary Layer Turbulence using Discontinuous Galerkin Method
  - DGM を用いた流体計算ライブラリ, それを活用した領域・全球大気力学コア開発

    FE-Project (https://ywkawai.github.io/FE-Project_web/)

不連続ガラーキン法の空間離散化の例

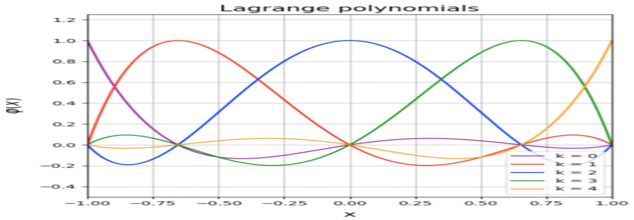
- 1次元スカラー保存則を考える $$\frac{\partial q}{\partial t} + \frac{\partial (uq)}{\partial x} = 0,$$



- 計算領域を分割し, 各要素内の変数の分布を, 有限個の展開関数の和として表現する

$$q(\xi, t)|_{\Omega_e} \simeq q^e(\xi, t) = \sum_{j=0}^{p} q_j^e(t) l_j(\xi),$$

- nodal 表現の場合
  - l_j はラグランジュ多項式, 補間点としては LGL node がしばしば用いられる.



(b) ノーダル基底

- 支配方程式の左辺(残差)の L_2 ノルムを, 自由度の時間変化率に対して最小化することを, 各要素ごとで要求する.

$$\frac{h_e}{2}\int_{-1}^{1}\left[\frac{\partial q^e}{\partial t} + \frac{\partial (uq^e)}{\partial x}\right] l_i \, d\xi = 0, \quad i = 0, \ldots, p.$$

- 左辺 2 項目を部分積分する(弱形式).

$$\frac{h_e}{2}\frac{\partial}{\partial t}\int_{-1}^{1} q^e l_i d\xi - \boxed{\int_{-1}^{1} (uq^e)\frac{dl_i}{d\xi} d\xi} + \boxed{[\widehat{uq}\ \ l_i]_{-1}^{1}} = 0.$$

$$\hat{f}(q_l, q_r) = \frac{1}{2}\left[(uq)_l + (uq)_r - |u|(q_r - q_l)\right]$$

要素境界のフラックスは, 数値流速により評価する.

- もう一度部分積分を実行して, 強形式に書き換える場合もある.
- 少し変形すると..

$$\frac{h_e}{2}\sum_{j=0}^{p}\frac{\partial q_j^e}{\partial t}\int_{-1}^{1} l_i l_j d\xi + u\sum_{j=0}^{p} q_j^e \int_{-1}^{1} l_i \frac{dl_j}{d\xi} d\xi + u[(\hat{q} - q^e) l_i]_{-1}^{1} = 0.$$

- 行列表現

$$\frac{h_e}{2}\mathbf{M}\frac{\partial \mathbf{q}^e}{\partial t} + u\mathbf{S}^{\mathrm{T}}\mathbf{q}^e + u\mathbf{B}(\hat{\mathbf{q}} - \mathbf{q}^e) = 0,$$

ここで,

$$M_{i,j} = \int_{-1}^{1} l_i l_j d\xi,$$

$$S_{i,j} = \int_{-1}^{1} (l_j dl_i/d\xi)\, d\xi,$$

$$\mathbf{B} = \mathrm{diag}(-1, 0, \ldots, 0, 1).$$

<- 流体計算ライブラリとしては, この行列の構築, 効率的な行列-ベクトル積演算に注力すれば良い

Kawai & Tomita (2023, MWR): DGM の枠組みにおける数値指標の定式化 (1/2)

- Kawai & Tomita (2021) のような修正方程式に基づく定式化を, DGM に適用するのは現実的に難しい.
  - p>1 に対する修正方程式を導出する場合, 代数的な操作が複雑になり過ぎる.

- そのため, DGM の基礎的な数値特性を調べた先行研究 (e.g., Moura et al., 2015; Alhawwary and Wang, 2018) に倣って, フーリエ固有値解析を適用する.

$$\frac{\partial f}{\partial t} + \frac{\partial U f}{\partial x} = 0$$

	一階微分に対する差分スキーム
1st-order upwind	$(f_i - f_{i-1})/\Delta x$
2nd-order central	$(f_{i+1} - f_{i-1})/(2\Delta x)$
3rd-order upwind	$(2f_{i+1} + 3f_i - 6f_{i-1} + f_{i-2})/(6\Delta x)$
4th-order central	$(-f_{i+1} + 8f_i - 8f_{i-1} + f_{i-2})/(12\Delta x)$

対応する修正方程式中に現れる数値誤差項

1st-order upwind	$-\frac{f_{x(2)}\Delta x}{2} + \frac{f_{x(3)}\Delta x^2}{6} - \frac{f_{x(4)}\Delta x^3}{24} + \frac{f_{x(5)}\Delta x^4}{120} \cdots$
2nd-order central	$+\frac{f_{x(3)}\Delta x^2}{6} + \frac{f_{x(5)}\Delta x^4}{120} + \frac{f_{x(7)}\Delta x^6}{5040} + \frac{f_{x(9)}\Delta x^8}{362880} \cdots$
3rd-order upwind	$+\frac{f_{x(4)}\Delta x^3}{12} - \frac{f_{x(5)}\Delta x^4}{30} + \frac{f_{x(6)}\Delta x^5}{72} - \frac{f_{x(7)}\Delta x^6}{252} \cdots$
4th-order central	$-\frac{f_{x(5)}\Delta x^4}{30} - \frac{f_{x(7)}\Delta x^6}{252} - \frac{f_{x(9)}\Delta x^8}{4320} - \frac{17 f_{x(11)}\Delta x^{10}}{1995840} \cdots$

DGM の場合, このような数値誤差項の表現を導くことが難しい.

Kawai & Tomita (2023, MWR): DGM の枠組みにおける数値指標の定式化 (2/2)

- 修正方程式に基づく定式化を, DGM に適用するのは現実的に難しい.
  - そのため, DGM の基礎的な数値特性を調べた先行研究 (e.g., Moura et al., 2015; Alhawwary and Wang, 2018) に倣って, フーリエ固有値解析を適用する.

① 1 次元線形移流方程式の半離散化式

$$\frac{h_e}{2U}\frac{\partial \vec{Q}^e}{\partial t} = L\vec{Q}_L^e + C\vec{Q}^e + R\vec{Q}_R^e$$

② フーリエ固有値解析

$$q^e(x,t) = \exp\left[\hat{i}(kx - \tilde{\omega}t)\right]$$

波数 k, 数値振動数 $\tilde{\omega}$ の波型の解を仮定する

$$\left(-\hat{i}\frac{h_e}{U}\tilde{\omega}\right)\vec{\alpha} = A\vec{\alpha}$$

固有値問題を解くことで, 数値振動数が得られ,

数値解を陽に書ける.

$$q^e(\xi,t) = \sum_{i=0}^{p} Q_i^e(t) l_i(\xi) = \left[\sum_{j=0}^{p} \theta_j(\vec{\alpha})_j e^{\hat{i}(kx_e - \tilde{\omega}_j t)}\right]^T \cdot \vec{l}(\xi).$$

③ 結合モードに対する減衰時定数と位相速度

数値解の増幅率と位相速度誤差

$$G(k,t) = \left[\frac{\int_{-1}^{1} |q^e(\xi,t)|^2 \, d\xi}{\int_{-1}^{1} \left|\sum_{i=0}^{p} Q_i^{e,\mathrm{ex}}(t) l_i(\xi)\right|^2 d\xi}\right]^{\frac{1}{2}} \qquad \Delta\psi(k,t) = \left|\mathrm{angle}\left[\int_{-1}^{1} q^e(\xi,t) \times \left(\sum_{i=0}^{p} Q_i^{e,\mathrm{ex}}(t) l_i(\xi)\right)^* d\xi\right]\right| \cdot (p+1)^{-1}$$

から, KT2021 に対応する減衰時定数と位相速度を以下のように計算する.

$$T_{\mathrm{e,num}} = \frac{s\Delta t}{|\log G(K, s\Delta t)|}, \qquad S_{\mathrm{p,num}} = \frac{p+1}{s\Delta t} k^{-1} \Delta\psi(K, s\Delta t)$$

(注: 数値解は複数のモードから構成されるので,
これらの量は厳密には「みなし」量)

④ 最終的な R_{diff} と R_{disp} の形式

$$R_{\mathrm{diff}} = \frac{1}{\eta}\left(\frac{\pi}{m}\right)^{\frac{4}{3}} \frac{|U|\,(c_{r,\mathrm{DG}})^{-1}}{(2\pi C_s)^2} \left(\frac{\pi}{l}\right)^{-2} (\Delta x_{\mathrm{eff}})^{-\frac{1}{3}} \frac{|\log G(k,s,c_{r,\mathrm{DG}})|}{s(p+1)}$$

$$R_{\mathrm{disp}} = \frac{1}{\eta'}\left(\frac{\pi}{m}\right)^{\frac{1}{3}} \frac{|U|\,(c_{r,\mathrm{DG}})^{-1}}{(\pi C_s)^2} (\Delta x_{\mathrm{eff}})^{-\frac{1}{3}} \frac{\Delta\psi(k,s,c_{r,\mathrm{DG}})}{s}$$

Kawai & Tomita (2023, MWR): DGM の基礎的な数値特性 (1/2)

* これは先行研究の知見の確認

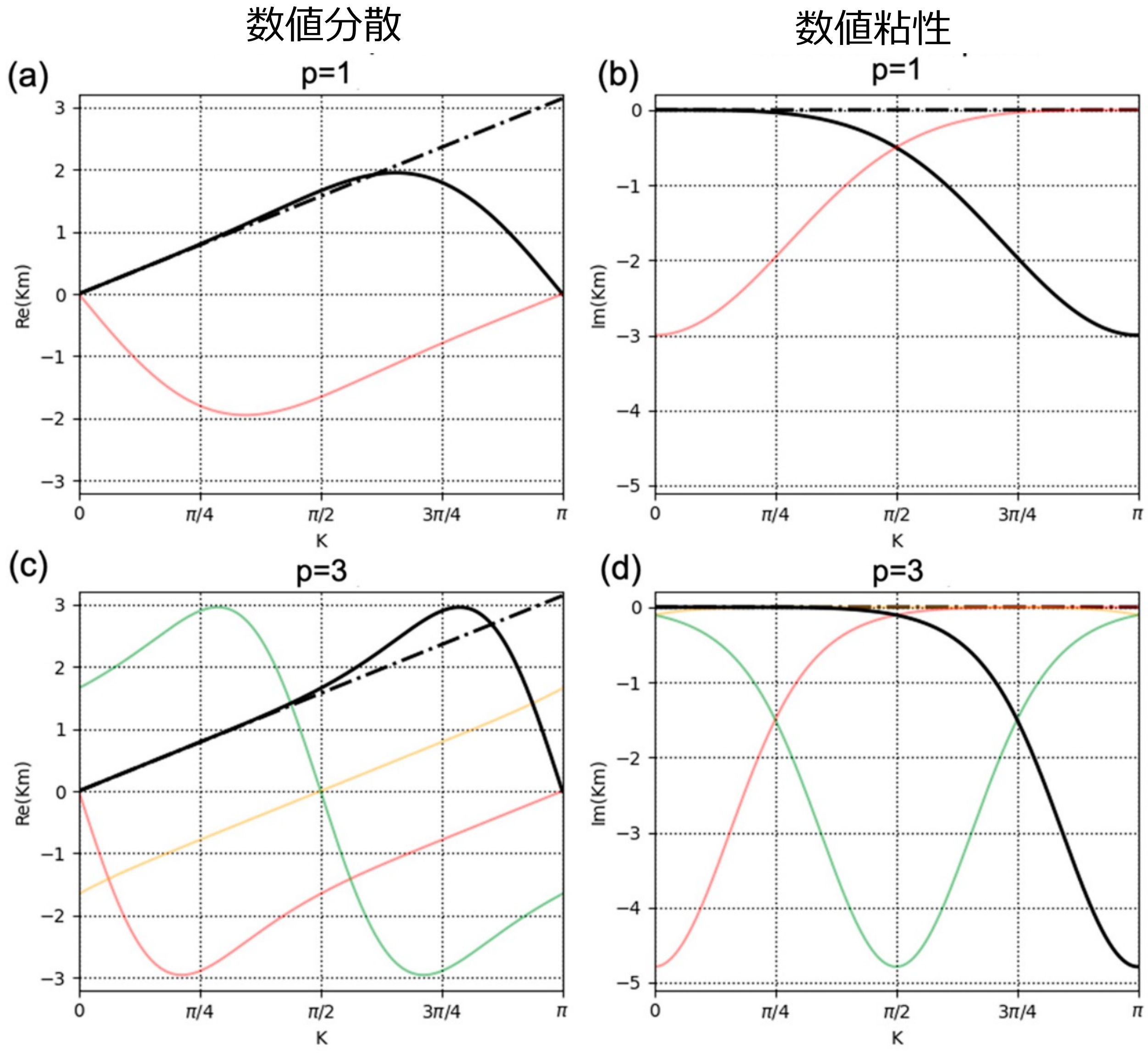


FIG. 1. (a) Numerical dispersion and (b) numerical dissipation relations for $p = 1$, and (c) numerical dispersion and (d) numerical dissipation relations for $p = 3$. In each figure, the black solid line and the colored lines represent the primary mode and the secondary modes, respectively. The black dash–dot line implies the exact case.

- 固有値問題を解くと, p+1 個のモードを得る
- 見方
  - 例えば, p=1 の黒線のモードは, およそ波数 π/4 より低波数側で厳密解の分散曲線に沿う(<- primary mode).それより高波数では離れていく.
    - π/4 より高波数域では primary mode の分散誤差は大きいが, 風上化の数値粘性により構造は減衰する.
- p が大きくなるほど, 有効解像度は高くなる.

正味の振る舞いを見るには?
=> 結合モード解析 (次のスライド)

Kawai & Tomita (2023, MWR): DGM の基礎的な数値特性 (2/2)

実線: 結合モード
点線: primary モード

* 先行研究の知見の確認

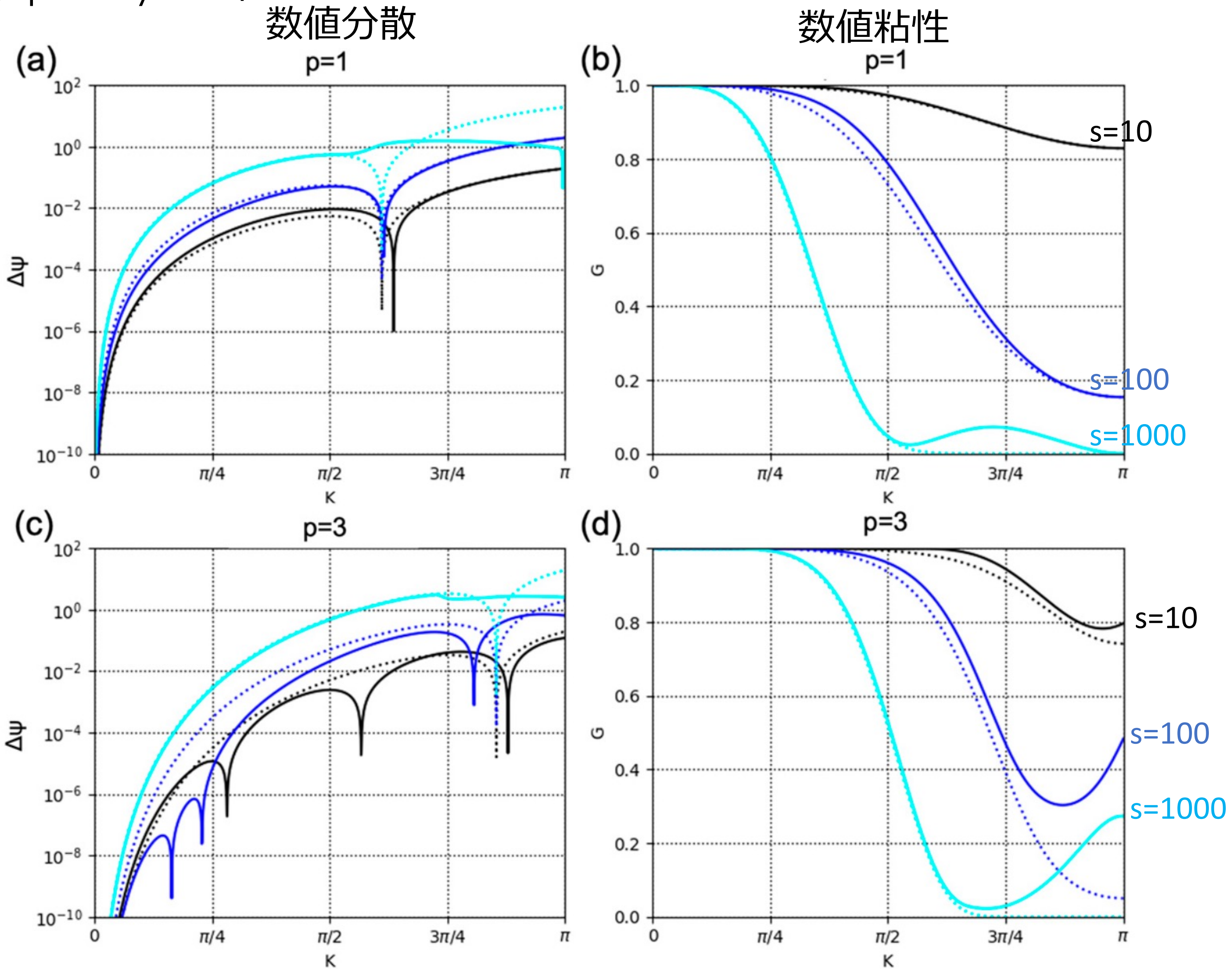
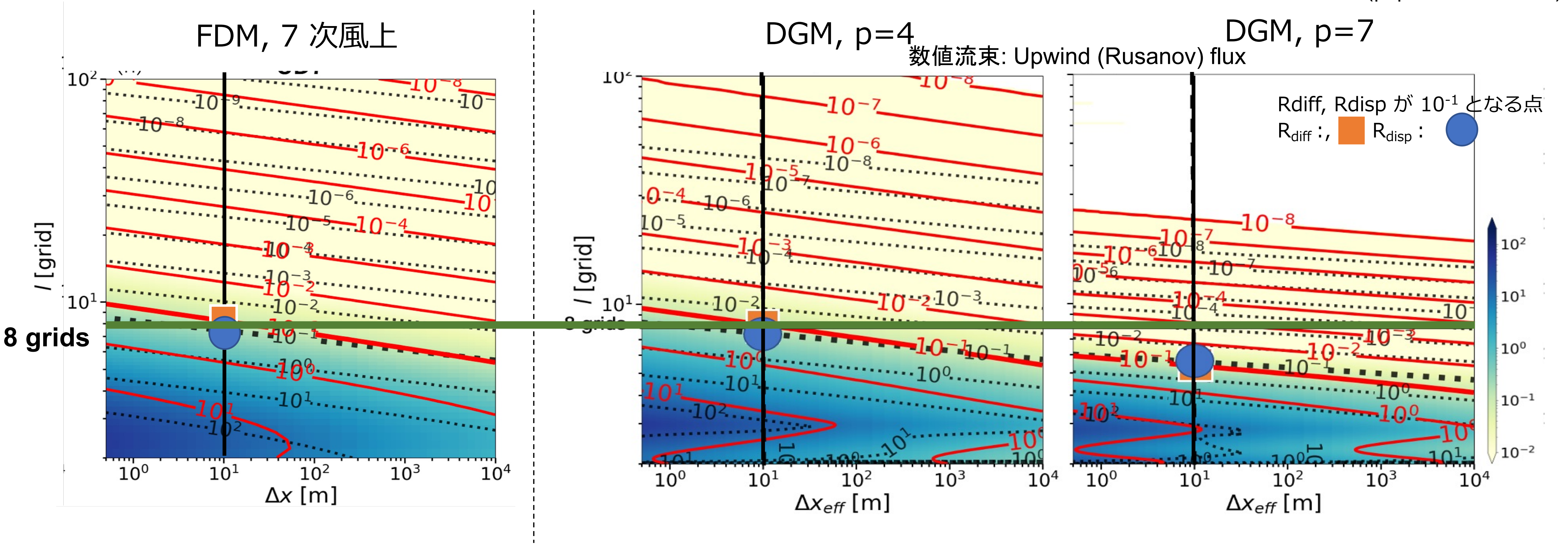


FIG. 2. (a) Dispersion error $\Delta\psi$ and (b) amplification factor G in the semidiscrete analysis for $p = 1$, and (c) dispersion error $\Delta\psi$ and (d) amplification factor G in the semidiscrete analysis for $p = 3$. In each panel, the solid and dashed lines represent the values for the combined and the primary modes, respectively. The black, blue, and cyan lines represent three different time levels $s = 10$, 100, and 1000, respectively, for the case of $u\Delta t/\Delta x_{\mathrm{eff}} = 6.25 \times 10^{-3}$.

- 波が数格子分進むぐらいに時間が経てば, 低波数域の数値誤差は, primary mode だけで特徴づけることができる.
- 高波数域(~4 格子以下)は, secondary mode の影響を考慮する必要がある.
  - secondary mode は数値誤差を減らすセンスに寄与する.
- これにより, ある波数に対する, 数値粘性や数値分散の時定数の見積もりを得る.
  - この情報を用いて, DG に対する R_{diff} , R_{disp} を計算する.

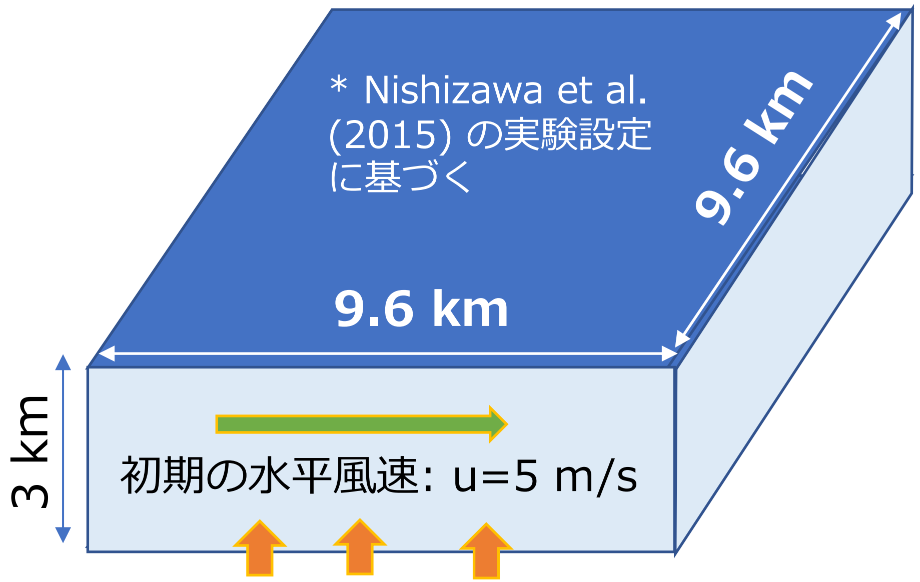
Kawai & Tomita (2023, MWR): DGM の場合の R_{diff} & R_{disp} の格子幅・波長依存性

(|U|= 5 m/s を仮定)



- DG p=3 の R_{diff} や R_{disp} は FDM UD7 に近く, modal filter の影響も考慮すると, p>3 であれば KT2021 の数値的条件を満たす.
- スペクトル精度に関する超収束の特性によって, well-resolved な波長(l>8) での R_{diff} & R_{disp} は, 同程度の次数の FDM と比較して非常に小さい.
- 一方, p=7 といった高次の DGM においても, l<6 に対する数値誤差は避けられない.

Kawai & Tomita (2023, MWR): 惑星境界層乱流 LES による数値指標の妥当性の検証 (1/2)



200 W/m² の熱フラックスをモデル下端から注入

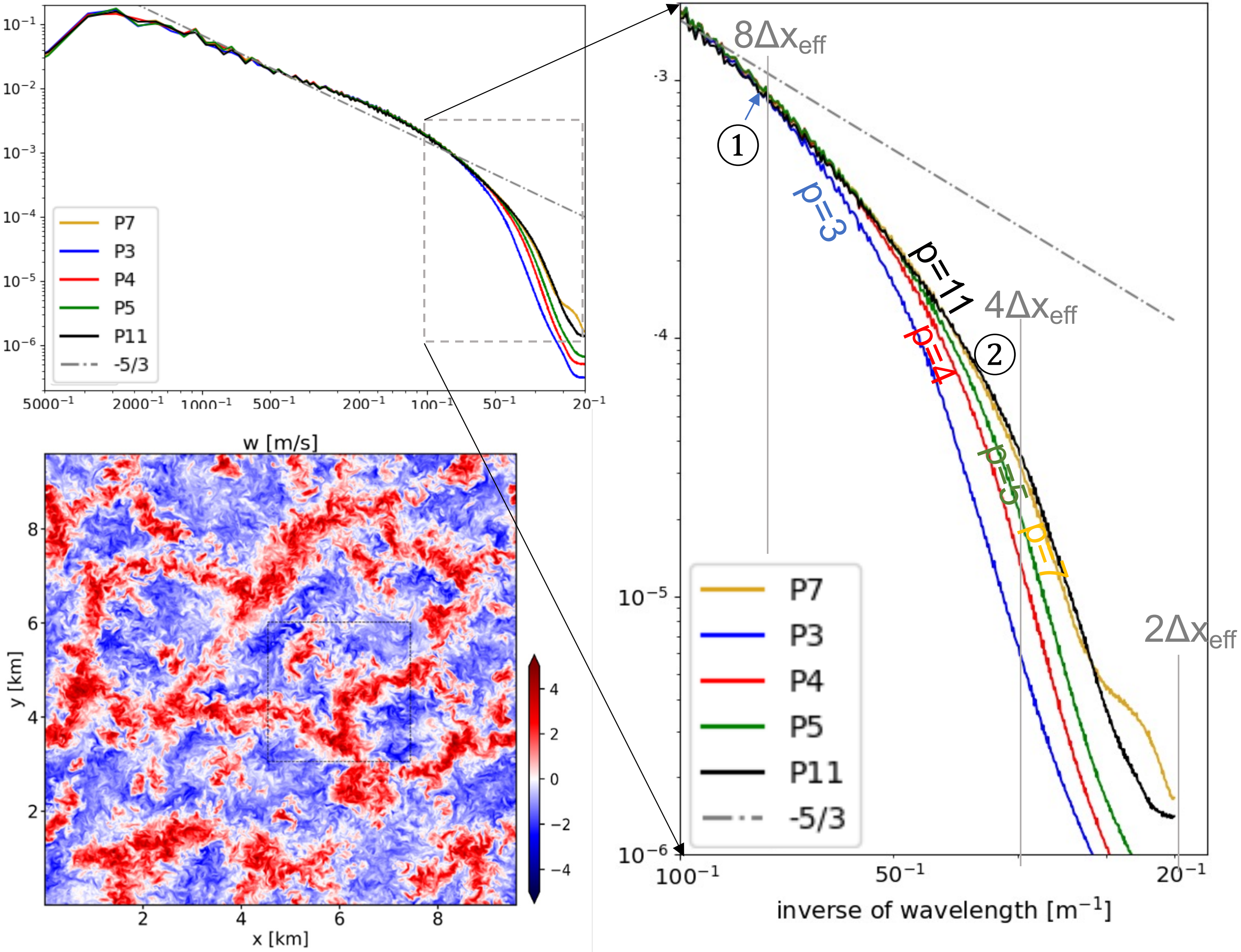
- 格子幅 Δx_{eff} (=要素幅/(p+1)) は, 10 m に固定
- 多項式の次数 (p) を 1, 3, 4, 5, 7, 11 と変える

- R_{diff} から得られた示唆の妥当性を検証するために, 理想化した惑星境界層乱流の数値実験を実施した.
- 使用したモデル: DGM に基づく大気 LESモデル
  - 数値安定化に関する機構
    - 数値流束(Rusanov, 1961)に付随する数値粘性
    - 32 次の modal フィルタ

      最高次モードに対する減衰時定数 ~ $10^3\,\Delta t$
  - 乱流モデル: Smagorinsky-Lilly model (Brown et al., 1994)
- Nishizawa et al. (2015), KT2021 と同様に, 乱流モデルの空間フィルタ長を $2\Delta x_{eff}$ とする.
  - SGS 項に比べて数値粘性が十分小さければ, エネルギースペクトルは 8 格子程度まで -5/3 乗則に従う.

Kawai & Tomita (2023, MWR): 惑星境界層乱流 LES による数値指標の妥当性の検証 (2/2)

3 次元速度のエネルギースペクトル



- p が 3 以上あれば, エネルギースペクトルは約 8 格子付近まで -5/3 乗則に従う
- p=4 の結果は, 約 8 格子付近まで参照解(p=11) のスペクトルに非常に近いが, 約 5 格子より短波長側では, 参照解に比べて急な傾きを持つ.
    - 数値流束や modal フィルタに伴う数値粘性の影響を反映している.

これらの結果は, R_{diff} から得られる示唆とおおよそ整合する

全球 LES に向けた
DGM に基づく力学コア開発

DGM に基づく大気力学コアの高度化 —般曲線座標系における完全圧縮非静力学方程式系

- Kawai & Tomita (2023, MWR)では, DGM に基づく dry の領域大気力学コアを構築し, 乱流モデルを導入した.

- 湿潤 LES や全球計算に向けて, DGM による領域力学コアの高度化を進めてきた.
  - 湿潤過程の導入(2022年度気象学会)
  - 地形の考慮 (JpGU2023)
  - **全球モデル化・乱流モデルの導入**

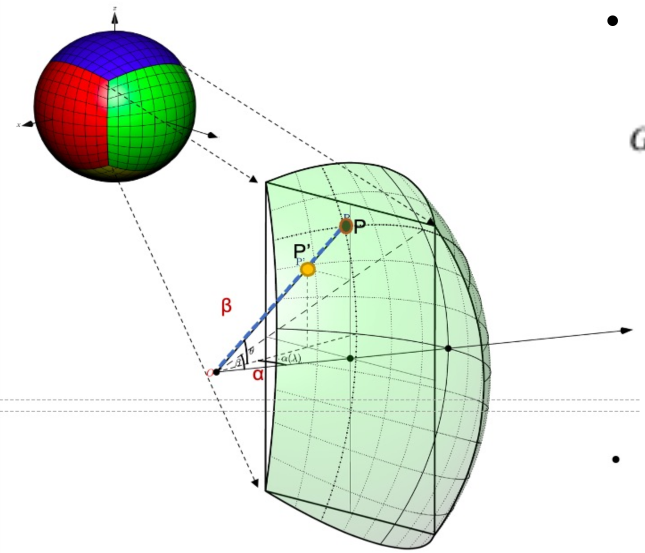
Kawai & Tomita (*Geosci. Model Dev*. に投稿, under review):
Development of high-order global dynamical core using discontinuous Galerkin method for atmospheric LES and proposal of test cases: SCALE-DG v0.8.0

$$\frac{\partial \boldsymbol{q}}{\partial t} + \frac{\partial\left[\boldsymbol{f}(\boldsymbol{q}) + \boldsymbol{f}_{\mathrm{SGS}}(\boldsymbol{q}, \nabla \boldsymbol{q})\right]}{\partial \xi} + \frac{\partial\left[\boldsymbol{g}(\boldsymbol{q}) + \boldsymbol{g}_{\mathrm{SGS}}(\boldsymbol{q}, \nabla \boldsymbol{q})\right]}{\partial \eta} + \frac{\partial\left[\boldsymbol{h}(\boldsymbol{q}) + \boldsymbol{h}_{\mathrm{SGS}}(\boldsymbol{q}, \nabla \boldsymbol{q})\right]}{\partial \zeta} = \boldsymbol{S}(\boldsymbol{q}) + \boldsymbol{S}_{\mathrm{SGS}}(\boldsymbol{q}).$$

$$\boldsymbol{q} = \left(\sqrt{G}\rho', \sqrt{G}\rho u^{\xi}, \sqrt{G}\rho u^{\eta}, \sqrt{G}\rho u^{\zeta}, \sqrt{G}(\rho\theta)'\right)^{T}.$$

$$\boldsymbol{f}(\boldsymbol{q}) = \begin{pmatrix} \sqrt{G}\rho u^{\xi} \\ \sqrt{G}(\rho u^{\xi} u^{\xi} + G_c^{11} p') \\ \sqrt{G}(\rho u^{\eta} u^{\xi} + G_c^{21} p') \\ \sqrt{G}\rho u^{\zeta} u^{\xi} \\ \sqrt{G}\rho\theta u^{\xi} \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{g}(\boldsymbol{q}) = \begin{pmatrix} \sqrt{G}\rho u^{\eta} \\ \sqrt{G}(\rho u^{\xi} u^{\eta} + G_c^{12} p') \\ \sqrt{G}(\rho u^{\eta} u^{\eta} + G_c^{22} p') \\ \sqrt{G}\rho u^{\zeta} u^{\eta} \\ \sqrt{G}\rho\theta u^{\eta} \end{pmatrix} \quad \boldsymbol{h}(\boldsymbol{q}) = \begin{pmatrix} \sqrt{G}\rho \widetilde{u^{\zeta}} \\ \sqrt{G}[\rho u^{\xi} \widetilde{u^{\zeta}} + (G_v^{13} G_c^{11} + G_v^{23} G_c^{12}) p'] \\ \sqrt{G}[\rho u^{\eta} \widetilde{u^{\zeta}} + (G_v^{13} G_c^{21} + G_v^{23} G_c^{22}) p'] \\ \sqrt{G}\rho u^{\zeta} \widetilde{u^{\zeta}} + \sqrt{G}_c p' \\ \sqrt{G}\rho\theta \widetilde{u^{\zeta}} \end{pmatrix} \quad \boldsymbol{S}(\boldsymbol{q}) = \begin{pmatrix} 0 \\ F_H^1 + F_M^1 + \rho f \sqrt{G}_c(-u^{\xi} G_c^{21} + u^{\eta} G_c^{11}) \\ F_H^2 + F_M^2 + \rho f \sqrt{G}_c(-u^{\xi} G_c^{22} + u^{\eta} G_c^{12}) \\ -\rho' g \\ 0 \end{pmatrix}$$

- 球面幾何を扱うために, 水平座標として立方球面座標 (e.g., Sadourny, 1972; Ronchi et al., 1996) を用いる.



- 計量テンソルや変換ヤコビアンの表現

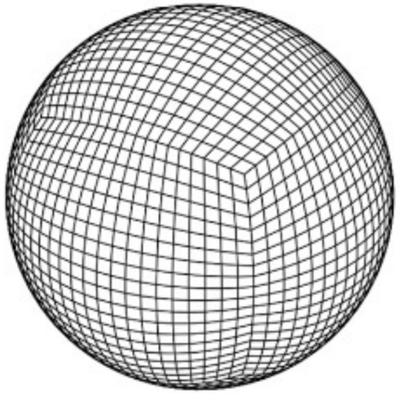
$$G_c^{ij} = \frac{\delta^2}{r^2(1+X^2)(1+Y^2)} \begin{pmatrix} 1+Y^2 & XY \\ XY & 1+X^2 \end{pmatrix}, \quad \sqrt{G_c} = \frac{r^2(1+X^2)(1+Y^2)}{\delta^3},$$

ここで, $X = \tan\alpha,\ Y = \tan\beta,\ \delta^2 = 1 + X^2 + Y^2$

- 有限要素を定義するメッシュ: 等角座標 (α,β) の平面上を等間隔で分割することで生成する.

一般曲線座標における乱流モデルに伴う渦粘性・渦拡散項の定式化 (1/2)

- 難しい点
  - 心射投影に基づく立方球面座標では, 基底が非直交かつ空間変化するため, 渦粘性項と関係したベクトルラプラシアンの定式化や離散化を実直に行うと非常に複雑である.
    - 先行研究(Rančić et al., 2017)を参考に, テンソル解析を用いて系統的に行う.



Rančić et al. (2017) Fig.1

心射投影に基づく立方球面座標
＊ 高解像度でも格子の一様性が良いが, 非直交基底を扱わなければならない.

- ベクトルラプラシアンの一般曲線座標系での表現

$$\boldsymbol{T} = \mathrm{grad}\boldsymbol{u}$$

$$T^{ij} = G^{im} u^j_{,m}$$

計量テンソル

ここで,

$$u^k_{,i} = \frac{\partial u^k}{\partial \tilde{x}^i} + u^r \Gamma^k_{ir}$$

第 2 種クリストッフェルテンソル

$$\boxed{\mathrm{div}\boldsymbol{T} = \left(\frac{1}{\sqrt{G}} \frac{\partial(\sqrt{G} T^{ik})}{\partial \tilde{x}^k} + \Gamma^i_{mk} T^{mk} \right) \boldsymbol{g}_i}$$

変換ヤコビアン

- 速度ベクトルの勾配(2 階のテンソル)の各成分は, 速度ベクトルの反変成分の共変微分($u^j_{,m}$)を用いて書き表せる.

- 上記で計算した速度ベクトルの勾配の発散をとる.

一般曲線座標における乱流モデルに伴う渦粘性・渦拡散項の定式化 (2/2)

- 先ほどの一般曲線座標系でのベクトルラプラシアンの表現をもとにして, Smagorinsky-Lilly 型の乱流モデルによる渦粘性・渦拡散項を書き表すと,

$$\frac{\partial \boldsymbol{q}}{\partial t} + \frac{\partial\left[\boldsymbol{f}(\boldsymbol{q}) + \boldsymbol{f}_{\mathrm{SGS}}(\boldsymbol{q}, \nabla \boldsymbol{q})\right]}{\partial \xi} + \frac{\partial\left[\boldsymbol{g}(\boldsymbol{q}) + \boldsymbol{g}_{\mathrm{SGS}}(\boldsymbol{q}, \nabla \boldsymbol{q})\right]}{\partial \eta} + \frac{\partial\left[\boldsymbol{h}(\boldsymbol{q}) + \boldsymbol{h}_{\mathrm{SGS}}(\boldsymbol{q}, \nabla \boldsymbol{q})\right]}{\partial \zeta} = \boldsymbol{S}(\boldsymbol{q}) + \boldsymbol{S}_{\mathrm{SGS}}(\boldsymbol{q}, \nabla \boldsymbol{q}).$$

Sub-grid scale の渦粘性・渦拡散フラックス:

$$\boldsymbol{f}_{\mathrm{SGS}}(\boldsymbol{q}) = \begin{pmatrix} 0 \\ -\sqrt{G}\rho\tau^{11} \\ -\sqrt{G}\rho\tau^{12} \\ -\sqrt{G}\rho\tau^{13} \\ -\sqrt{G}\rho\tau_*^{1} \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{g}_{\mathrm{SGS}}(\boldsymbol{q}) = \begin{pmatrix} 0 \\ -\sqrt{G}\rho\tau^{21} \\ -\sqrt{G}\rho\tau^{22} \\ -\sqrt{G}\rho\tau^{23} \\ -\sqrt{G}\rho\tau_*^{2} \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{h}_{\mathrm{SGS}}(\boldsymbol{q}) = \begin{pmatrix} 0 \\ -\sqrt{G}\rho\tau^{31} \\ -\sqrt{G}\rho\tau^{32} \\ -\sqrt{G}\rho\tau^{33} \\ -\sqrt{G}\rho\tau_*^{3} \end{pmatrix}. \qquad \boldsymbol{S}_{\mathrm{SGS}}(\boldsymbol{q}, \nabla \boldsymbol{q}) = \begin{pmatrix} 0 \\ -\sqrt{G}\Gamma^1_{mk}\rho\tau^{mk} \\ -\sqrt{G}\Gamma^2_{mk}\rho\tau^{mk} \\ -\sqrt{G}\Gamma^3_{mk}\rho\tau^{mk} \\ 0 \end{pmatrix}.$$

ここで,

$$\tau^{ij} = -2\nu_{\mathrm{SGS}}\left(S^{ij} - \frac{G^{ij}}{3}D\right) - \frac{2}{3}G^{ij}K_{\mathrm{SGS}} \qquad \tau_*^{i} = -\nu^*_{\mathrm{SGS}}G^{ij}\frac{\partial\theta}{\partial\xi^j}$$

歪み速度テンソル:

$$S^{ij} = \frac{1}{2}\left(G^{im}\frac{\partial u^j_{,m}}{\partial\xi^m} + G^{jn}\frac{\partial u^i_{,n}}{\partial\xi^n}\right)$$

3 次元速度の発散: $D = u^m_{,m}$

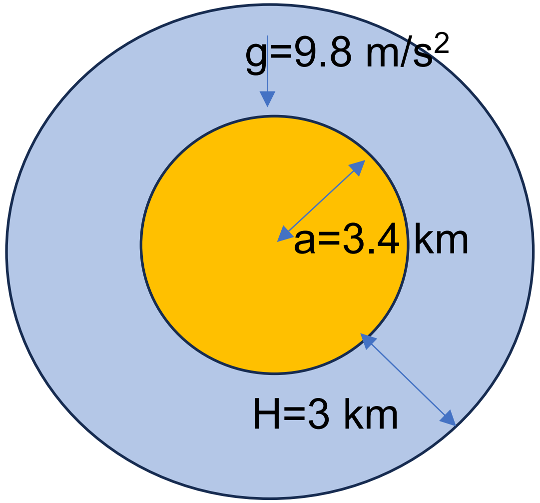
渦粘性係数: $\nu_{\mathrm{SGS}} = C_s\Delta_{\mathrm{SGS}}|S|$

C_s: Smagorinsky 定数, Δ_{SGS}: フィルタ長

$$|S| = (2G_{im}G_{jm}S^{ij}S^{mn})^{1/2}$$

小惑星設定による全球 LES: 実験設定

- 乱流モデルを導入した全球力学コアの妥当性を確認するために, 仮想的な小惑星における惑星境界層乱流 LES を行う.
  - 我々の先行研究で扱った領域平面モデルでの設定(Nishizawa et al., 2015) を, 全球計算へと拡張した.
- 計算資源の制約のため惑星半径を 3.4 km に設定する.
- 領域平面モデルから得られた計算結果 (KT2021, KT2023)との対応を議論する観点で, 浅い大気近似を適用する.



- 境界条件
  - モデル下端から 200 W/m^2 の熱フラックスを注入
- 初期条件: 安定成層した静止大気
  - 領域平面モデルでは一様水平風 5 m/s を初期に与えたが, 全球計算では同様の設定が難しいので無風から始める.
  - 温位に対して、振幅 1 K の擾乱を加える.

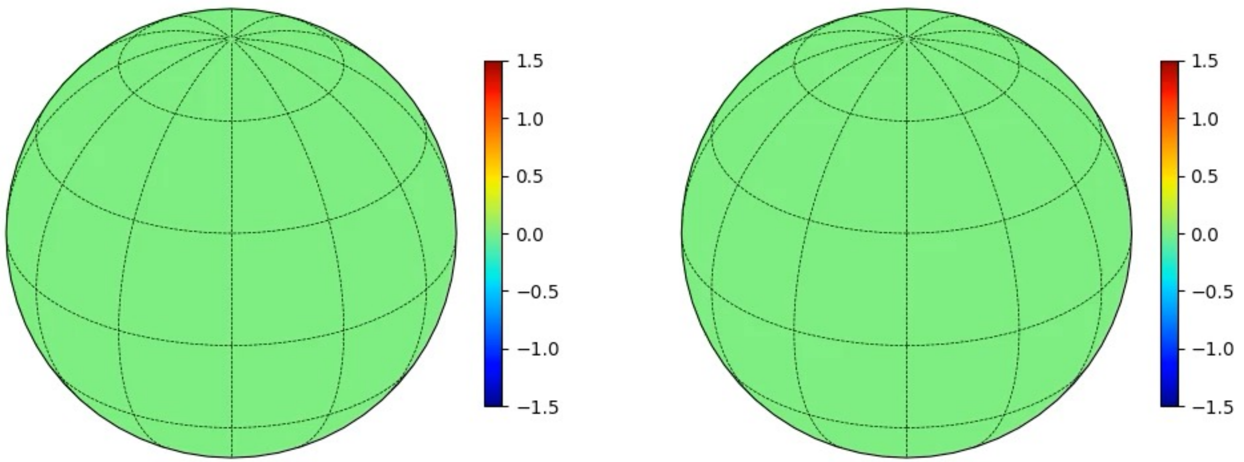
＊ 力学コアと乱流モデルの振る舞いに焦点を当てるために, 放射・湿潤過程等は考慮しない.

- 空間解像度: $\Delta_{h,eq}$, Δ_v ~ 10 m using p=3, 4, 7
- 積分時間: 4 時間
- 数値安定化のために modal filter を使用
  - KT2023 と同様に, 32 次・最高次モードに対する減衰時定数 $\Delta t/10^{-3}$ に設定

結果: 鉛直風の時間発展・空間分布

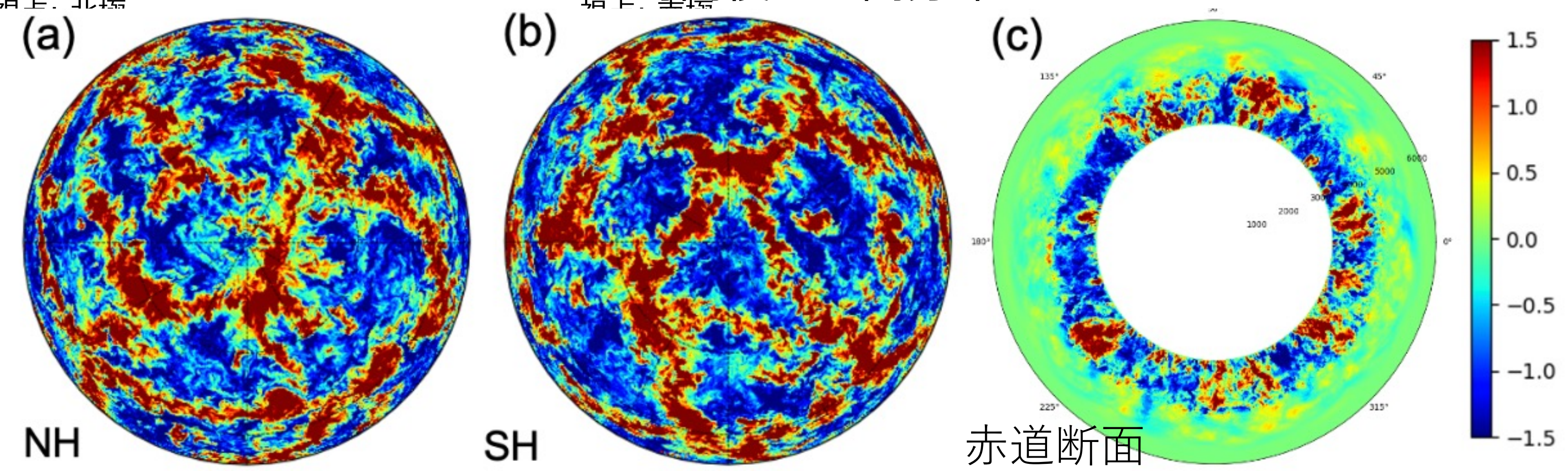
水平分布(z=500 m)のアニメーション

視点: 経度 0 度, 緯度 30 度　　視点: 経度 180 度, 緯度 30 度



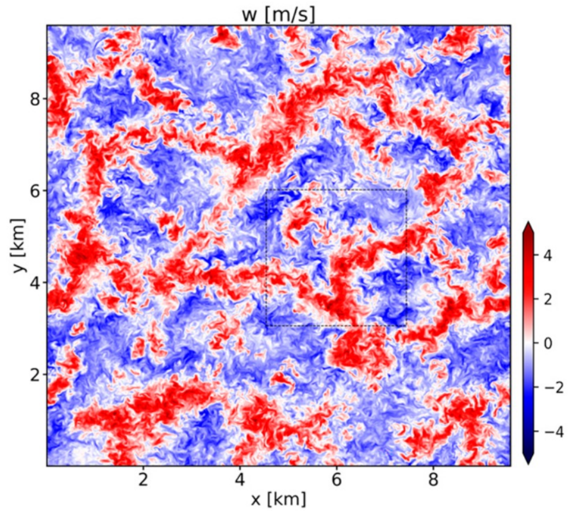
- 領域平面モデルの計算結果(N2015, KT2021, K2023)と同様の境界層の時間発展が得られた.
    - 開いた対流セルが発達
    - 特徴的な水平スケールは数 km

t=4 時間後の空間分布

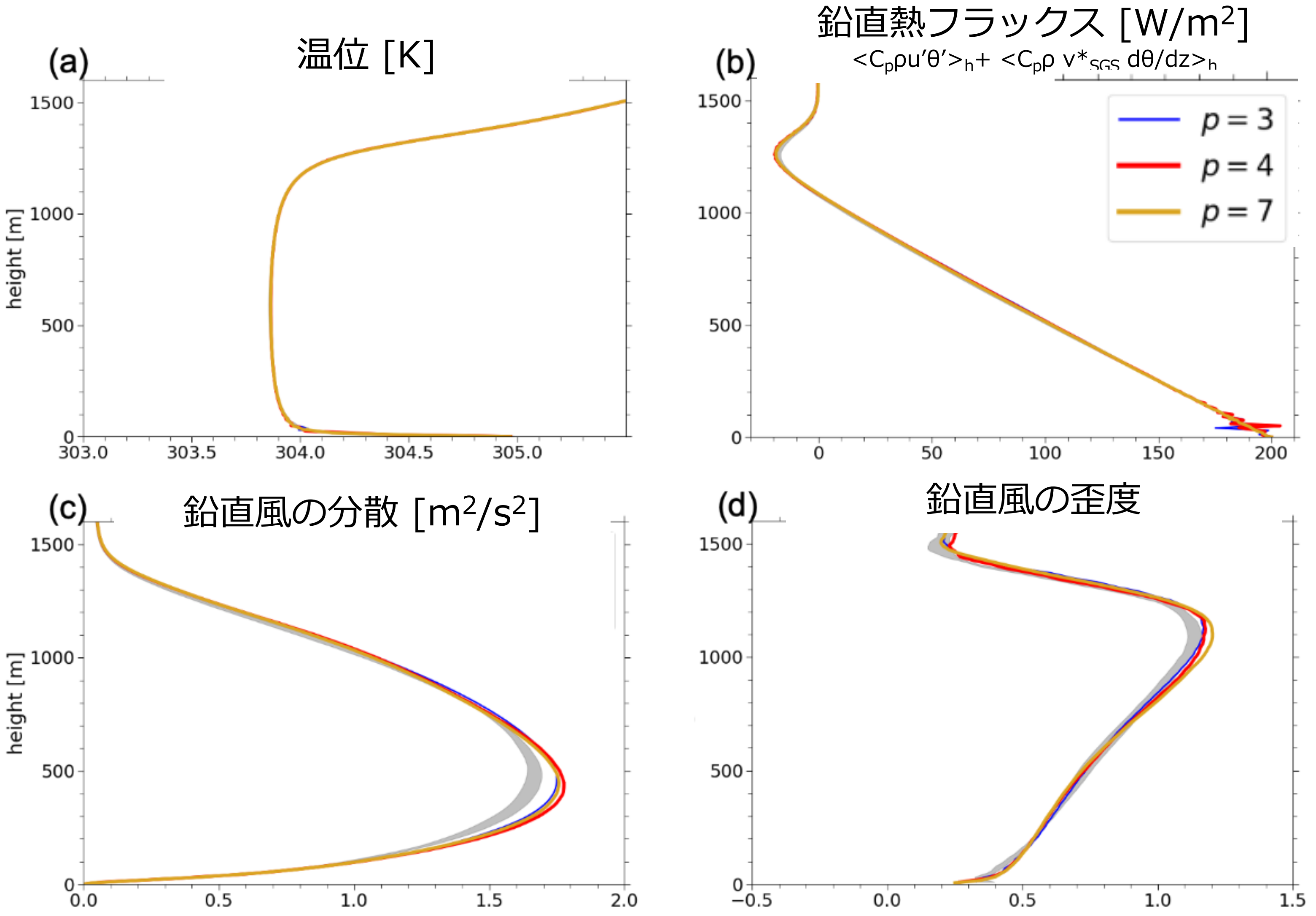


(z=500 m)　　(z=500 m)

参考: 領域平面モデルから
得られた鉛直風の水平分布 (KT2023)



結果: 境界層の鉛直構造



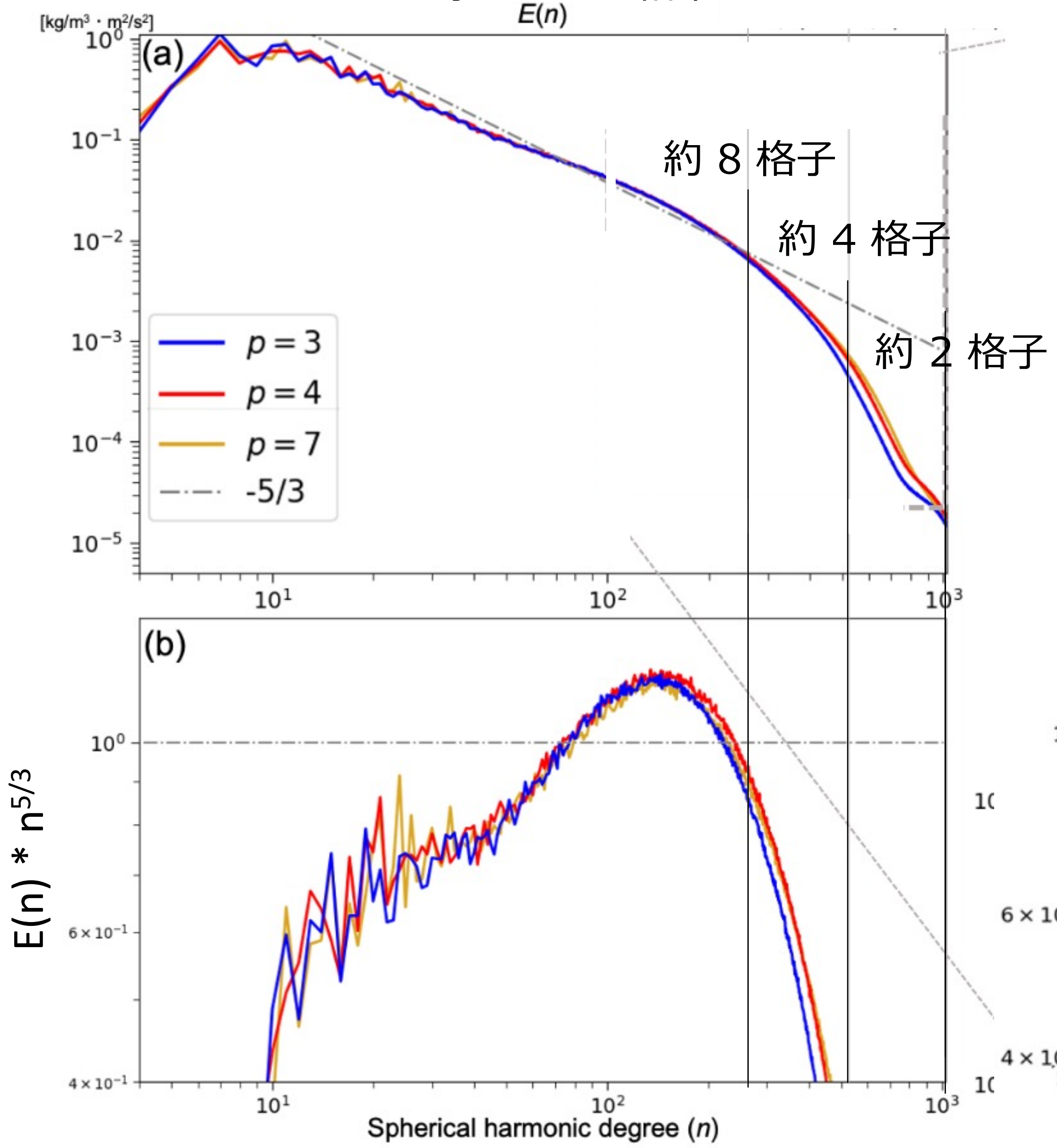
- 浅い大気近似を適用した全球計算の結果は, 領域平面モデル(KT2023)から得られた境界層の鉛直構造をよく再現する.
  - 境界層の高度
  - 擾乱による鉛直熱輸送量
  - 鉛直風の分散の極大の大きさ・高度
  - 鉛直風の歪度の大きさ(下降流に比べて上昇流が強い)

＊ 最後の 30 分間で時間・水平平均

＊ KT2023 から得られた領域平面モデルの結果はシェードで表している.

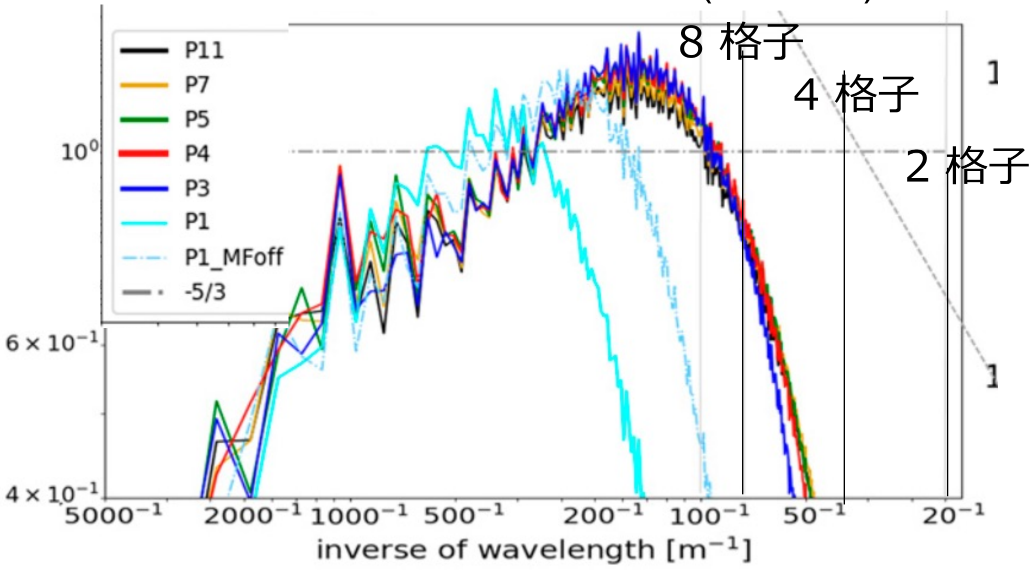
結果: 3 次元速度のエネルギースペクトル

全球モデルの結果



- 領域平面モデル(KT2023)から得られたエネルギースペクトルと同様の傾向が得られた.
  - 約 8 格子まで -5/3 乗則に沿う.
  - より短波長側では, 乱流モデルの定式化や数値粘性の影響に起因して, 傾きは深くなる.

領域平面モデルの結果 (KT2023)

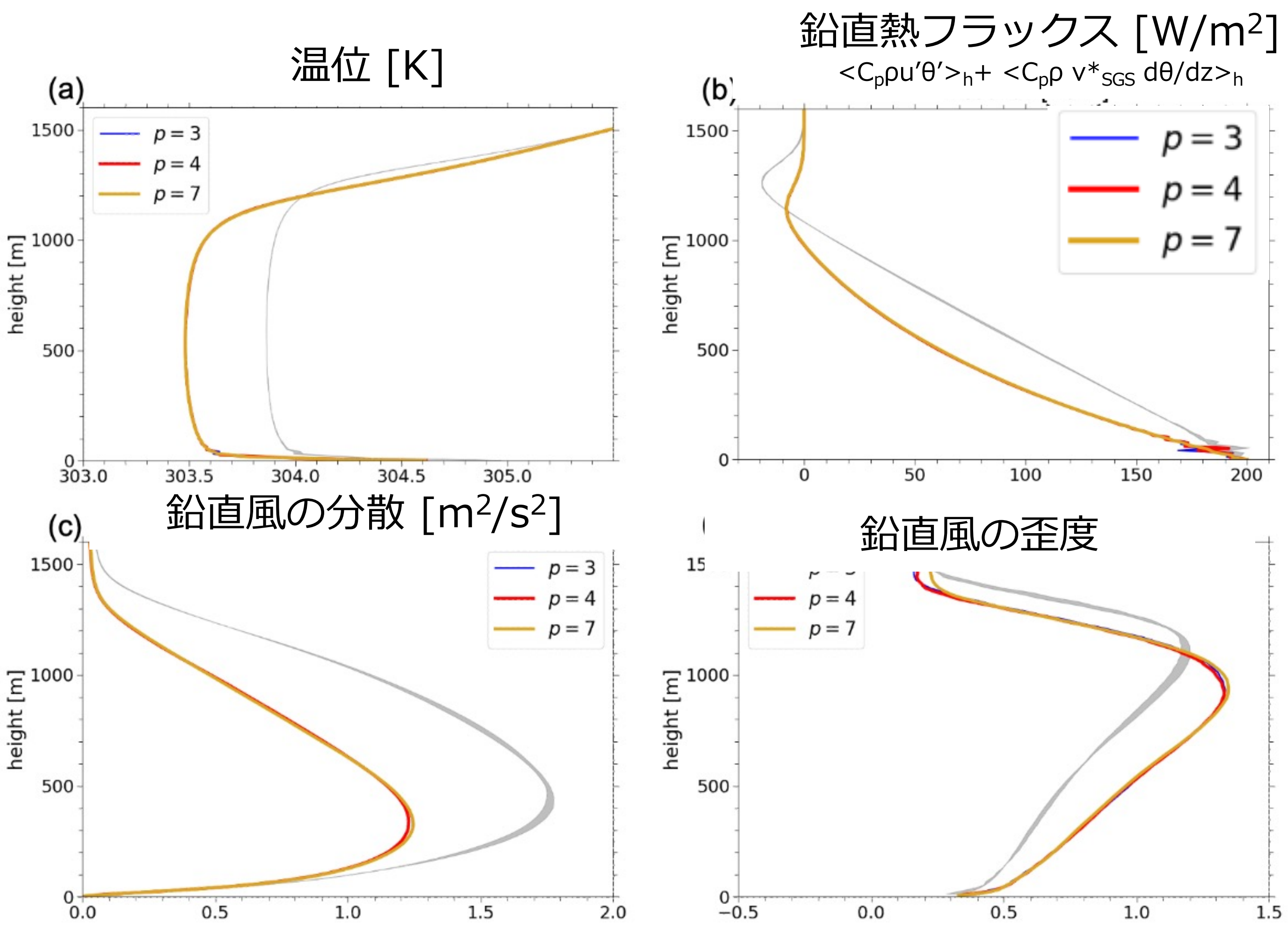


- 全球計算でも, p>3 であれば, 8 格子より長波長側で渦粘性に比べて数値粘性の影響は十分小さい.

<= KT2023
の示唆と整合的

浅い大気近似を外すと…

境界層の鉛直構造



* 最後の 30 分間で時間・水平平均
*前のスライドで示した, 浅い大気近似を適用した場合の結果は, シェードで表している.

- 同じ時刻で比較すると, 浅い大気近似を適用した場合に比べて, 境界層の発達が遅い.
- 浅い大気近似を適用した場合に比べて, 鉛直風の分散は弱い.
  - エネルギースペクトルからも, 対流セルや小さな空間スケールの流れが弱くなる傾向が見られた.

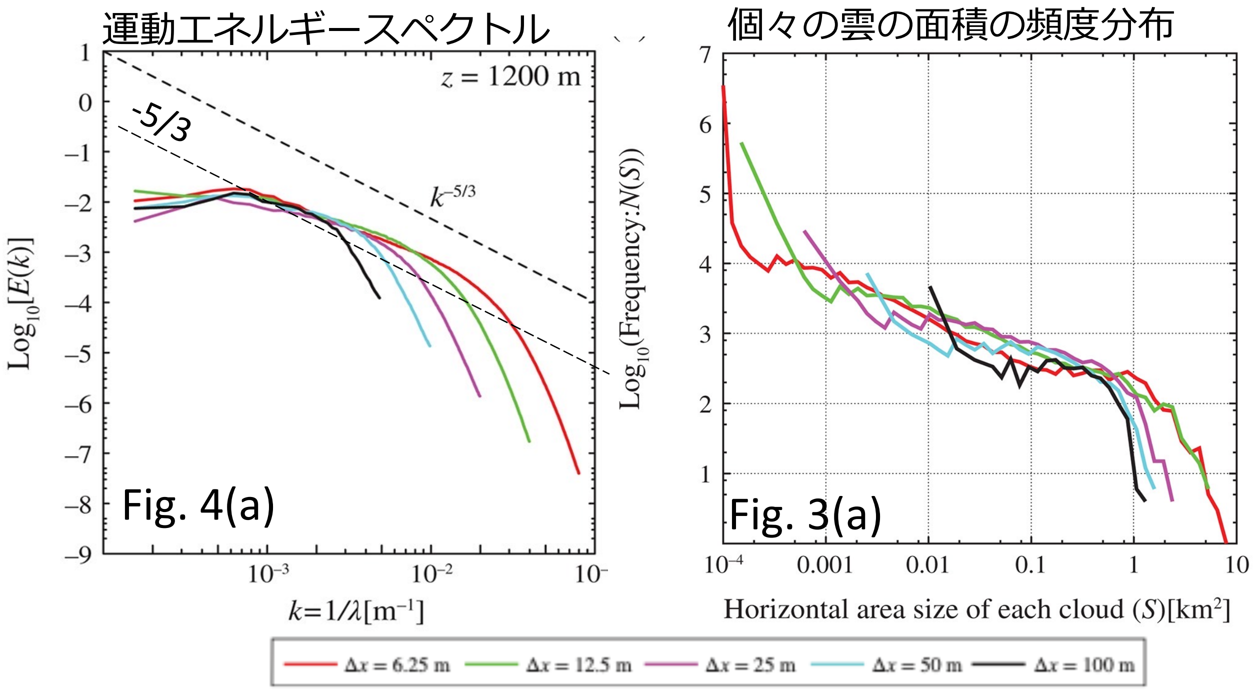
球殻の体積は高度とともに拡大するため, 下端からの熱フラックスが同量の設定では流れは弱くなると考えられる.

今後の課題

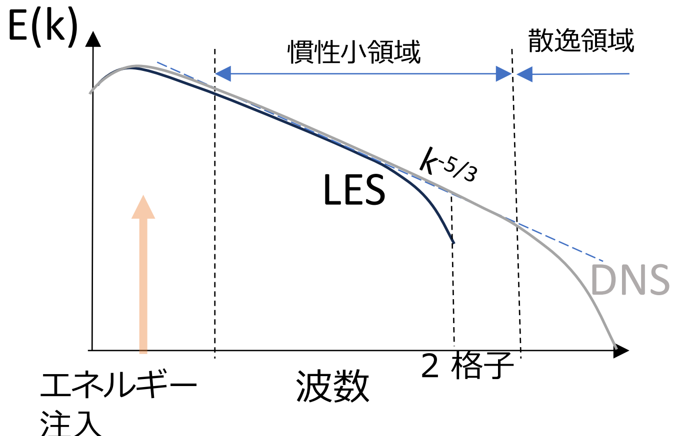
- 湿潤過程を考慮した LES の手法の検討
- DGM の枠組みにおける力学-物理過程の結合手法の高度化

湿潤過程を考慮した LES の課題

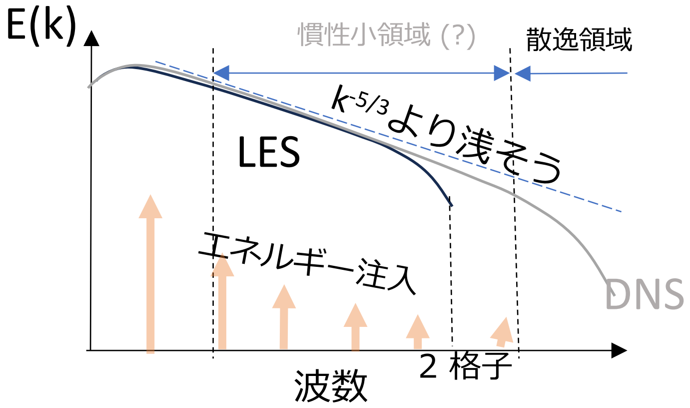
Sato et al. (2017, ASL)



Smagorinsky モデルでの想定

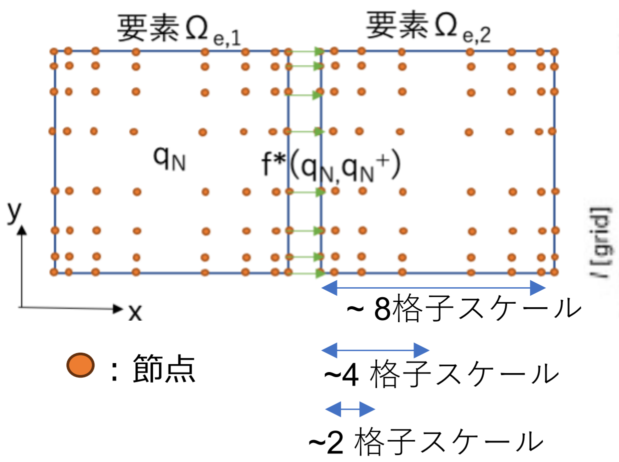


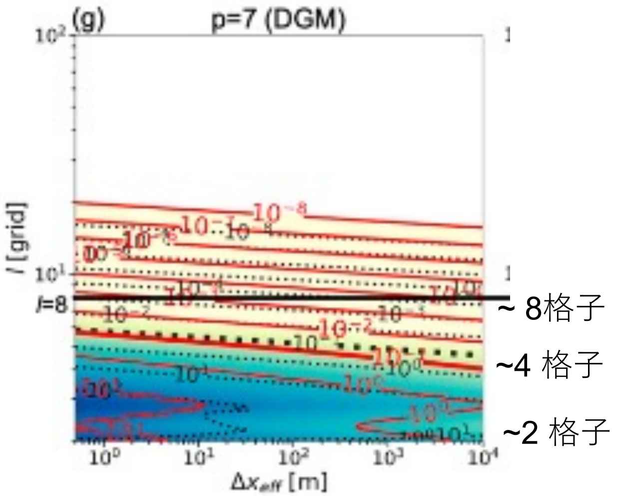
湿潤計算で起こりそうな状況



- Sato et al. (2017, ASL): 雲微物理過程に超水滴法を用いた浅い積雲の LES を実施した.
  - -5/3 乗則より浅いスペクトルを得た.
    - 様々な空間スケールでエネルギー注入が存在する可能性がある.
- LES では, Kolmogorov 相似則が成り立つ慣性小領域にフィルタ長(~格子幅)を設定することが想定されているが, 上記のような状況では, その仮定を満たしていない..
- 湿潤 LES を精緻に行うために, 既存の理論や LES による乱流パラメタリゼーションの限界を調査し, 再構築が必要である.

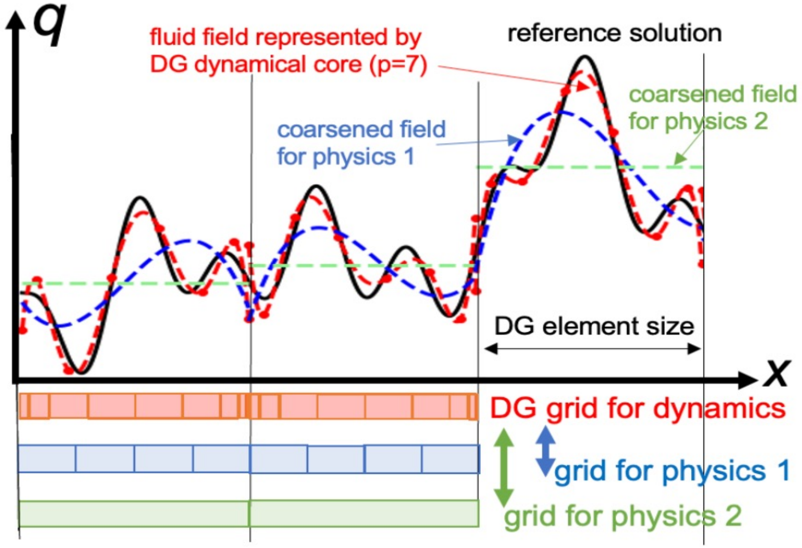
DGM の枠組みにおける力学-物理過程の結合手法の高度化





高次の DGM (p=7) でさえも, 6 格子以下の構造は, 数値誤差の影響が大きい

DGM の局所スペクトル情報を活かした力学-物理過程結合



- 我々の初期的取り組みでは, 有限要素内の節点上の流体場の値を使って, 物理(雲微物理)過程の時間変化率を計算した.
- 「素朴な」方法であるが, 以下の点で問題がある.
  - 節点の配置が要素内で不等間隔であることに起因して, バイアスが発生し得る.
  - 離散誤差の影響を受ける格子スケールに近い流体場の情報が使われてしまう.
- 我々が目指したい精巧な手法
  - 力学コアの有効解像度を考慮しながら, それぞれの物理過程の設計思想に整合した空間スケールで力学-物理過程の結合を行う.
    - その際には, DGM の特徴である, 要素内の局所的なスペクトル情報を活かす.

まとめ

- 格子幅 O(10-100 m) といった将来的な高解像度大気計算では, LES を有力な手法であるが, 厳密な LES を行うには従来的な力学コアでは数値誤差の問題があることを示唆した (Kawai & Tomita, 2021, MWR).
- 高精度化手法として不連続ガラーキン法(DGM)に注目し, モデル基盤の整備や DGM の大気計算に対する有用性を検討した.
    - DGM のための流体計算ライブラリを開発し, それを活用した力学コアを構築した.
    - DGM の数値的振る舞いの理解を深め, DGM の枠組みでの大気 LES の必要精度の知見を与えた (Kawai & Tomita, 2023, MWR).
    - 全球力学コアへの拡張した (Kawai & Tomita, submitted to GMD).
- 全球湿潤 LES に向けた次の課題
    - 湿潤過程を考慮した LES の手法の検討
    - DGM の枠組みにおける力学-物理過程の結合手法