

Godunov DISPH 法の詳細と性能及び SPH 法の拡張について

¹ 湯浅拓宏,^{1,2} 森正夫

¹ 筑波大学 数理物質科学研究群 物理学学位プログラム

² 筑波大学 計算科学研究センター

シミュレーション天文学のこれまでとこれから
-ハードウェア・アプリケーション・サイエンス-, September 6, 2023

目次

- 1 各種スキームについて
 - SPH 法
 - Artificial Conductivity & GDF
 - Density-Independent SPH 法 & GSPH 法
- 2 Godunov DISP_H 法導出
- 3 テスト計算
 - 2D 静水圧平衡
 - 点源爆発
 - 2D Kelvin-Helmholtz 不安定性
- 4 結論

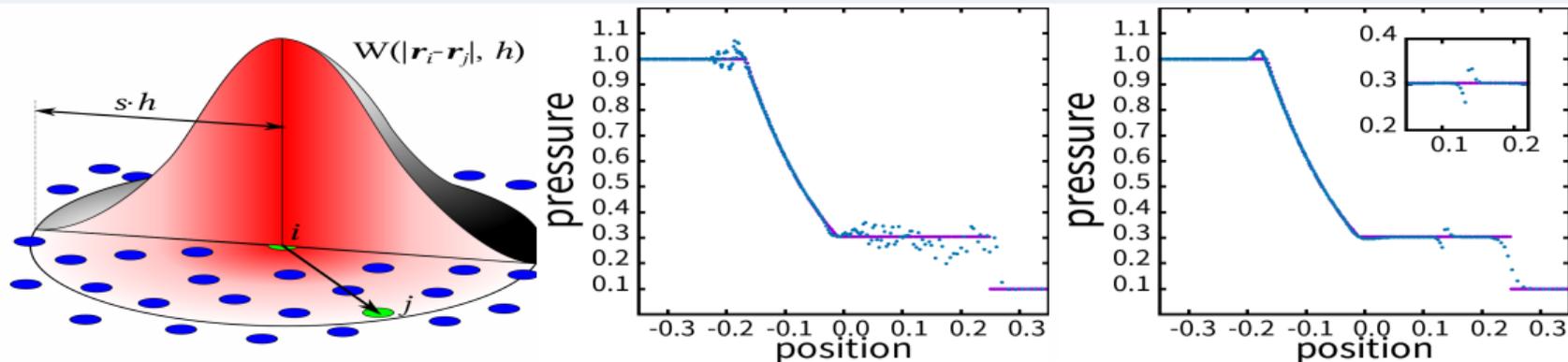
$$\frac{d\mathbf{v}(\mathbf{r})}{dt} = -\frac{1}{\rho(\mathbf{r})}\nabla P(\mathbf{r}) + \mathbf{F}_{AV}(\alpha_{AV}) \quad (1)$$

$$\frac{du(\mathbf{r})}{dt} = -\frac{P(\mathbf{r})}{\rho(\mathbf{r})}\nabla \cdot \mathbf{v}(\mathbf{r}) + \mathbf{G}_{AV}(\alpha_{AV}) \quad (2)$$

粒子 i が持つ任意の物理量

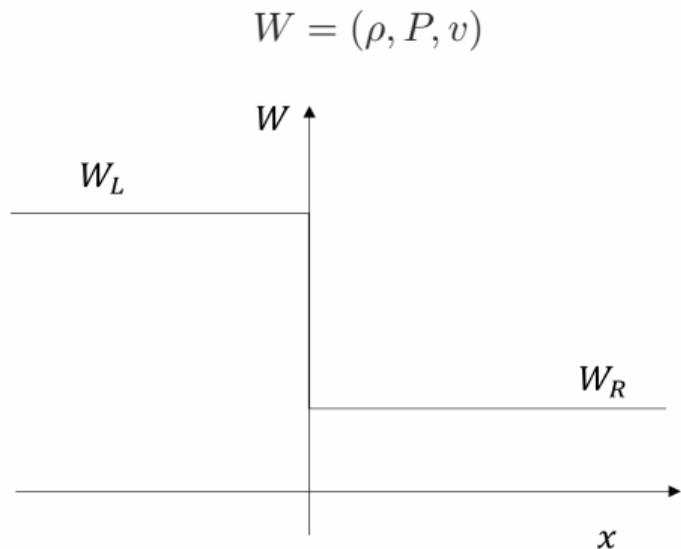
$$F(\mathbf{r}_i) = \int F(\mathbf{r}')W(|\mathbf{r}_i - \mathbf{r}'|, h)d^3\mathbf{r}' + \mathcal{O}(h^2) = \sum_j \frac{m_j}{\rho_j} F_j W(|\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j|, h) + \mathcal{O}(1) \quad (3)$$

$$\rho_i = \sum_j m_j W_{ij}(h) \quad (4)$$

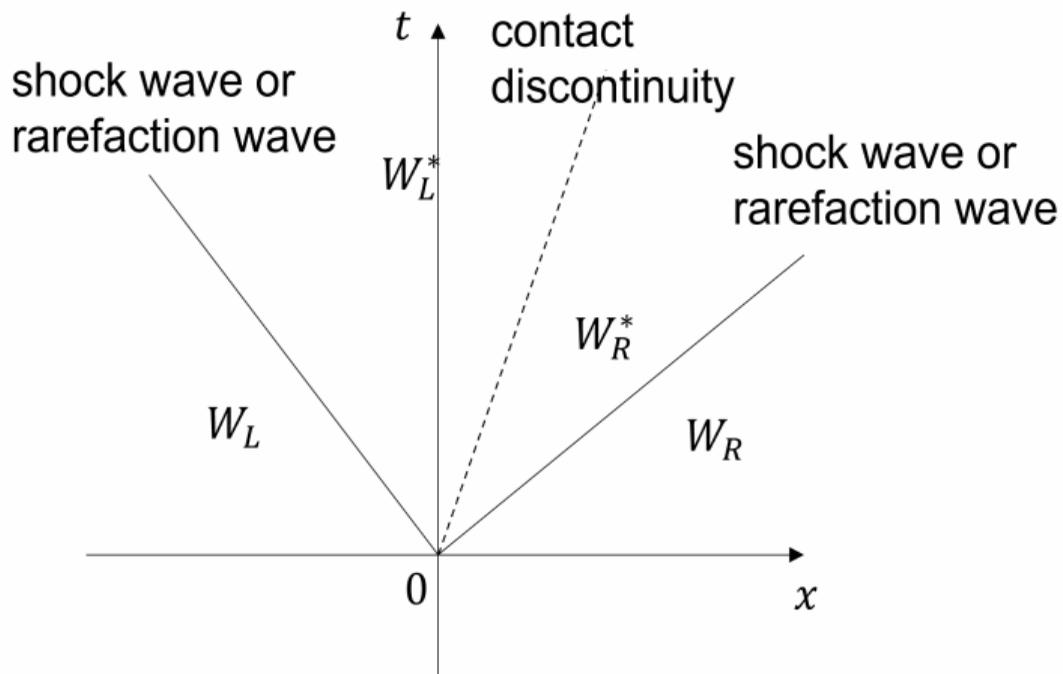


Riemann 問題について

- 初期条件

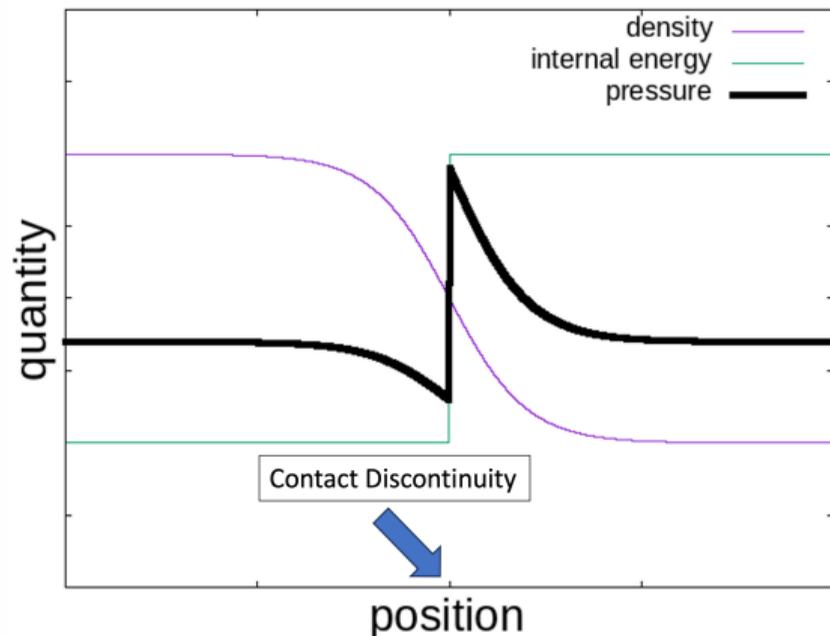


- 解のタイプ



$$P_L^* = P_R^*, v_L^* = v_R^*$$

接触不連続面



- 密度はカーネル補完によって求められる

$$\rho = \sum_j m_j W_{ij}(h) \quad (5)$$

- 内部エネルギーは時間積分で求められる
- 接触不連続面で、密度はなめらか、内部エネルギーは急激に変化

$$P = (\gamma - 1)\rho u \quad (6)$$

- P に不整合が生じ、その結果表面張力が発生 [Price, 2008]
- 粒子の体積要素 $dV = \frac{m}{\rho}$ は密度不連続のところで精度低下
- SPH 導出中に用いられる $\nabla\rho$ は、密度不連続部では未定義。密度勾配の大きい所では SPH の性能は低下するはず [Ritchie and Thomas, 2001]

Artificial Conductivity, GDF とは

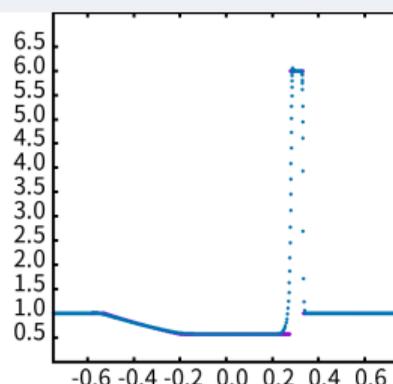
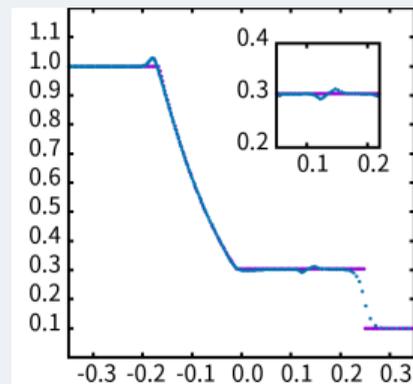
Artificial Thermal Conductivity

[Price, 2008] 考案。Phantom で使用されている

$$\frac{du(\mathbf{r})}{dt} = -\frac{P(\mathbf{r})}{\rho(\mathbf{r})} \nabla \cdot \mathbf{v}(\mathbf{r}) + G_{AV}(\alpha_{AV}) + H_{AC}(\alpha_u)$$

Sod's shocktube,
弱い衝撃波, 圧力

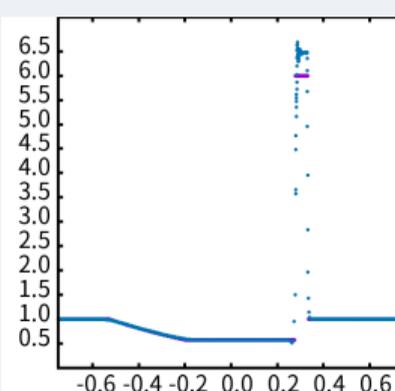
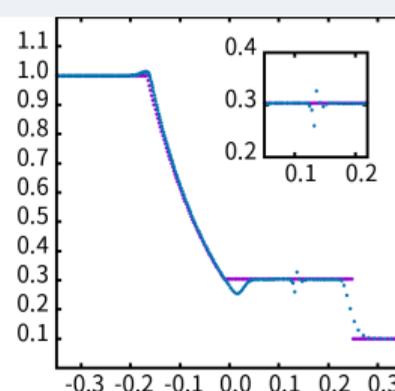
強い衝撃波 (初期条件で
 10^4 の圧力差), 密度



Geometric Density Average Force

Gasoline2 で使用 [Wadsley et al., 2017]。密度の空間微分を回避した形式を使用。

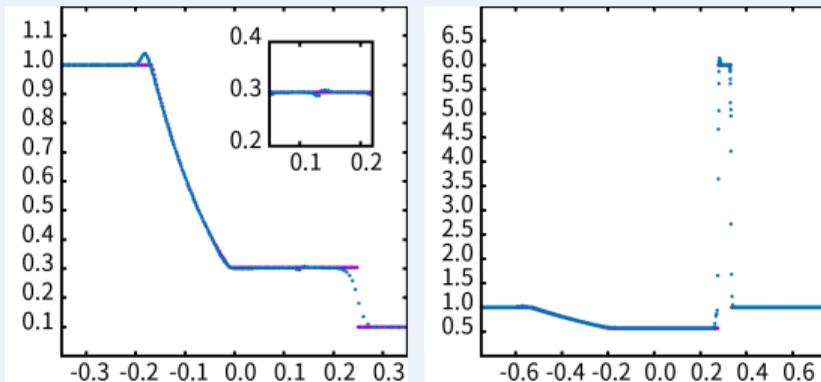
$$\frac{dv_i}{dt} = -\sum_j m_j \left(\frac{P_i + P_j}{\rho_i \rho_j} \right) \nabla_i W_{ij}(h) + F_{AV}(\alpha_{AV})$$



DISPH 法、GSPH 法とは

DISPH 法

[Saitoh and Makino, 2013] 考案。接触不連続面で連続な圧力を連続関数で近似 (圧力の連続性、空間微分可能性を仮定) し、流体の微分方程式を解いている。衝撃波を捉えるために、**人工粘性パラメータが必要**。

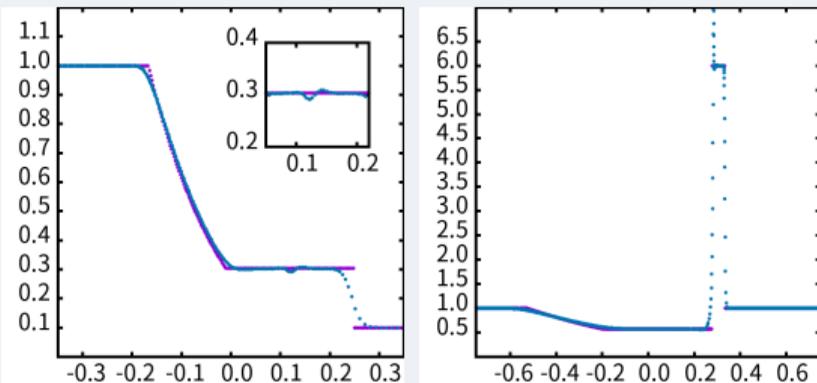


GSPH 法

[Inutsuka, 2002] 考案。

$$\frac{d\mathbf{v}_i}{dt} = -\sum_j m_j p_{ij}^* \left[\frac{1}{\rho_i^2} \nabla_i W_{ij}(h_i) + \frac{1}{\rho_j^2} \nabla_i W_{ij}(h_j) \right]$$

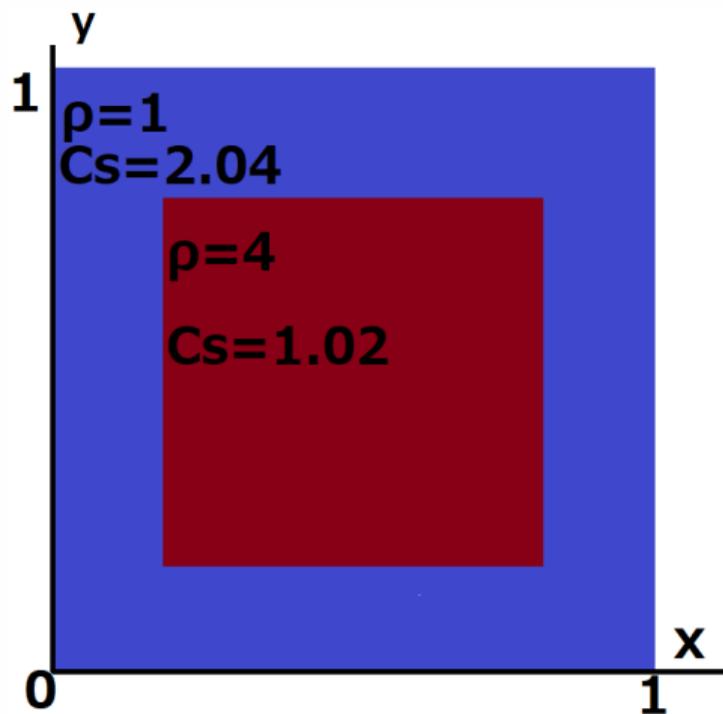
$$\frac{du_i}{dt} = -\sum_j m_j p_{ij}^* (\mathbf{v}_{ij}^* - \mathbf{v}_i) \cdot \left[\frac{1}{\rho_i^2} \nabla_i W_{ij}(h_i) + \frac{1}{\rho_j^2} \nabla_i W_{ij}(h_j) \right]$$

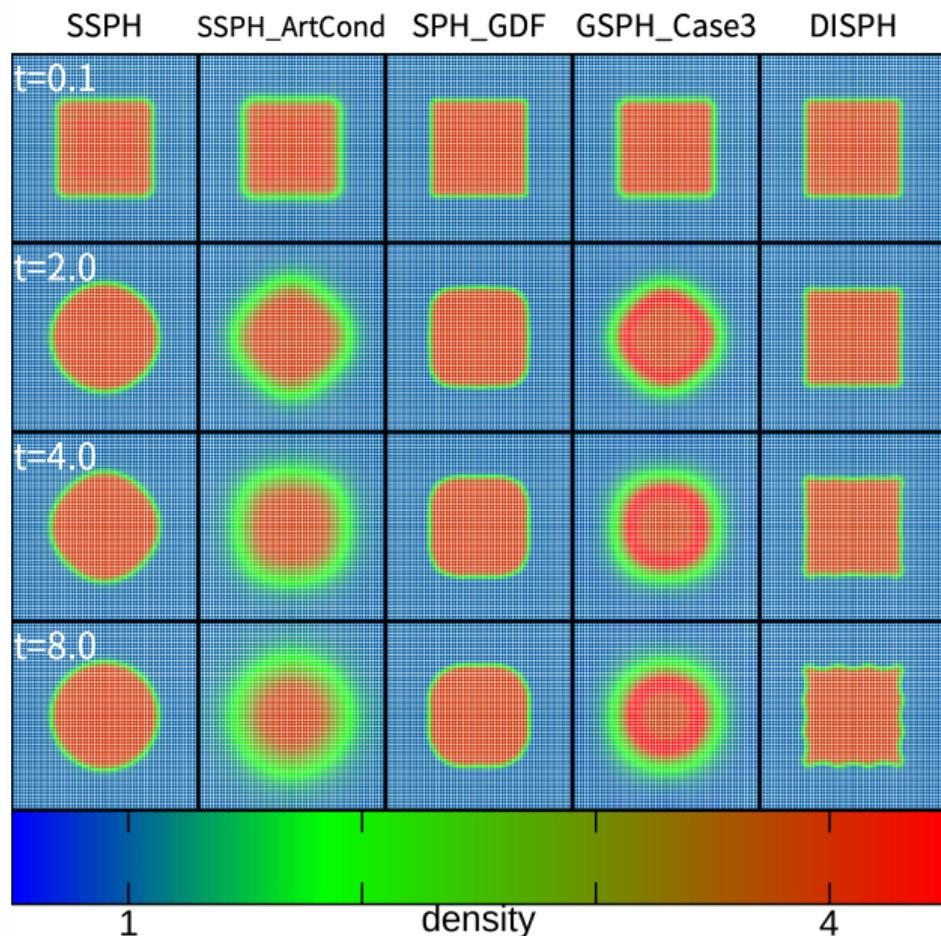


2D 圧力平衡

初期条件のまま変動しないのが物理的な解 圧力は全領域で一定

- 音速 $C_s = 1.02$ で計算領域を横切る時間約 1.0 の 8 倍である $t = 8.0$ まで計算





スキーム	接触不連続面の扱い	衝撃波のためのパラメータがない
SPH	×	×
人工熱伝導付き SPH	×	×
SPH GDF	△	×
DISPH	○	×
Godunov SPH	×	○

Godunov DISPH 法導出 (熱力学第一法則を起点)

粒子 i の微小内部エネルギー変化は、粒子が外部から受ける体積変化を通じた仕事によるもの (重心の位置変化を通じた仕事は運動エネルギーに)

$$dU_i = W_i^{Volume} \quad (7)$$

DISPH では (SPH でも)

$$W_i^{Volume} \equiv -P_i dV_i \quad (8)$$

粒子 i が dt の間に外部から受ける圧力は、 $P_i + \epsilon$ であると仮定し、二次の微小量を無視している。(流体方程式のエネルギーの式でも同様) 無限個の粒子, 無限小の smoothing length, 無限小のタイムステップを使えば正しいはず

新しい考え方

$P_{i,x}$ を、粒子 i を中心としたあらゆる方向から粒子 i が受ける圧力のある種の時間空間平均量として

$$W_i^{Volume} \equiv -P_{i,x} dV_i \quad (9)$$

が成り立つとする。

$$F(\mathbf{r}_i) \approx \int F(\mathbf{r}') W(|\mathbf{r}_i - \mathbf{r}'|, h) d^3 \mathbf{r}' \approx \sum_j \frac{U_j}{q_j} F_j W(|\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j|, h) \quad (10)$$

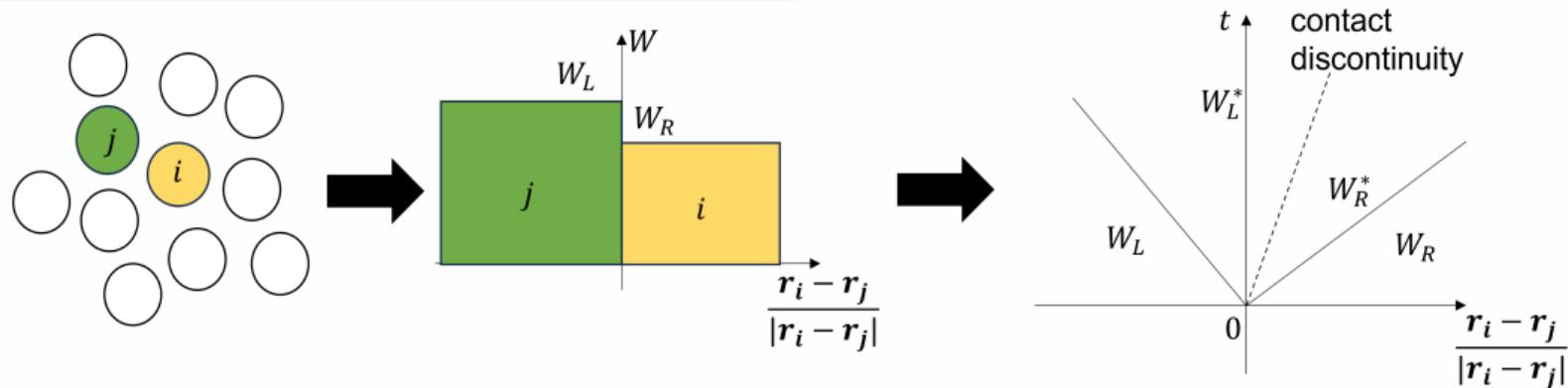
$$q_i = \sum_j U_j W_{ij}(h) = \frac{P_i}{(\gamma - 1)} \quad (11)$$

DISPH の導出法とほぼ同じように、上の式を用いてエネルギー方程式は

$$\frac{dU_i}{dt} = f_i^{grad} \sum_j^N \frac{P_{ix} U_i U_j}{q_i^2} \mathbf{v}_{ij} \cdot \nabla_i W_{ij}(h_i). \quad (12)$$

$$f_i^{grad} = \left(1 + \frac{h_i}{Dq_i} \sum_j^N U_j \frac{\partial W_{ij}(h_i)}{\partial h_i} \right)^{-1}. \quad (13)$$

となる。



P_{ix} の定義

P_{ix} には任意性が存在 (時間空間平均量の取り方の任意性)。

P_{ij}^* を粒子 i と粒子 j の物理量を入力値とした際の Star region での圧力の値として

$$P_{ix} \sum_j^N \frac{U_i U_j}{q_i^2} \mathbf{v}_{ij} \cdot \nabla_i W_{ij}(h_i) = \sum_j^N \frac{P_{ij}^* U_i U_j}{q_i^2} \mathbf{v}_{ij} \cdot \nabla_i W_{ij}(h_i), \quad (14)$$

が成り立つと定義する。

- P_{ij}^* を粒子 i が粒子 j から受ける圧力の時間平均量とする。

Godunov DISPH の運動方程式, エネルギー方程式

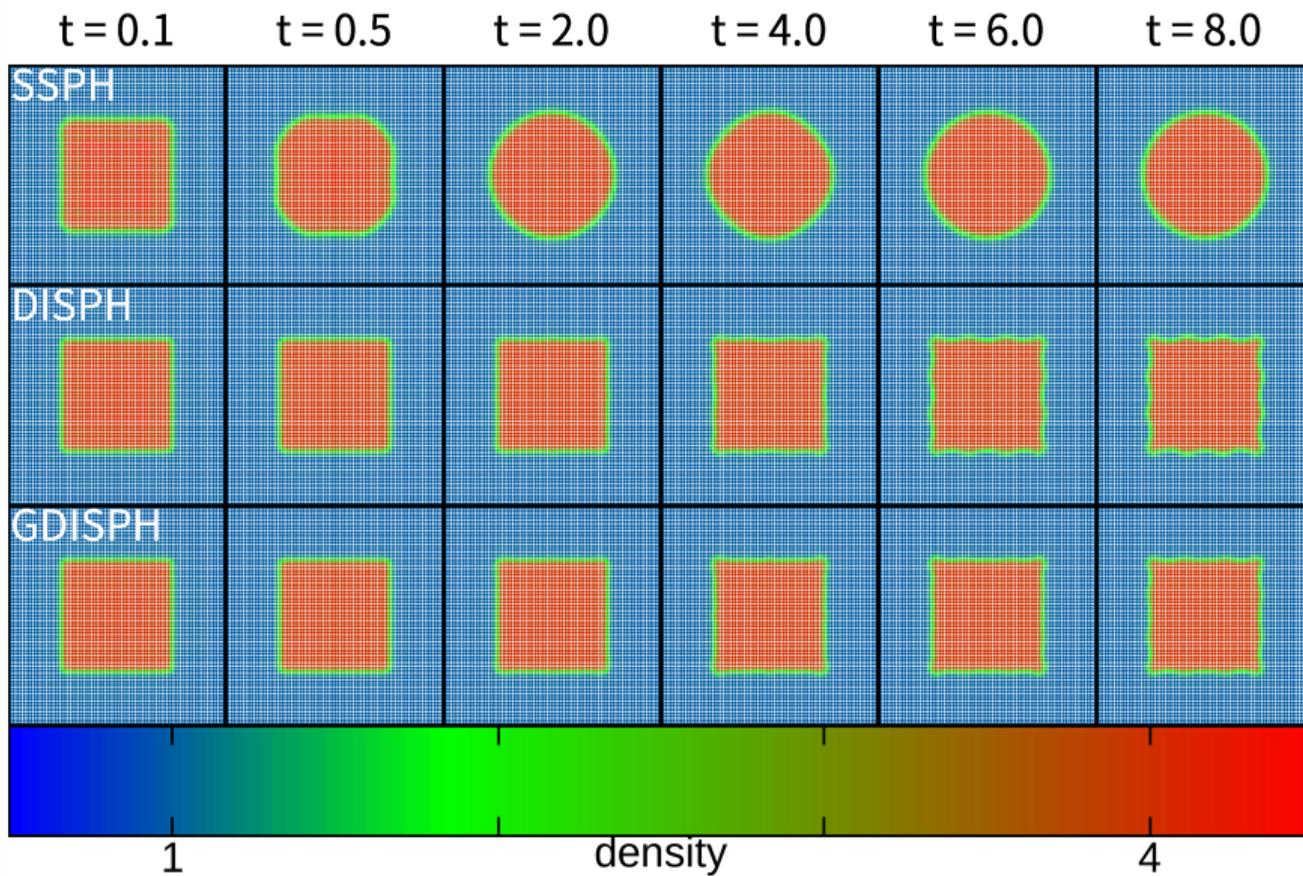
エネルギー方程式は

$$\frac{dU_i}{dt} = f_i^{grad} \sum_j^N \frac{P_{ij}^* U_i U_j}{q_i^2} \mathbf{v}_{ij} \cdot \nabla_i W_{ij}(h_i). \quad (15)$$

運動方程式は、作用反作用を満たしエネルギー保存も満たさなければならないという条件から求められる。

$$m_i \frac{d\mathbf{v}_i}{dt} = - \sum_j^N \left[f_i^{grad} \frac{P_{ij}^* U_i U_j}{q_i^2} \nabla_i W_{ij}(h_i) + f_j^{grad} \frac{P_{ij}^* U_i U_j}{q_j^2} \nabla_i W_{ij}(h_j) \right] \quad (16)$$

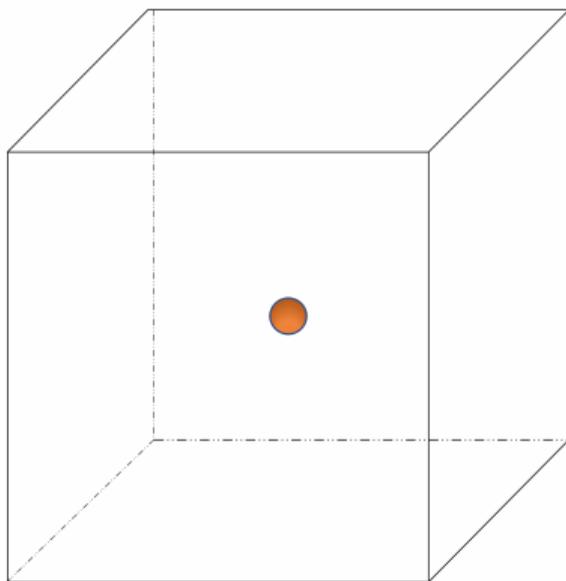
$P_{ix} = P_i$ のとき (DISPH で使用されている) は, シグマの中身の第一項の圧力は P_i 、第二項の圧力は P_j



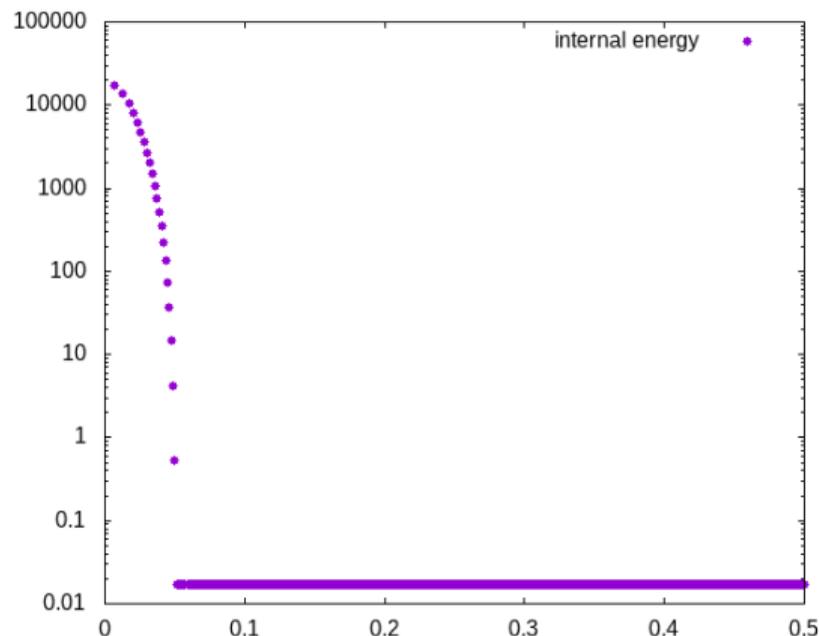
点源爆発

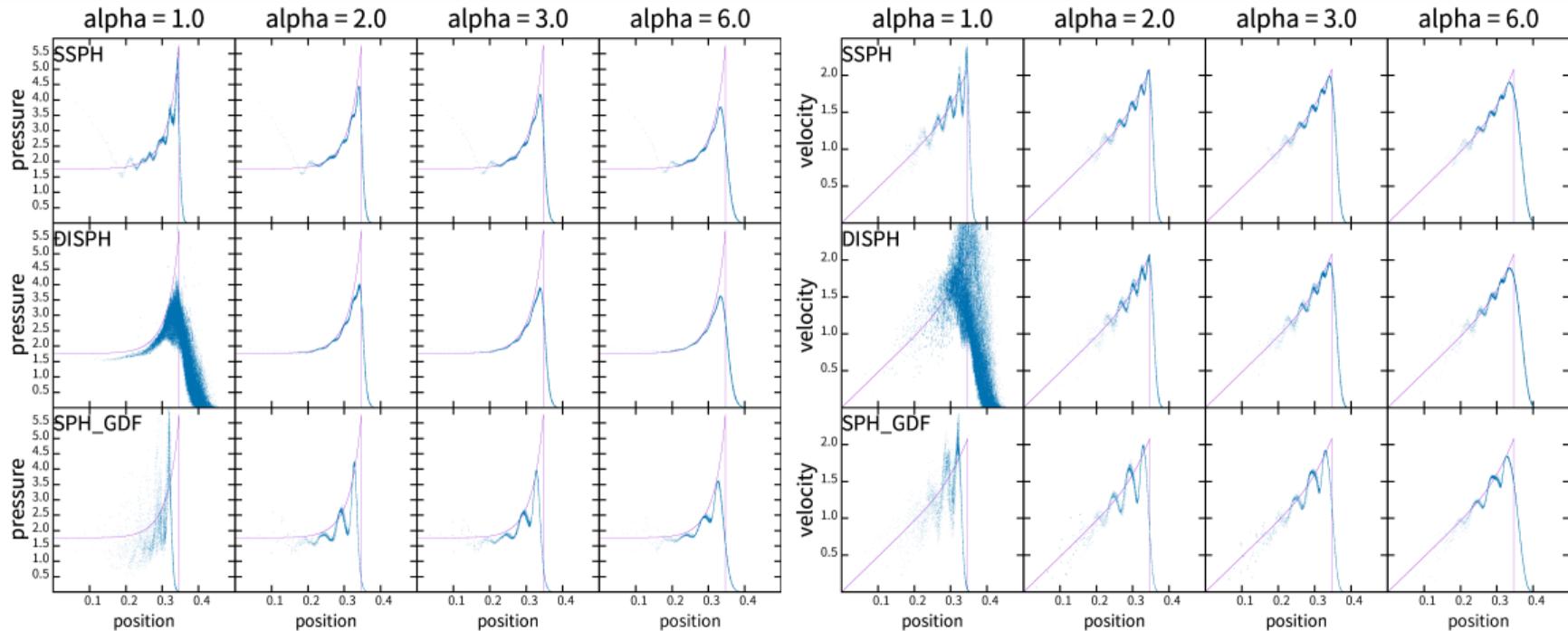
強い衝撃波が発生する 3次元の問題

$0 < x, y, z < 1$ の領域の真ん中に合計 1 のエネルギーを割り振る。密度は 1、速度は 0. 外側のエネルギーはほぼ 0

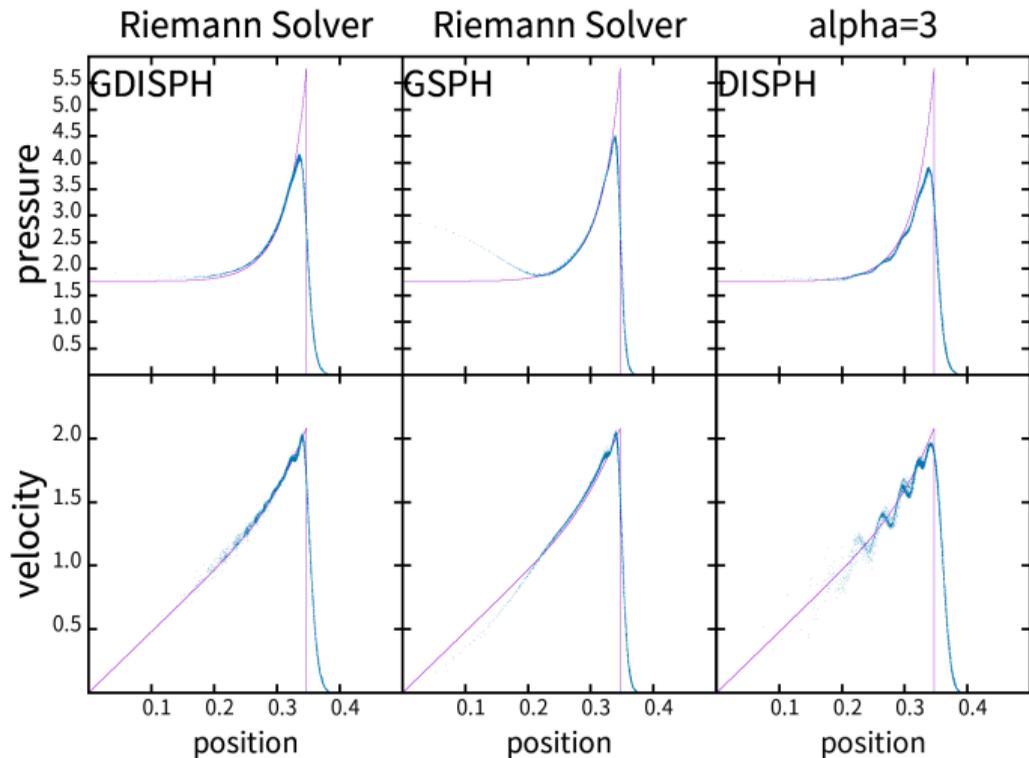


内部エネルギープロファイル





- どのスキームも、どの人工粘性係数でも**衝撃波後面で速度に大きな振動**
- **SPH_GDFのみ、圧力にも大きな振動**
- SPH と DISPH は、適切な粘性を用いれば良くも悪くも似たような結果に



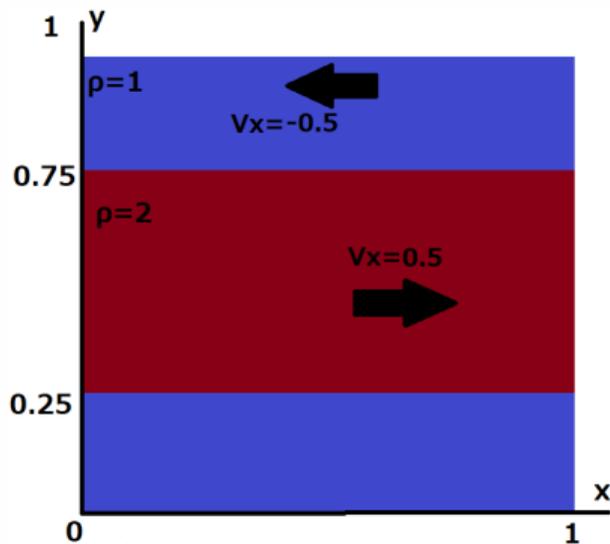
- Riemann Solver を使ったスキームはパラメータなしで速度の振動を抑えられている, 解析解とも一致
- GDISPH では低密度領域で速度に振動が発生. ただし、他のスキームも低密度領域は問題を抱えている.

GDISPH は衝撃波後面の性能は GSPH と同様 (SPH に比べて良い結果). 低密度領域では GDISPH 固有の問題が発生. ただし、他のスキームも低密度領域で固有の問題あり。

2D Kelvin-Helmholtz 不安定性

位置 $y = 0.25, y = 0.75$ のそれぞれに、 y 軸方向の速度に 6 波長分の摂動を与えている
 不安定性の成長のタイムスケール $\tau_{KH} = 0.35$ の 8 倍の $t = 2.8$ まで計算
 Balsara switch を付けて計算

初期条件



- 人工粘性項は本来衝撃波領域でのみ働いてほしいが、シア領域でも働いてしまう。
- それを防ぐため、Balsara switch がよく使われている。

Balsara switch

人工粘性項に $0.5(F_i + F_j)$ をかける。

$$F_i = \frac{|\nabla_i \cdot \mathbf{v}_i|}{|\nabla_i \cdot \mathbf{v}_i| + |\nabla_i \times \mathbf{v}_i| + 0.0001c_i/h_i}$$

GDISPH への Balsara switch の適用

- GSPH、GDISPH に Balsara switch の適用を行った例はない。
- DISPH は (非人工粘性項)+(人工粘性項) に陽に分かれているが、GDISPH は 1 つの項にまとまっていて分離していない。
- 理想は GDISPH 中の P_{ij}^* を (非粘性項)+(粘性項) に陽に分けること

実験的な手法

- (DISPH の非人工粘性項)+ $0.5(F_i + F_j)$ (GDISPH の項 - DISPH の非人工粘性項) を、GDISPH の式として用いる。

Balsara switch 付きの GDISPH

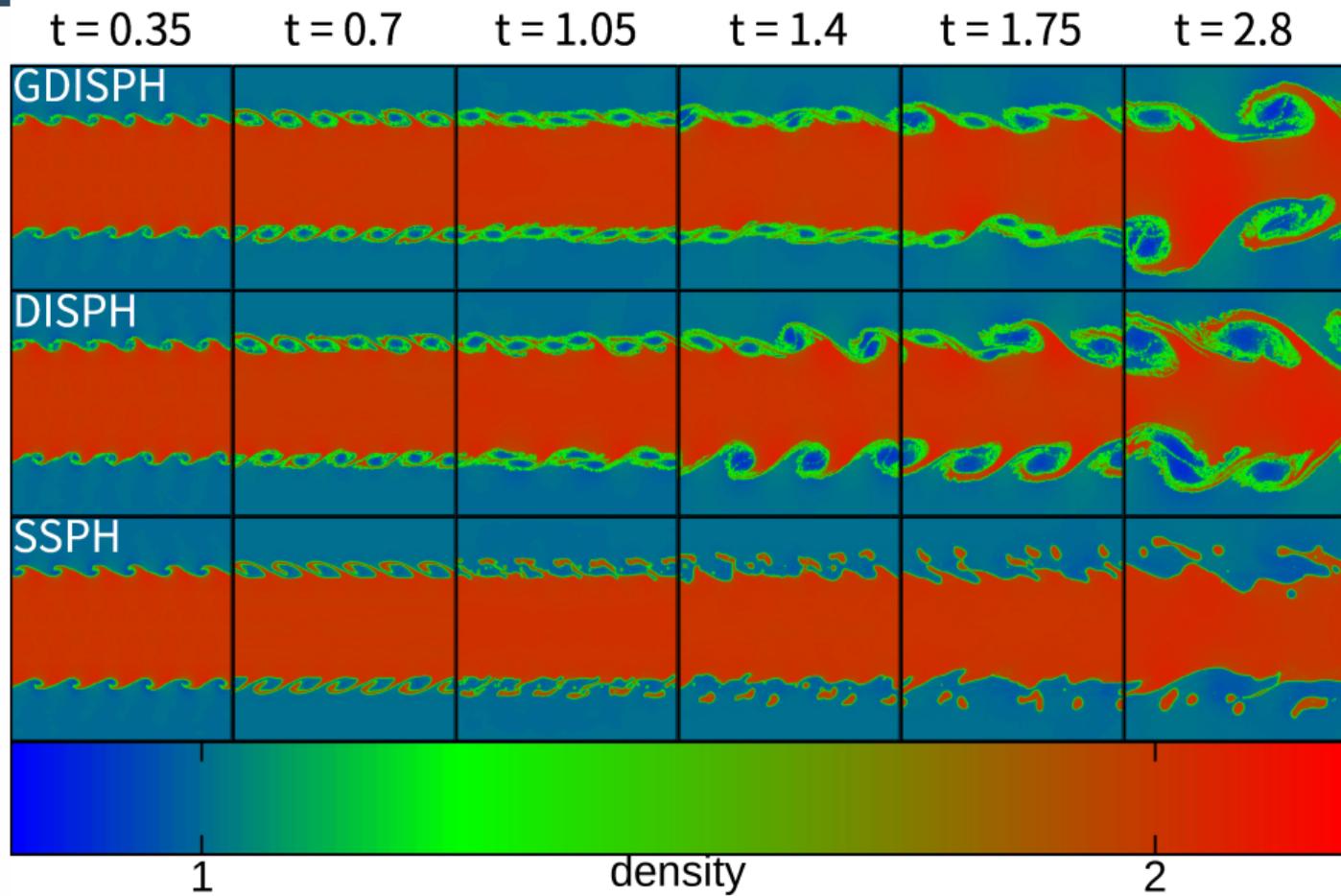
運動方程式

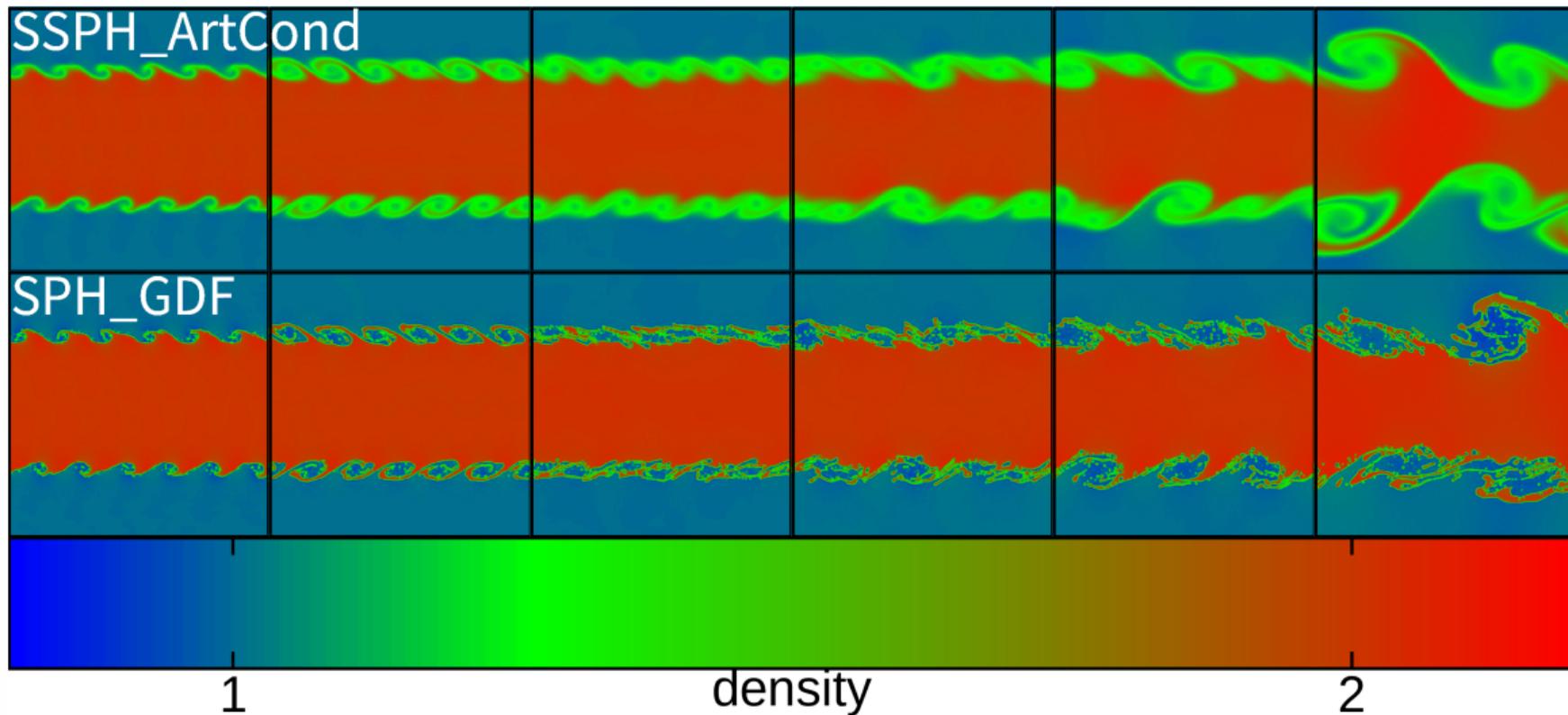
$$\begin{aligned}
 m_i \frac{d\mathbf{v}_i}{dt} = & - \sum_j^N \left[f_i^{\text{grad}} \frac{P_i U_i U_j}{q_i^2} \nabla_i W_{ij}(h_i) + f_j^{\text{grad}} \frac{P_j U_i U_j}{q_j^2} \nabla_i W_{ij}(h_j) \right] \\
 & - \sum_j^N \frac{(F_i^{\text{Balsara}} + F_j^{\text{Balsara}})}{2} \left[f_i^{\text{grad}} \frac{(P_{ij}^* - P_i) U_i U_j}{q_i^2} \nabla_i W_{ij}(h_i) + f_j^{\text{grad}} \frac{(P_{ij}^* - P_j) U_i U_j}{q_j^2} \nabla_i W_{ij}(h_j) \right]
 \end{aligned} \tag{17}$$

エネルギー方程式

$$\begin{aligned}
 \frac{dU_i}{dt} = & f_i^{\text{grad}} \sum_j^N \frac{P_i U_i U_j}{q_i^2} \mathbf{v}_{ij} \cdot \nabla_i W_{ij}(h_i) \\
 & + f_i^{\text{grad}} \sum_j^N \frac{(F_i^{\text{Balsara}} + F_j^{\text{Balsara}})}{2} \frac{(P_{ij}^* - P_i) U_i U_j}{q_i^2} \mathbf{v}_{ij} \cdot \nabla_i W_{ij}(h_i).
 \end{aligned} \tag{18}$$

どちらもシグマは一つにまとめられる



$t = 0.35$ $t = 0.7$ $t = 1.05$ $t = 1.4$ $t = 1.75$ $t = 2.8$ 

結論

- Godunov DISPH
 - DISPH に Riemann solver を組み込んだ Godunov DISPH を作ることで、接触不連続面も衝撃波もパラメータなしで扱えるようになった
 - 今後はテスト計算ではない、実際の計算での性能を他のスキームと比較していき、GDISPH の実用性について検証していきたい

出典

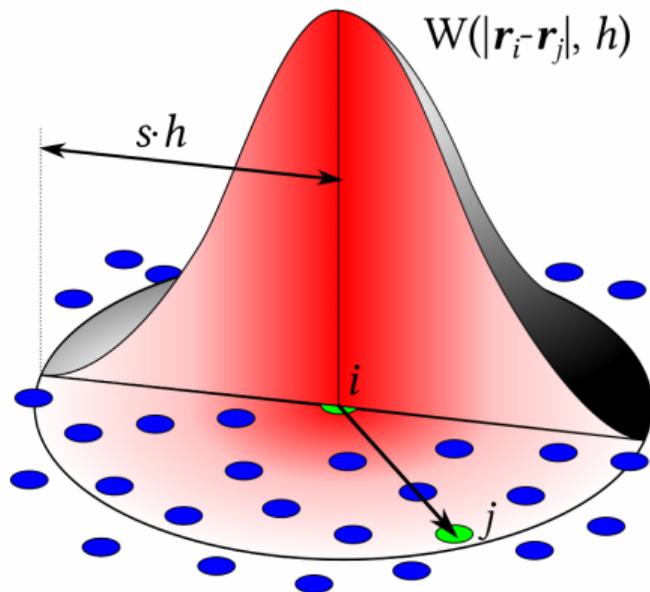


Figure: "Fancy SPH convolution scheme (verbose, modified colors scheme)" created by Jlcercos is licenced under CC BY-SA 4.0(<https://creativecommons.org/licenses/by-sa/4.0/>)

Reference I

- [Balsara, 1995] Balsara, D. S. (1995).
Von neumann stability analysis of smoothed particle hydrodynamics— suggestions for optimal algorithms.
Journal of Computational Physics, 121(2):357–372.
- [Brookshaw, 1985] Brookshaw, L. (1985).
A method of calculating radiative heat diffusion in particle simulations.
Publications of the Astronomical Society of Australia, 6(2):2070.
- [Cha and Whitworth, 2003] Cha, S.-H. and Whitworth, A. P. (2003).
Implementations and tests of godunov-type particle hydrodynamics.
Monthly Notices of the Royal Astronomical Society, 340(1):73–90.
- [García-Senz et al., 2012] García-Senz, D., Cabezón, R. M., and Escartín, J. A. (2012).
Improving smoothed particle hydrodynamics with an integral approach to calculating gradients.
Astronomy & astrophysics, 538:A9.
- [Inutsuka, 2002] Inutsuka, S.-i. (2002).
Reformulation of smoothed particle hydrodynamics with riemann solver.
Journal of Computational Physics, 179.
- [Price, 2008] Price, D. J. (2008).
Modelling discontinuities and kelvin–helmholtz instabilities in sph.
Journal of Computational Physics, 227(24):10040–10057.
- [Ritchie and Thomas, 2001] Ritchie, B. W. and Thomas, P. A. (2001).
Multiphase smoothed-particle hydrodynamics.
Monthly Notices of the Royal Astronomical Society, 323(3):743–756.

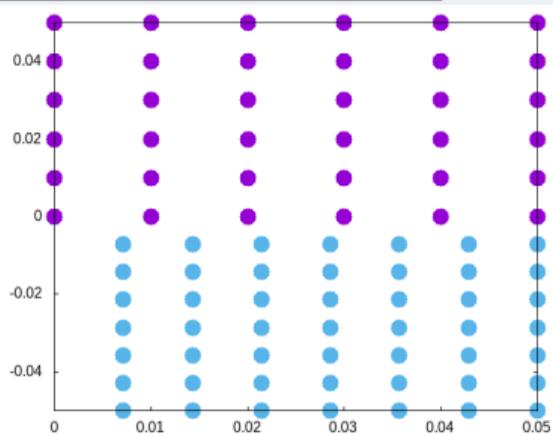
Reference II

- [Saitoh and Makino, 2013] Saitoh, T. R. and Makino, J. (2013).
A DENSITY-INDEPENDENT FORMULATION OF SMOOTHED PARTICLE HYDRODYNAMICS.
The Astrophysical Journal, 768(1):44.
- [Wadsley et al., 2017] Wadsley, J. W., Keller, B. W., and Quinn, T. R. (2017).
Gasoline2: a modern smoothed particle hydrodynamics code.
Monthly Notices of the Royal Astronomical Society, 471(2):2357–2369.

原因の予想

ノイズの正体

各粒子における、空間 0 次の誤差や $O(h^2)$ の誤差のかかり方の違いによるもの。
各粒子間の微妙な数値のずれが、
非常に波長の小さい摂動となる。



ノイズが大きく成長する理由

- balsara switch の導入によってシア領域での 粘性がほぼ 0 になる。
- 恐らく物理的には、流体の粘性が大きくなると、KH 不安定性が起こる最小の波長も大きくなる。

粘性が 0 ならば、
どのような波長に対して不安定性成長

- 更に、導出中に密度の微分を使用

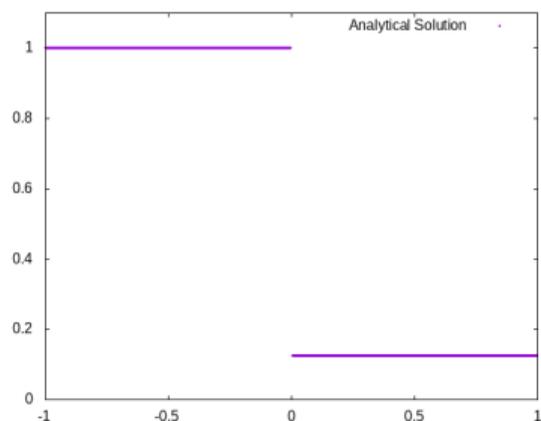
$$-\frac{\nabla P}{\rho} = -\frac{1}{\rho^{2-\sigma}} \nabla \left(\frac{P}{\rho^{\sigma-1}} \right) - \frac{P}{\rho^\sigma} \nabla \rho^{\sigma-1} \quad (19)$$

上記の式に $\sigma = 2$ を代入したものを使用. 物理的に密度不連続となる接触不連続面では、密度の空間微分を経由して導出された式は正しくないはず [Saitoh and Makino, 2013]

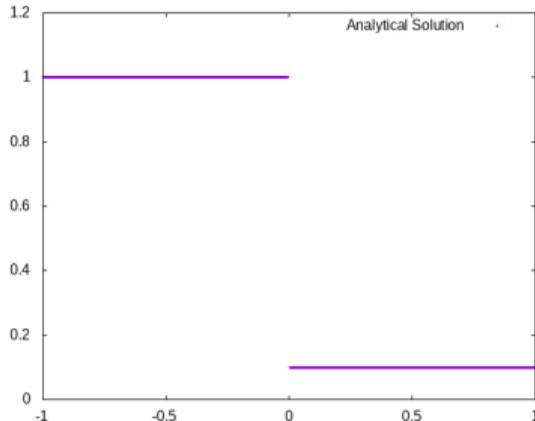
Riemann 問題

$$\begin{cases} \rho = 1, P = 1, v = 0 & x < 0 \text{ のとき} \\ \rho = 0.125, P = 0.1, v = 0 & x > 0 \text{ のとき} \end{cases} \quad (20)$$

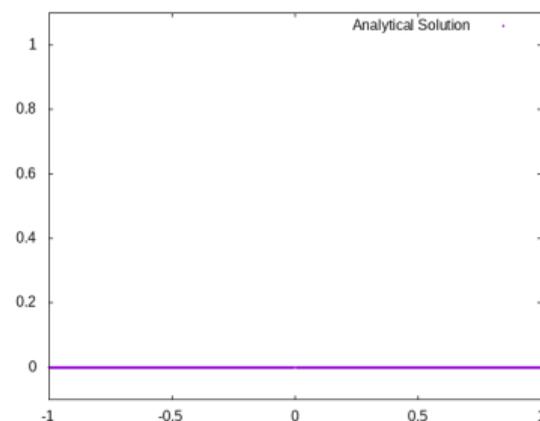
密度



圧力



速度

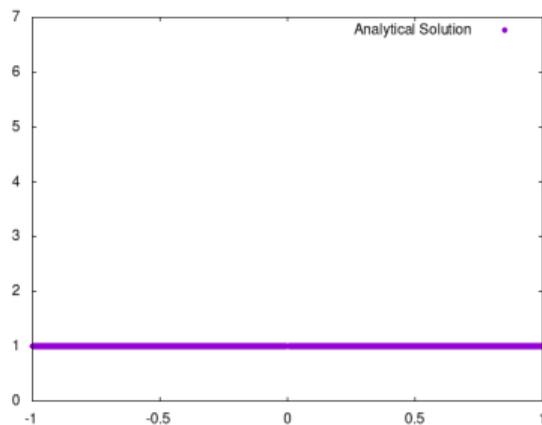


Riemann 問題

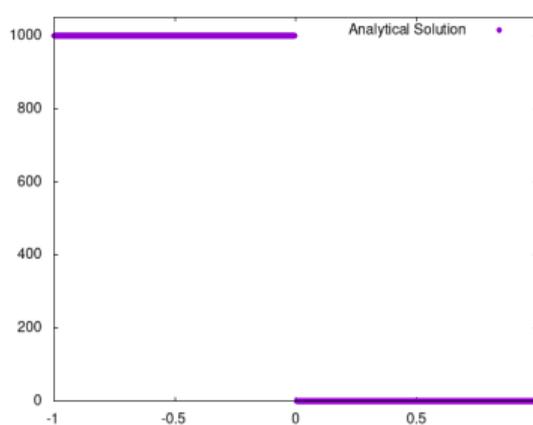
強い衝撃波が発生する問題

$$\begin{cases} \rho = 1, P = 1000, v = 0 & x < 0 \text{ のとき} \\ \rho = 1, P = 0.1, v = 0 & x > 0 \text{ のとき} \end{cases} \quad (21)$$

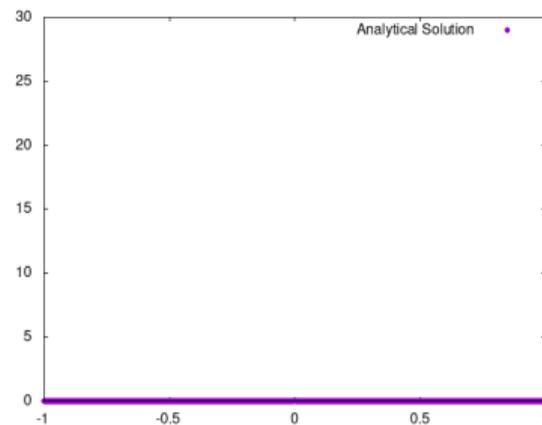
密度



圧力



速度



SPH GDF 法

- Geometric Density Average Force (GDF)([Wadsley et al., 2017])
- Gasoline2 で用いられているおり、SPH 法よりも接触不連続面の扱いが良い

GDF 法の運動方程式導出

- 流体の運動方程式を変形する

$$-\frac{\nabla P}{\rho} = -\frac{1}{\rho^{2-\sigma}} \nabla \left(\frac{P}{\rho^{\sigma-1}} \right) - \frac{P}{\rho^{\sigma}} \nabla \rho^{\sigma-1} \quad (22)$$

- $\sigma = 1$ のとき (GDF 導出で用いる, 密度の空間微分がない)

$$-\frac{\nabla P}{\rho} = -\frac{1}{\rho} \nabla P - \frac{P}{\rho} \nabla 1 \quad (23)$$

- $\sigma = 2$ のとき (通常の SPH で使用, 密度の空間微分がある)

$$-\frac{\nabla P}{\rho} = -\nabla \left(\frac{P}{\rho} \right) - \frac{P}{\rho^2} \nabla \rho \quad (24)$$

- これを $F(\mathbf{r}) = \sum_j \frac{m_j}{\rho_j} F_j W(|\mathbf{r} - \mathbf{r}_j|, h(\mathbf{r}))$ で離散化する (式 (??)) と

$$\frac{d\mathbf{v}_i}{dt} = - \sum_j m_j \left(\frac{P_i}{\rho_i^\sigma \rho_j^{2-\sigma}} + \frac{P_j}{\rho_i^{2-\sigma} \rho_j^\sigma} \right) \nabla_i W_{ij}(h) \quad (25)$$

- $\sigma = 1$ を代入 (よく用いられている standard SPH は $\sigma = 2$ の時と同様の形)

$$\frac{d\mathbf{v}_i}{dt} = - \sum_j m_j \left(\frac{P_i + P_j}{\rho_i \rho_j} \right) \nabla_i W_{ij}(h) \quad (26)$$

エネルギー方程式も同様の形のものを使用

$$\frac{du_i}{dt} = \sum_j m_j \left(\frac{P_i}{\rho_i \rho_j} \right) \mathbf{v}_{ij} \cdot \nabla_i W_{ij}(h) \quad (27)$$

DISPH 法

- [Saitoh and Makino, 2013] によって考案された手法
- 接触不連続面で連続となる圧力を用いて粒子の体積要素を近似し、圧力の空間微分を使用
- 接触不連続面の扱いが良くなる

SPH の物理量

$$F(\mathbf{r}_i) \approx \int F(\mathbf{r}')W(|\mathbf{r}_i - \mathbf{r}'|, h)d^3\mathbf{r}'$$

$$\approx \sum_j \frac{m_j}{\rho_j} F_j W(|\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j|, h) \quad (28)$$

$$\rho_i = \sum_j m_j W_{ij}(h) \quad (29)$$

導出中で $\nabla\rho$ を使用

DISPH の物理量

$$F(\mathbf{r}_i) \approx \int F(\mathbf{r}')W(|\mathbf{r}_i - \mathbf{r}'|, h)d^3\mathbf{r}'$$

$$\approx \sum_j \frac{U_j}{q_j} F_j W(|\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j|, h) \quad (30)$$

$$q_i = \sum_j U_j W_{ij}(h) = \frac{P_i}{(\gamma - 1)} \quad (31)$$

導出中で $\nabla\rho$ は使わず、 ∇q を使用. 密度に陽に依存しない

Godunov SPH 法

- [Inutsuka, 2002] によって考案された手法。
- 粒子の相互作用計算の際に Riemann solver を使用
- ただし通常の SPH よりも計算コスト高, コンパクトではないガウシアンカーネルを使う必要性あり
 - 本発表では [Cha and Whitworth, 2003] によって提案されている GSPH Case3 を使用

GSPH Case3 の運動方程式, エネルギー方程式

$$\frac{d\mathbf{v}_i}{dt} = -\sum_j m_j p_{ij}^* \left[\frac{1}{\rho_i^2} \nabla_i W_{ij}(h_i) + \frac{1}{\rho_j^2} \nabla_i W_{ij}(h_j) \right] \quad (32)$$

$$\frac{du_i}{dt} = -\sum_j m_j p_{ij}^* (\mathbf{v}_{ij}^* - \mathbf{v}_i) \cdot \left[\frac{1}{\rho_i^2} \nabla_i W_{ij}(h_i) + \frac{1}{\rho_j^2} \nabla_i W_{ij}(h_j) \right] \quad (33)$$

ある物理量 F に対して、その重みつき平均を F_{ij}^* を

$$\begin{aligned} & \int \frac{F(\mathbf{r})}{\rho^2(\mathbf{r})} W(|\mathbf{r} - \mathbf{r}_i|, h(r)) W(|\mathbf{r} - \mathbf{r}_j|, h(r)) d^3r \\ &= F_{ij}^* \int \frac{1}{\rho^2(\mathbf{r})} W(|\mathbf{r} - \mathbf{r}_i|, h(r)) W(|\mathbf{r} - \mathbf{r}_j|, h(r)) d^3r \end{aligned} \quad (34)$$

を満たすように与えられるとする。これを良い精度で満たすような F_{ij}^* を用いる。

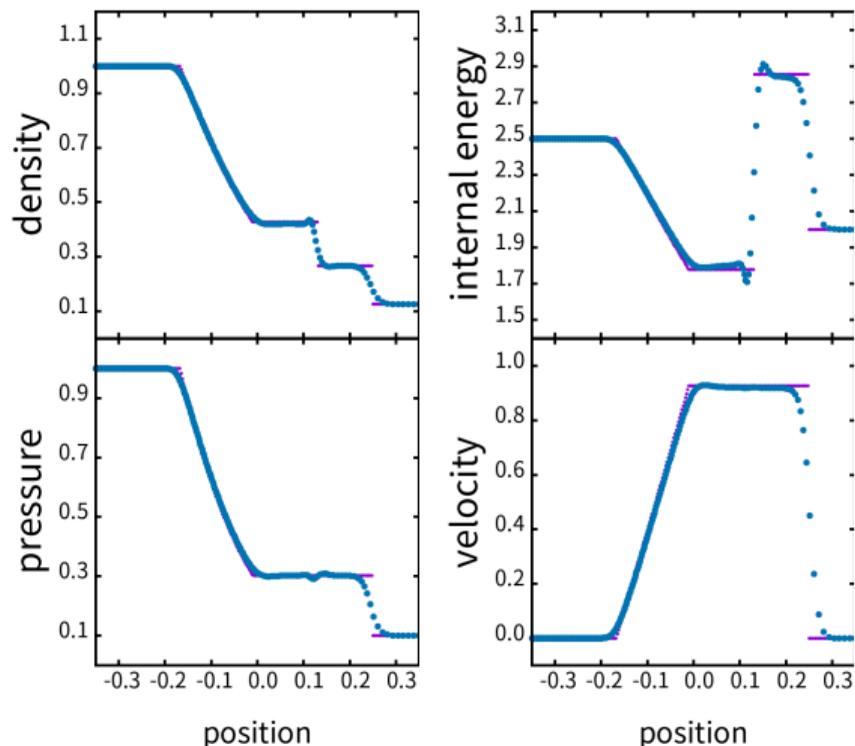
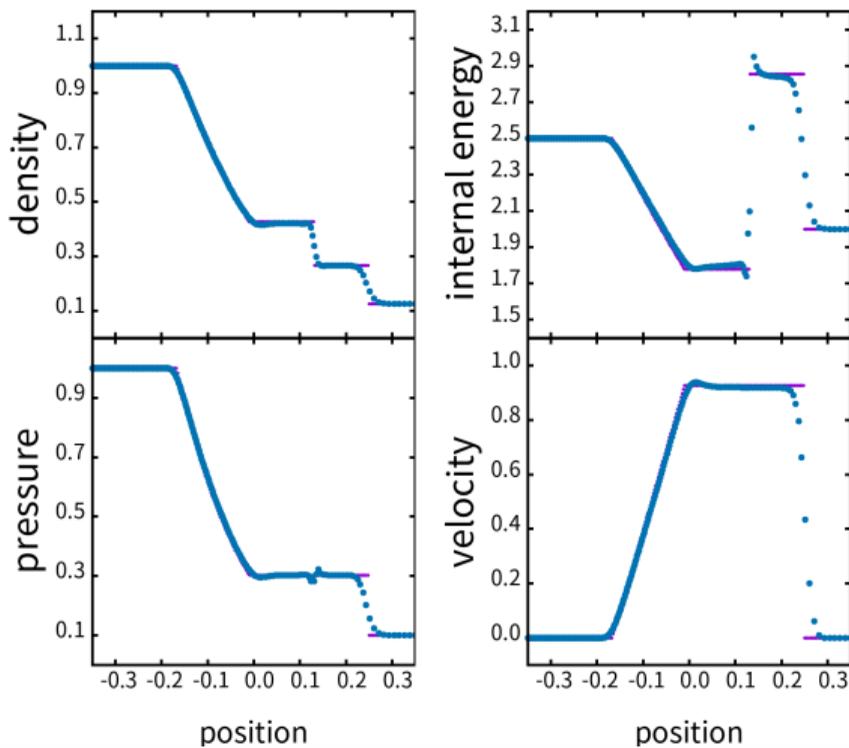
GSPH Case3-2 の運動方程式, エネルギー方程式

$$\frac{d\mathbf{v}_i}{dt} = -\sum_j m_j \mathbf{p}_{ij}^* \left[\frac{1}{\rho_i^2} \nabla_i W_{ij}(h_i) + \frac{1}{\rho_j^2} \nabla_i W_{ij}(h_j) \right] \quad (35)$$

$$\frac{du_i}{dt} = -\sum_j m_j \mathbf{p}_{ij}^* \left(\frac{\mathbf{v}_i + \mathbf{v}_j}{2} - \mathbf{v}_i \right) \cdot \left[\frac{1}{\rho_i^2} \nabla_i W_{ij}(h_i) + \frac{1}{\rho_j^2} \nabla_i W_{ij}(h_j) \right] \quad (36)$$

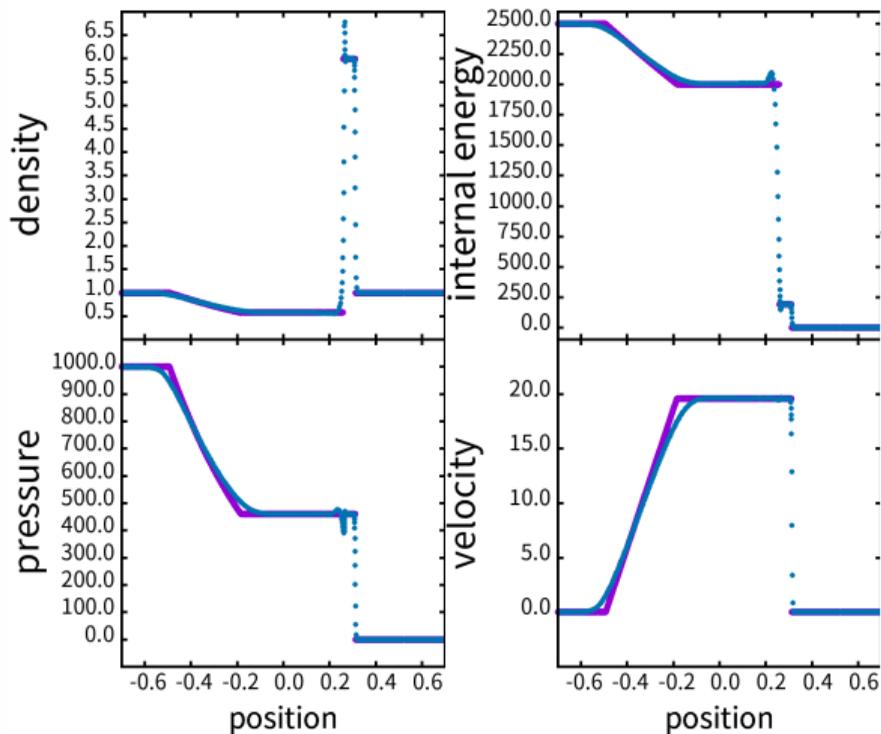
衝撃波管問題

GSPH Case3

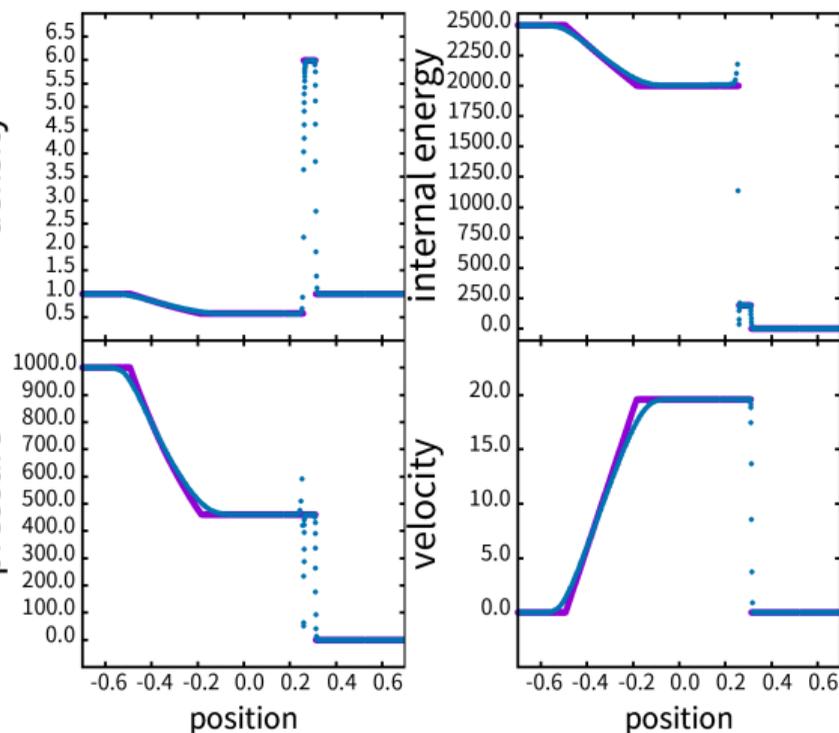
GSPH Case3-2 ($v_{ij}^* = \frac{v_i + v_j}{2}$)

強い衝撃波 (初期条件で 10^4 の圧力差)

GSPH Case3



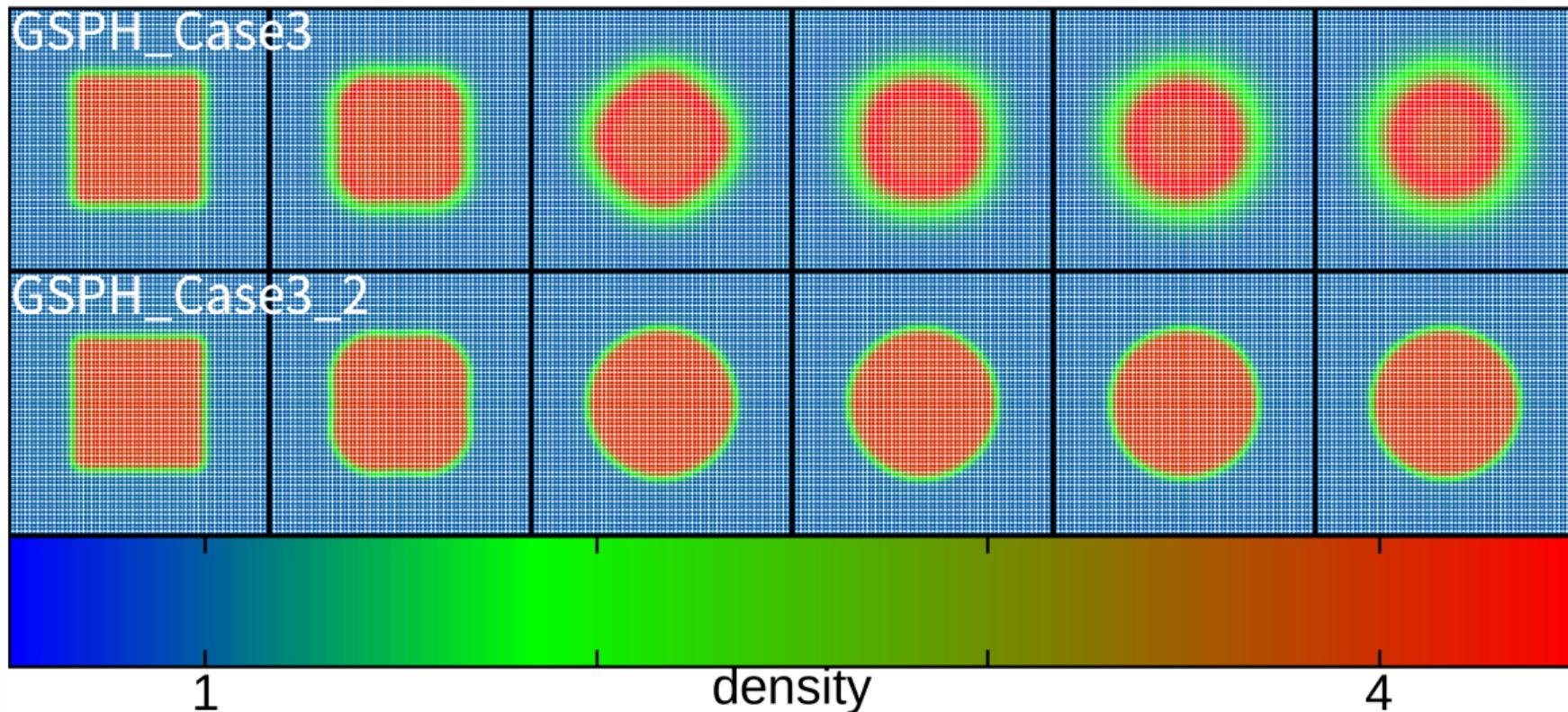
GSPH Case3-2 ($v_{ij}^* = \frac{v_i + v_j}{2}$)

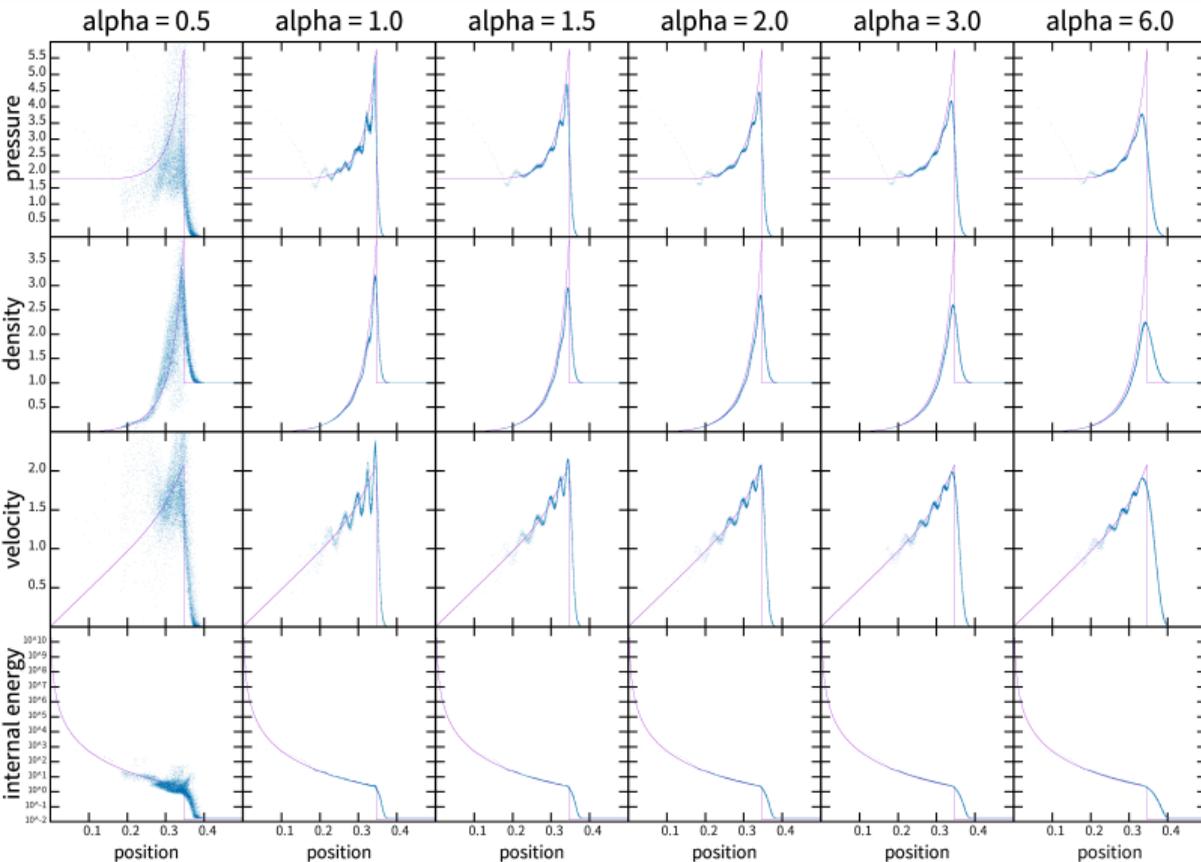


$t = 0.1$ $t = 0.5$ $t = 2.0$ $t = 4.0$ $t = 6.0$ $t = 8.0$

GSPH_Case3

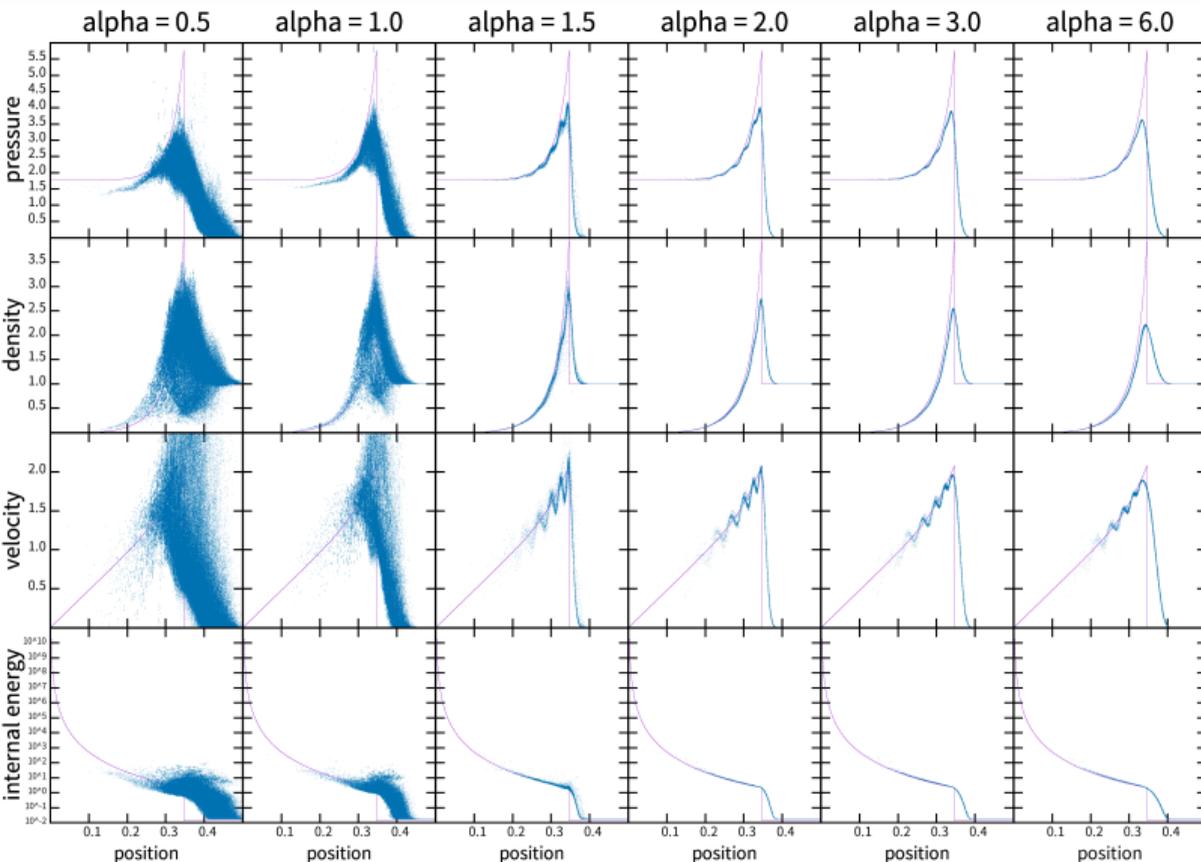
GSPH_Case3_2





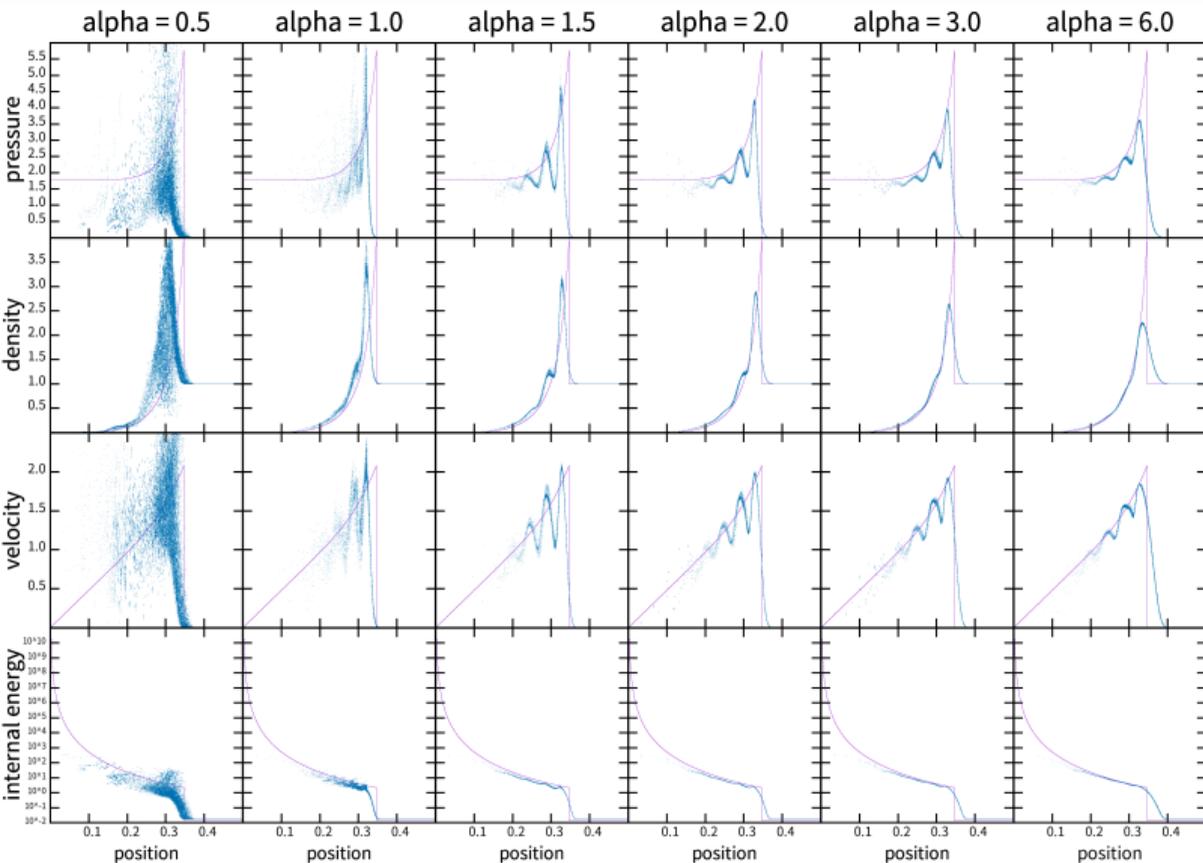
SSPH

- 人工粘性係数小さいとノイズが大きくなる。大きすぎると解が鈍る。
- おおむね解析解と一致しているが、人工粘性強くしても速度で振動が発生
- 圧力にも振動がある
- 低密度領域の圧力に大きな誤差
- 衝撃波後面での密度が解析解と微妙に一致していない



DISPH

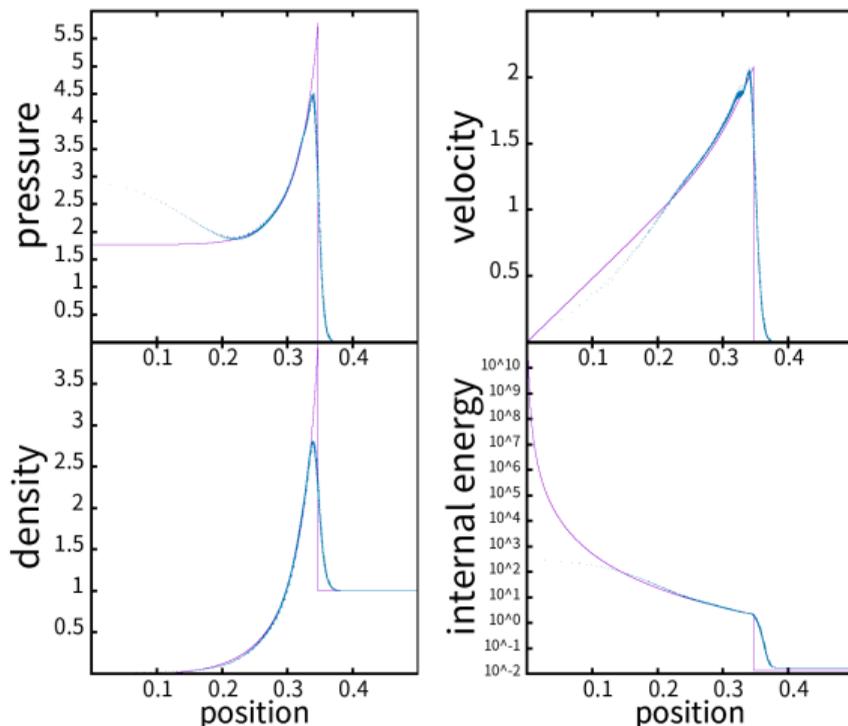
- DISPH は強い衝撃波に対して不得意なはず (導出中で圧力の連続性、空間微分可能性を仮定) だが、適切な粘性があれば十分な性能
- 適切な粘性であれば、基本的に SPH と似たような結果
- SPH との違いとしては低密度領域での圧力の誤差が比較的抑えられている



SPH_GDF

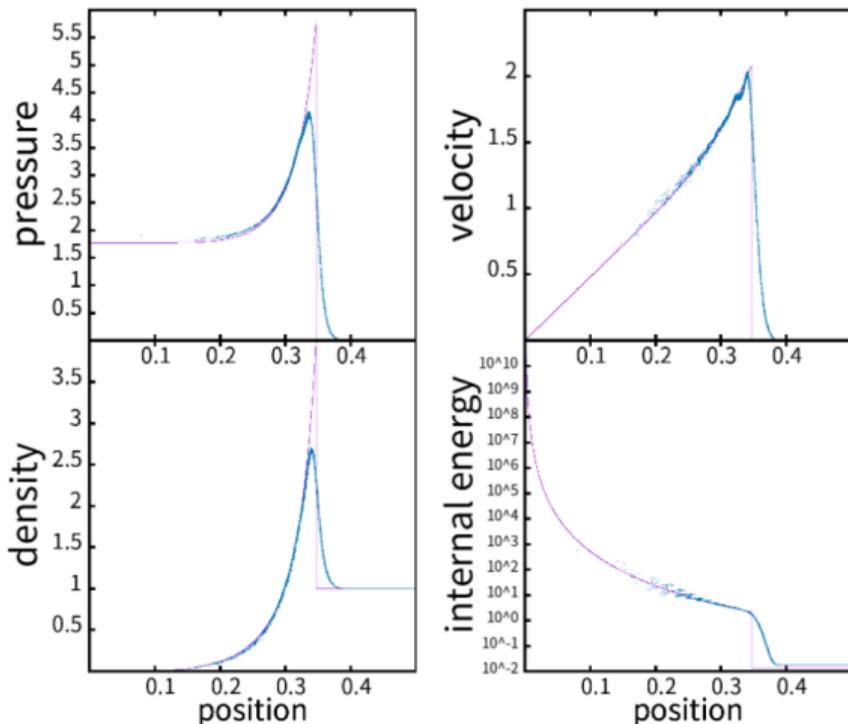
- SPH,DISPH と比較して**大きな振動**が圧力, 速度で発生.
- 粘性を大きくしても振動は発生したまま, 全体的に解は大きく鈍ってしまう.
- **解析解との微妙なずれ**が発生している

GSPH Case3



- パラメータなしで、SPHで見られた衝撃波後面での速度の振動や密度の解析解とのずれがなくなっている
- 低密度領域の圧力は SPH と同様誤差がある
- 低密度領域の速度に比較的大きな誤差

GDISPH



- SPHと違ってパラメータなしで速度の振動を抑えられている
- SPHと違って、衝撃波後面での密度の値もパラメータなしで解析解と一致
- SPHと違って、低密度領域の圧力誤差が抑えられている
- 低密度領域で速度、内部エネルギーに振動が発生

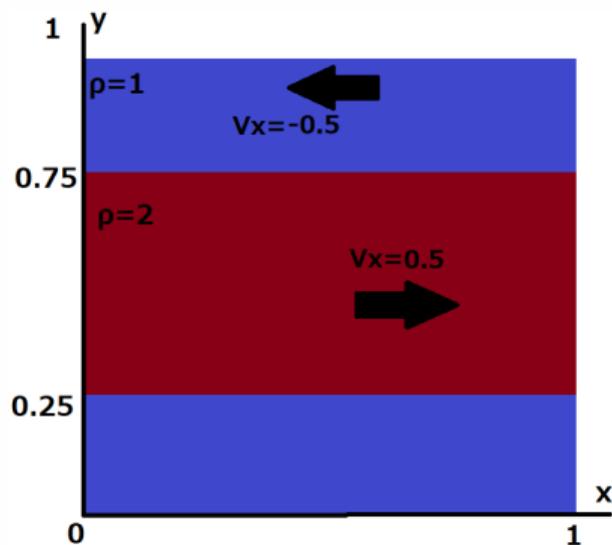
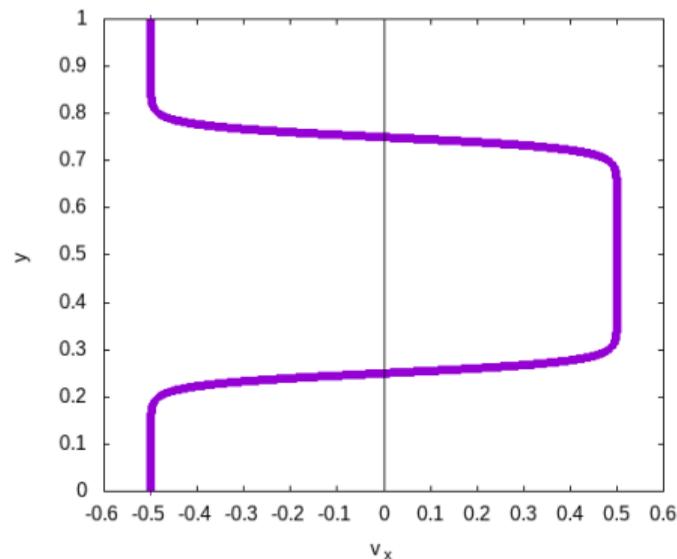
GDISPHは衝撃波後面の性能はGSPHと同様(SPHに比べて良い結果). 低密度領域ではGDISPH固有の問題が発生。ただし、他のスキームも低密度領域で固有の問題あり。

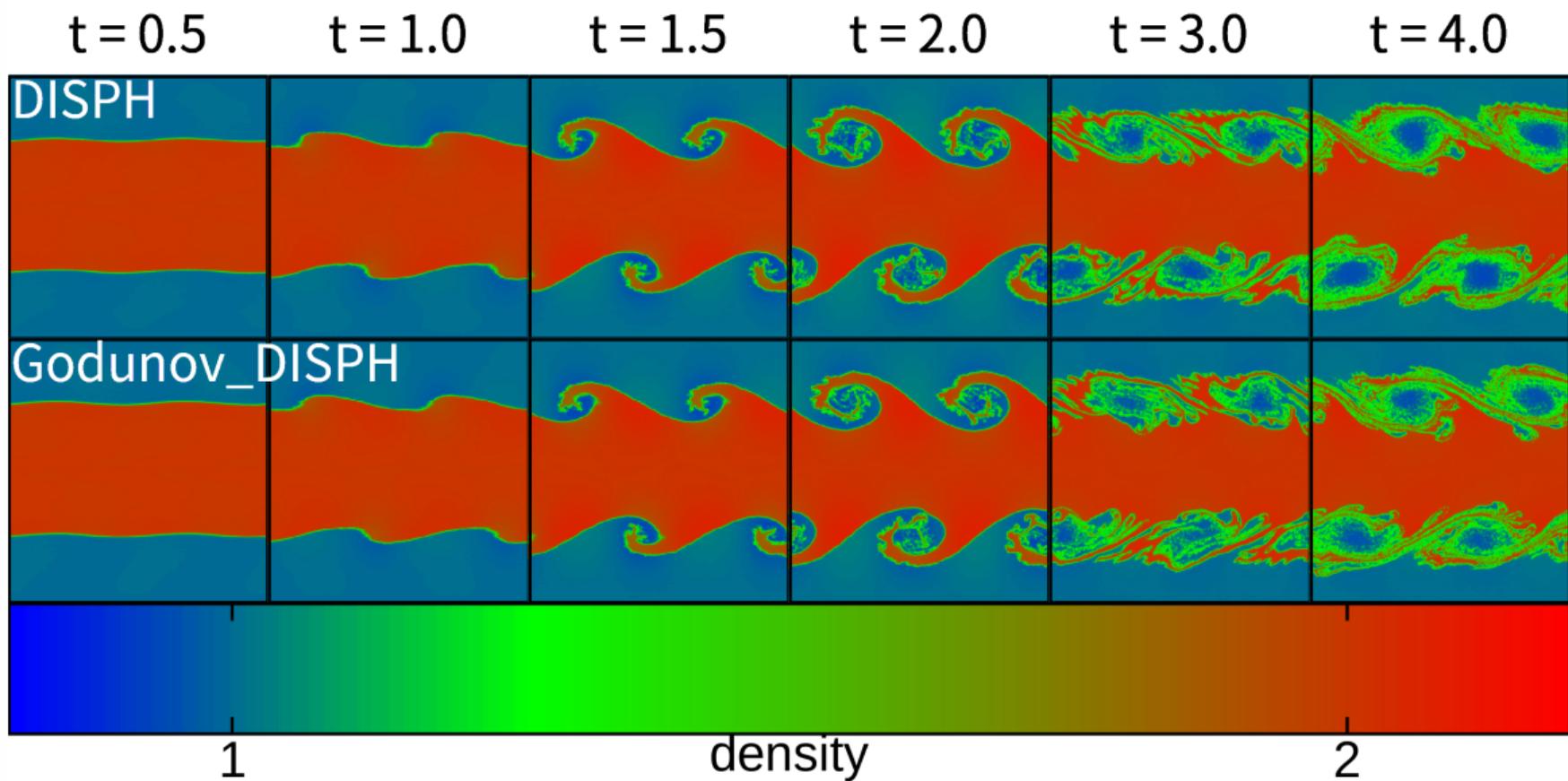
シア速度を滑らかに遷移させる

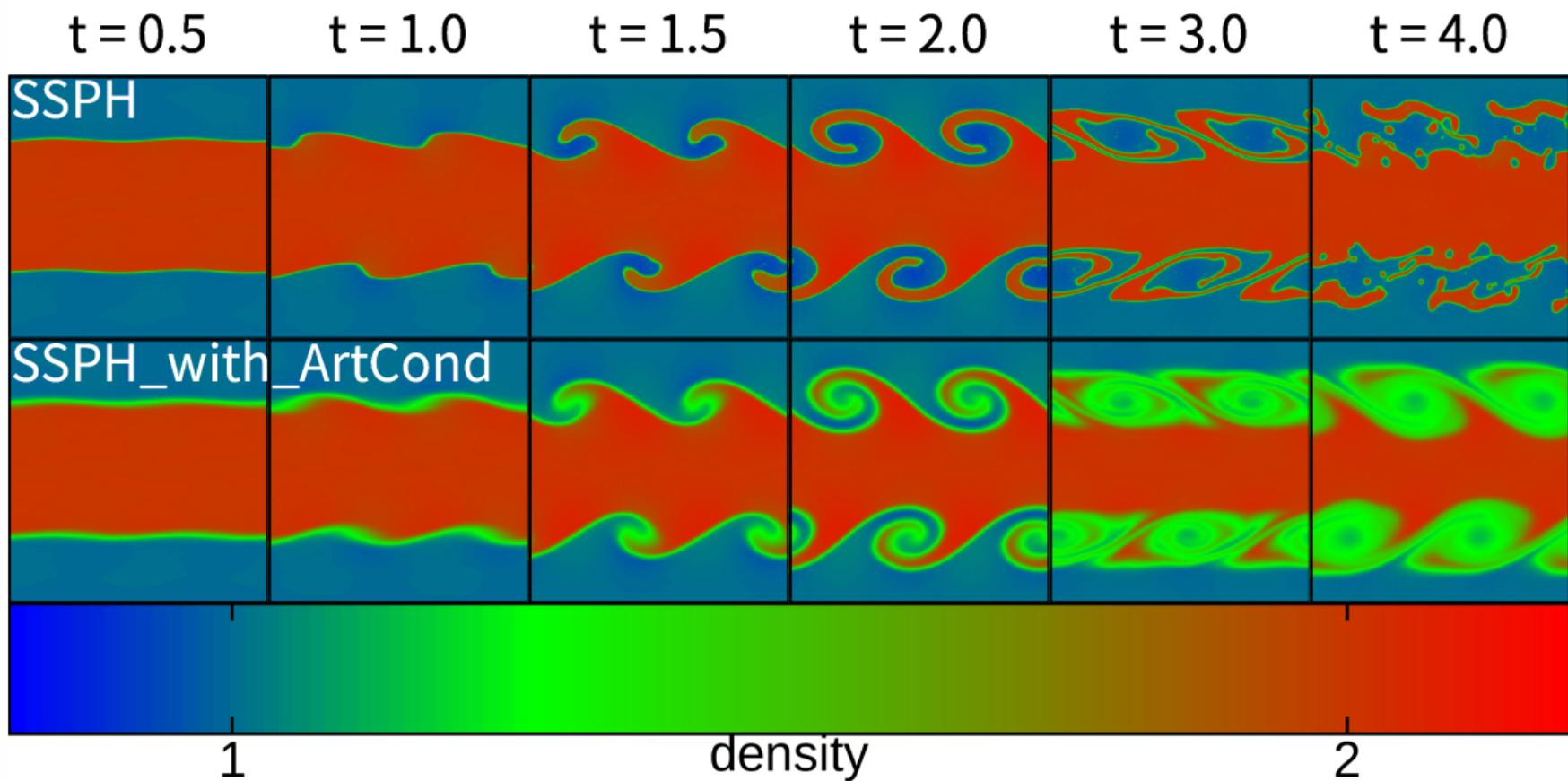
$$R(y) = \frac{1}{1 + \exp[-2(y - 0.25)/0.025]} \frac{1}{1 + \exp[2(y - 0.75)/0.025]} \quad (37)$$

$$v_x(y) = v_{x,l} + R(y)[v_{x,h} - v_{x,l}] \quad (38)$$

初期条件

 x 軸方向の速度





改善策

- どのような状況においても、物理的な摂動による不安定性の成長は許し、数値的なノイズによる摂動の成長は抑える。
→ balsara switch の強さを調節することで実現を目指す。

Balsara switch

- 人工粘性項に $0.5(F_i + F_j)$ をかける。

$$F_i = \frac{|\nabla_i \cdot \mathbf{v}_i|}{|\nabla_i \cdot \mathbf{v}_i| + |\nabla_i \times \mathbf{v}_i| + 0.0001c_i/h_i} \quad (39)$$

我々の提案手法

- F_i, F_j の代わりに F'_i, F'_j を用いる。
- β は $[0, 1]$ の実数を取る任意パラメータ。 $\beta = 1$ で balsara switch オン $\beta = 0$ で balsara switch オフ

$$F'_i = 1 + \beta(F_i - 1) \quad (40)$$

粘性を用いる理由

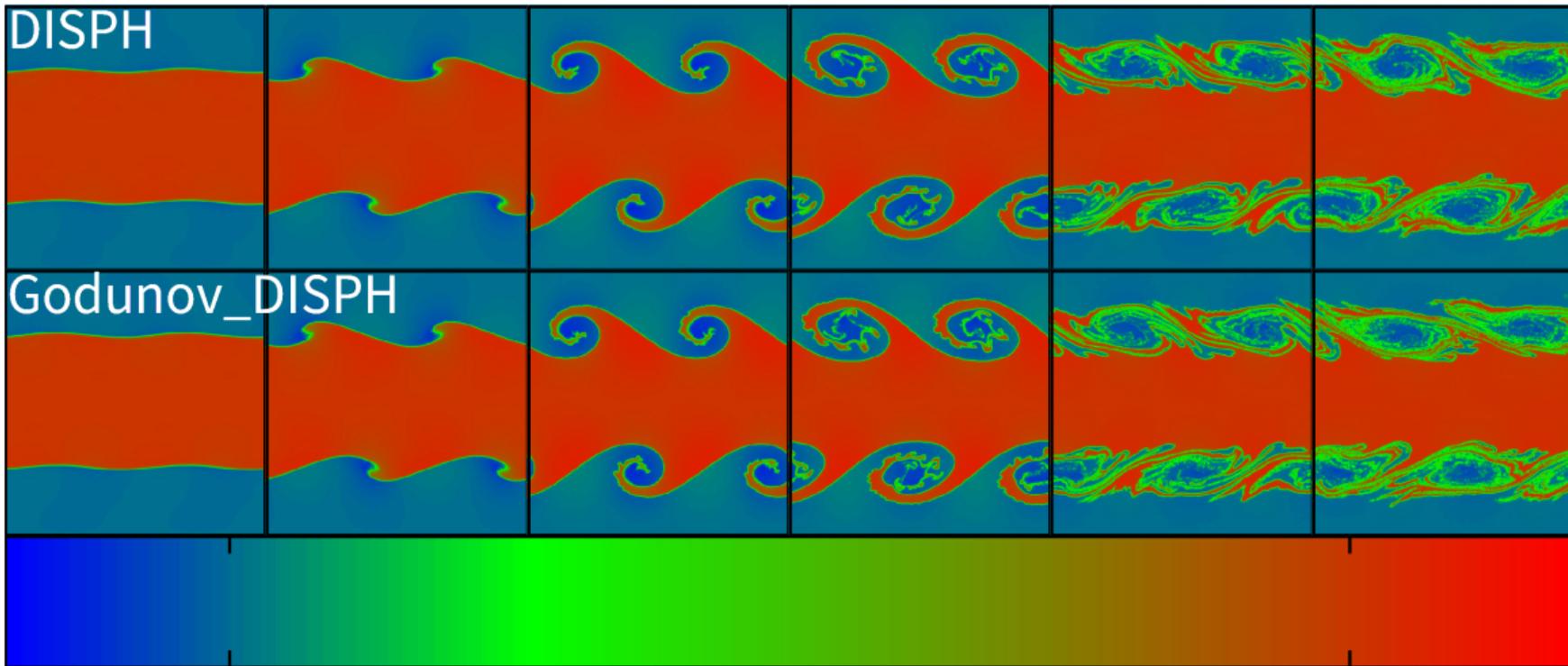
- エネルギー拡散項は密度が同じになるよう働き、粘性項は速度が同じになるように働く。シア領域ではなるべく働かないようにしたい。
 - **少ない拡散 or 粘性で**、粒子間距離程度の波長の擾動の成長を抑えたい
 - エネルギー拡散項付き or 粘性項付きの流体方程式の線形解析を行うことで調べたい。今後の課題
- KH 不安定性のタイムスケールを見ると、密度の均質化よりも**シア速度の均質化のほうが KH 不安定性に与える影響が強そう**
 - **粘性のほうがより効果的にノイズの成長を抑えられると予想できる**

$$\tau_{kh} = \frac{\lambda(\rho_h + \rho_l)}{\sqrt{\rho_h \rho_l} |v_{x,h} - v_{x,l}|} \quad (41)$$

$t = 0.5$ $t = 1.0$ $t = 1.5$ $t = 2.0$ $t = 3.0$ $t = 4.0$

DISPH

Godunov_DISPH



1

density

2

$t = 0.5$ $t = 1.0$ $t = 1.5$ $t = 2.0$ $t = 3.0$ $t = 4.0$

SSPH

SSPH_with_ArtCond

1

density

2