

# ケプラー方程式の 高速高精度解法

福島登志夫(国立天文台)

ResearchGate Fukushima [検索](#)

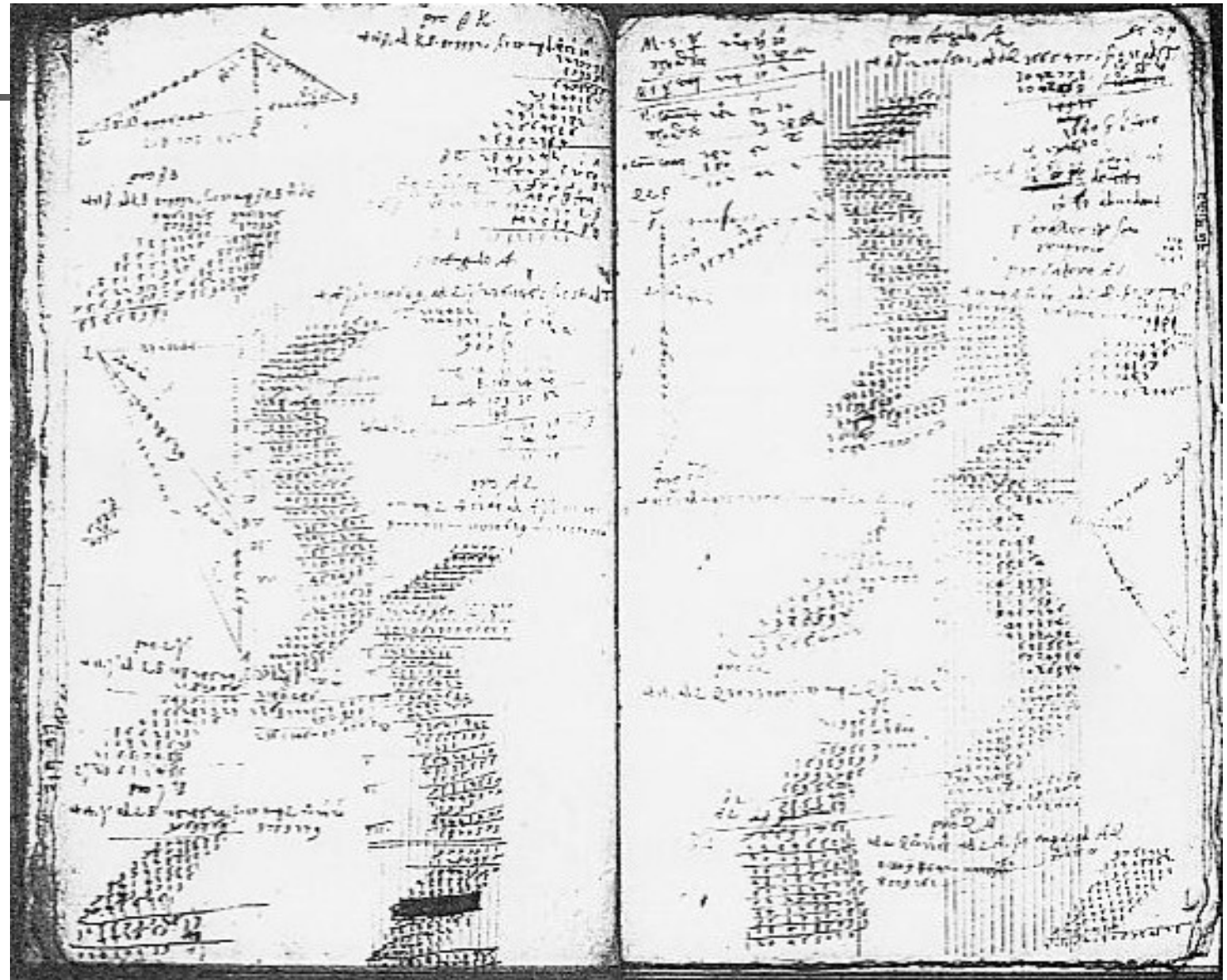
T. Fukushima 1996, 1997a, 1997b, 1997c, 1998, 1999

# ケプラー

- ヨハネス・ケプラー  
(1571-1630)
- ケプラーの法則
- 占星術も
- ケプラー方程式
- 計算魔



# ケプラーの計算ノート



# ケプラー方程式

- 史上初の超越方程式

- 楕円型  $E - e \sin E = M \equiv n(t - T)$

- 放物型  $\tau + \frac{\tau^3}{3} = M_P \equiv n_P(t - T)$

- 双曲型  $e \sinh F - F = M_H \equiv n(t - T)$

- 拡張楕円型、拡張双曲型、ガウス型、普遍

# ケプラー運動

- ニュートン力学における**二体問題**の解

- 物理学3大厳密解の一つ

- 重力定数  $\mu = G(M + m)$

$$\frac{d^2 \mathbf{x}}{dt^2} = \frac{-\mu \mathbf{x}}{|\mathbf{x}|^3}$$

- 軌道要素 = 運動の6定数

- 軌道の大きさや形  $a, e$

- 軌道面の向き  $\Omega, I, \omega$

- 軌道上の位置  $T$

- 解が解析的に書けない → **ケプラー方程式**



# 物理学の3大厳密解

---

- 調和振動子: 三角関数
- 二体問題: ケプラー運動 (円錐曲線)
  - (楕円型、放物型、双曲型) **ケプラー方程式**の解
- 剛体の自由回転
  - 角速度: ヤコビ楕円関数
  - 角度: 不完全楕円積分 (第1種、第3種)
- 他の厳密解: 浅水波 (KdV方程式)
  - ソリトン解 (双曲線関数)



# ケプラー軌道要素

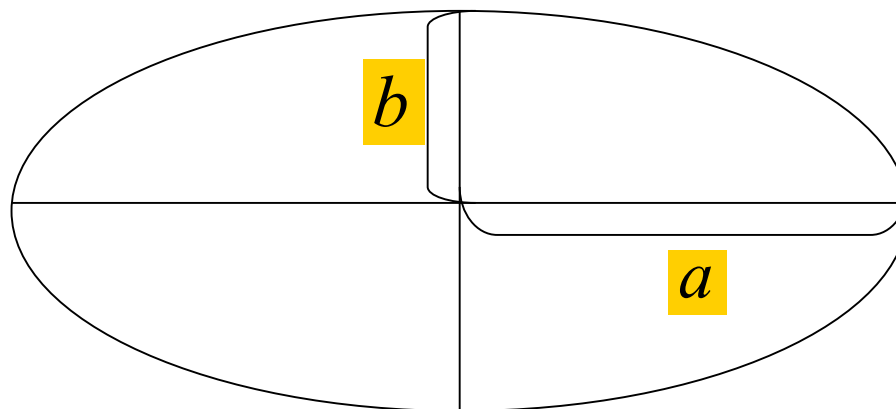
---

- 軌道の長半径： $a$ 
  - 準放物線 ( $e \sim 1$ ) では近点距離： $q = a(1 - e)$
- 軌道の離心率： $e$
- 昇交点経度： $\Omega$
- 軌道傾斜角： $I$
- 近点引数： $\omega$
- 近点通過時刻： $T$

# 橢圓

- 長半徑： $a$
- 短半徑： $b$

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$



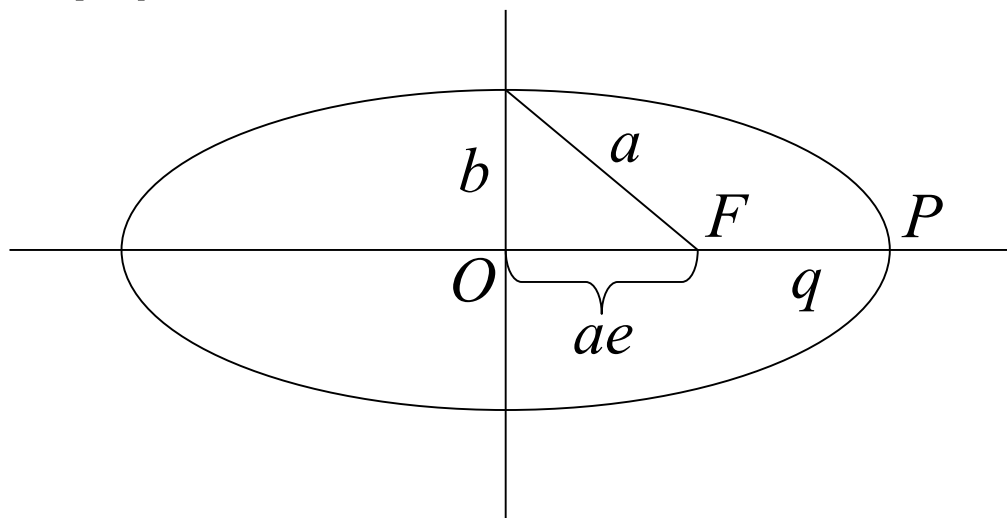


# 離心率と近点距離

- 焦点:F
- 離心率:  $e=OF/OP$
- 近点距離:  $q=FP$
- 軌道長半径:  $a=OP$

$$e \equiv \sqrt{\frac{a^2 - b^2}{a^2}}$$

$$q \equiv a(1 - e)$$





# 軌道面

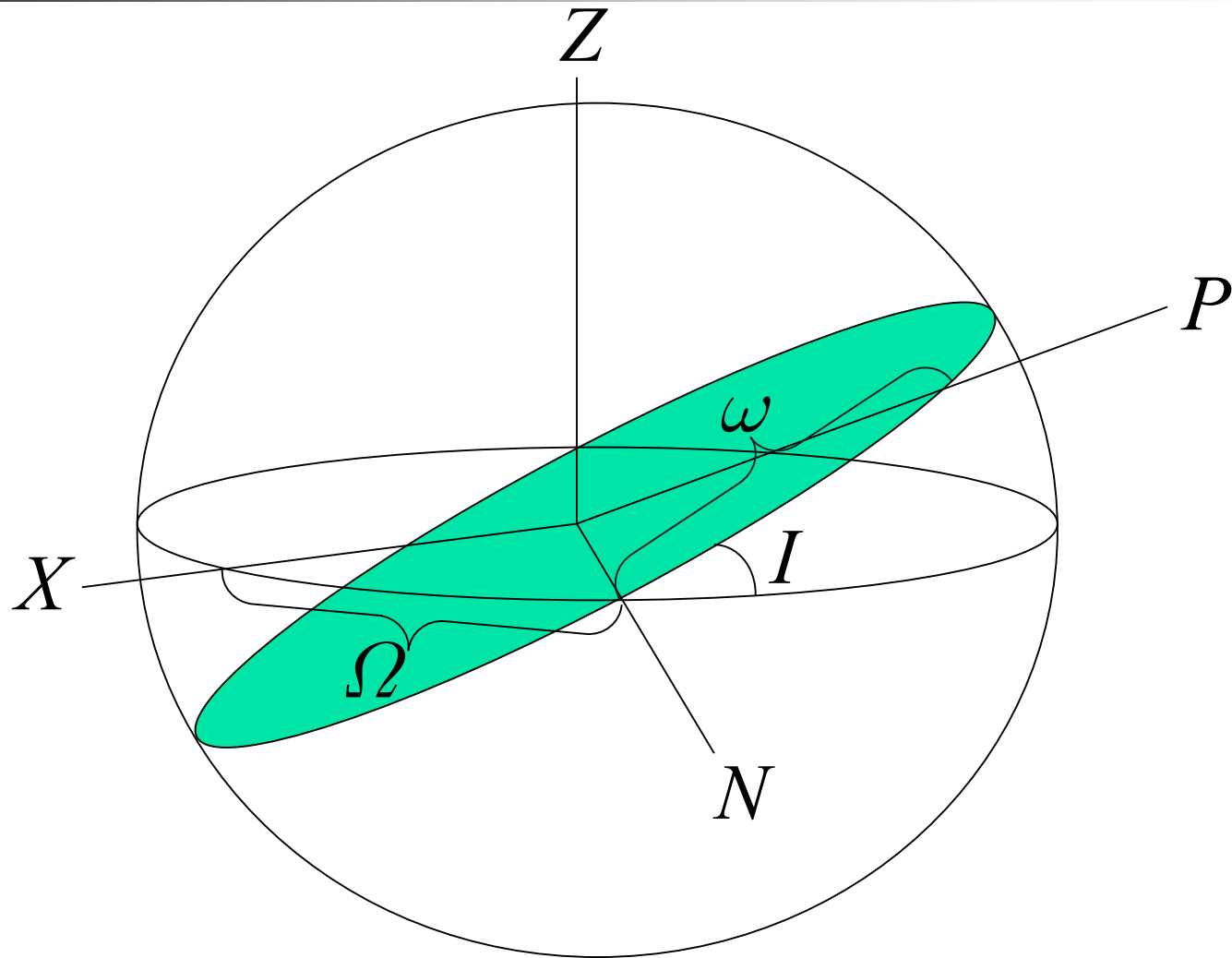
---

- 軌道面のオイラー角 (3-1-3系列)

$$R_{313}(\Omega, I, \omega) = R_3(\omega)R_1(I)R_3(\Omega)$$

- 3つの重要な方向ベクトル
  - 経度原点: X軸
  - 昇交点: N(ode)
  - 近点: P(ericenter)

# 軌道面



# 3-1-3オイラー一回転行列

$$\begin{aligned} \mathbf{R}_{313}(\psi, \theta, \phi) &= \begin{pmatrix} C_\psi C_\phi - S_\psi C_\theta S_\phi & C_\psi S_\phi + S_\psi C_\theta C_\phi & S_\psi S_\theta \\ -S_\psi C_\phi - C_\psi C_\theta S_\phi & -S_\psi S_\phi + C_\psi C_\theta C_\phi & C_\psi S_\theta \\ S_\theta S_\phi & -S_\theta C_\phi & C_\theta \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \cos\psi \cos\phi - \sin\psi \cos\theta \sin\phi & \cos\psi \sin\phi + \sin\psi \cos\theta \cos\phi & \sin\psi \sin\theta \\ -\sin\psi \cos\phi - \cos\psi \cos\theta \sin\phi & -\sin\psi \sin\phi + \cos\psi \cos\theta \cos\phi & \cos\psi \sin\theta \\ \sin\theta \sin\phi & -\sin\theta \cos\phi & \cos\theta \end{pmatrix} \end{aligned}$$

# ケプラー軌道の

## 形式的分類

- 楕円:  $e < 1$ 
  - 惑星、衛星、連星系
- 放物線:  $e = 1$ 
  - 彗星軌道の良い近似、**現実には存在しない**
- 準放物線:  $e \sim 1$ 
  - 彗星、特異小惑星
- 双曲線:  $e > 1$ 
  - 探査機、見かけ上(不適切な原点のため)

# 位置速度計算(楕円)

- 楕円型ケプラー方程式を解く

$$E - e \sin E = n(t - T)$$

$$n \equiv \sqrt{\frac{\mu}{a^3}}$$

- 離心近点角E の時間変化

$$\dot{E} = \frac{n}{1 - e \cos E}$$

- 軌道面上の位置速度

$$\begin{cases} \xi = a(\cos E - e) \\ \eta = b \sin E \end{cases}$$

$$\begin{cases} \dot{\xi} = -a\dot{E} \sin E \\ \dot{\eta} = b\dot{E} \cos E \end{cases}$$

# 位置速度計算(放物型)

- 放物型ケプラー(=バーカー)方程式を解く

$$\tau + \frac{\tau^3}{3} = n_P (t - T)$$

$$n_P = \sqrt{\frac{\mu}{2q^3}}$$

- 変数tauの時間変化
- 軌道面上の位置速度

$$\dot{\tau} = \frac{n_P}{1 + \tau^2}$$

$$\begin{cases} \xi = q(1 - \tau^2) \\ \eta = 2q\tau \end{cases}$$

$$\begin{cases} \dot{\xi} = -2q\tau\dot{\tau} \\ \dot{\eta} = 2q\dot{\tau} \end{cases}$$

# 位置速度計算(双曲型)

- 双曲型ケプラー方程式を解く

$$e \sinh F - F = n_H (t - T)$$

$$n_H \equiv \sqrt{\frac{\mu}{a_H^3}}$$

- 変数Fの時間変化

$$\dot{F} = \frac{n_H}{e \cosh F - 1}$$

- 軌道面上の位置速度

$$\begin{cases} \xi = a_H (e - \cosh F) \\ \eta = b_H \sinh F \end{cases}$$

$$\begin{cases} \dot{\xi} = -a_H \dot{F} \sinh F \\ \dot{\eta} = b_H \dot{F} \cosh F \end{cases}$$

$$b_H \equiv a_H \sqrt{e^2 - 1}$$



# 位置速度計算(続き)

- 逆オイラー回転

$$(\mathbf{x}, \mathbf{v}) = \mathbf{R}_{313}(-\omega, -I, -\Omega) \begin{pmatrix} \xi & \dot{\xi} \\ \eta & \dot{\eta} \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

# 楕円型ケプラー方程式 の標準解法

$$f(E) \equiv E - e \sin E - M = 0 \quad (|M| < \infty, 0 \leq e < 1)$$

## ■ 変数域の標準化

$$|M| < \infty \rightarrow |M| \leq \pi \rightarrow 0 \leq M < \pi \rightarrow 0 \leq E < \pi$$

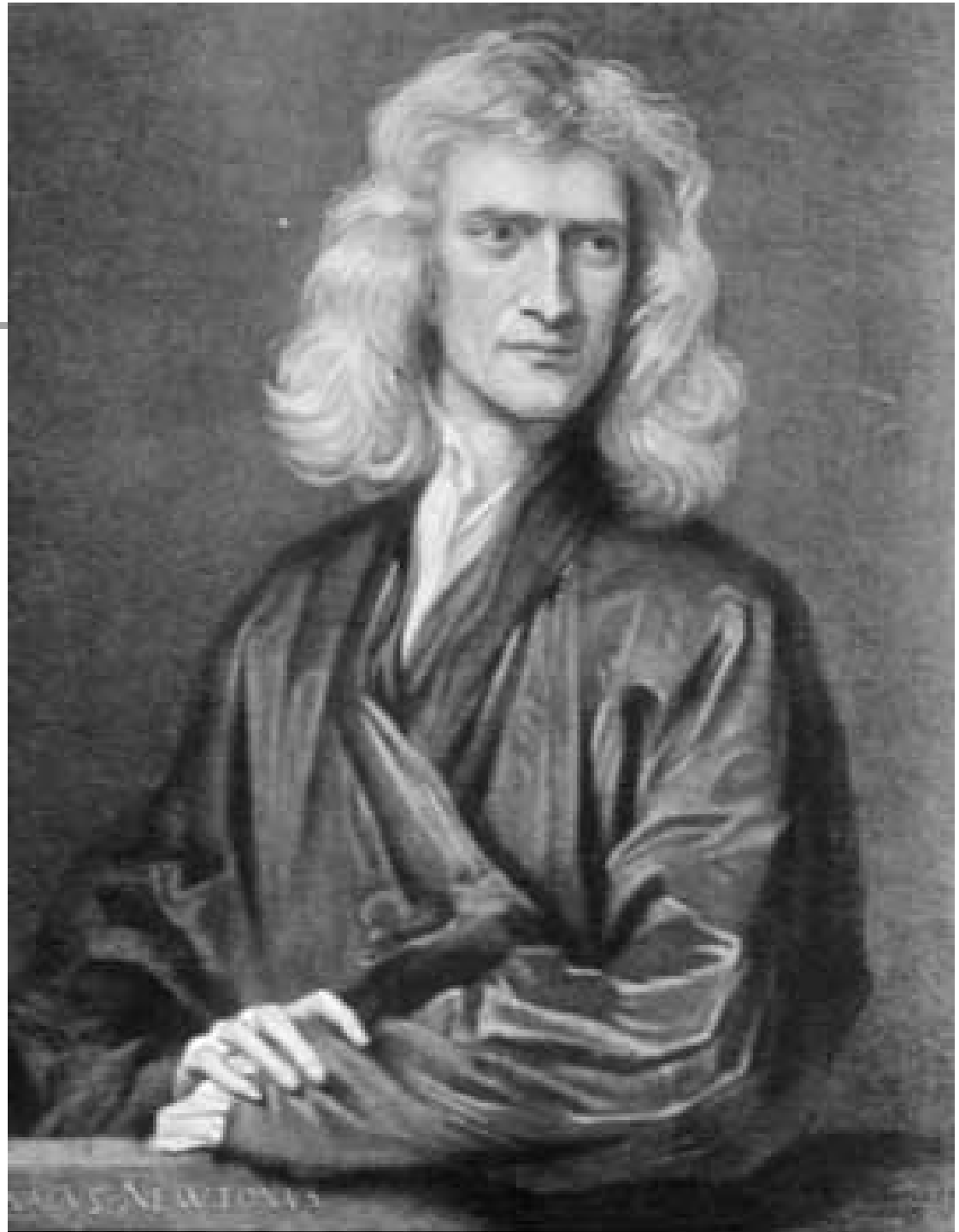
## ■ ニュートン写像

$$E \rightarrow f^*(E)$$

$$f^*(E) \equiv E - \frac{f(E)}{f'(E)} = \frac{M - e(E \cos E - \sin E)}{1 - e \cos E}$$

# ニュートン

- アイザック・  
ニュートン  
(1642-1727)
- 最高の科学者
- 力学
- 微積分学
- 光学
- 数値解析



# ニュートン

# そっくりさん

- ブライアン・メイ  
(1947-)
- **クィーン**のギタリスト
  - We Will Rock You
- 天文学者
  - Imperial College
  - 黄道星間塵の研究



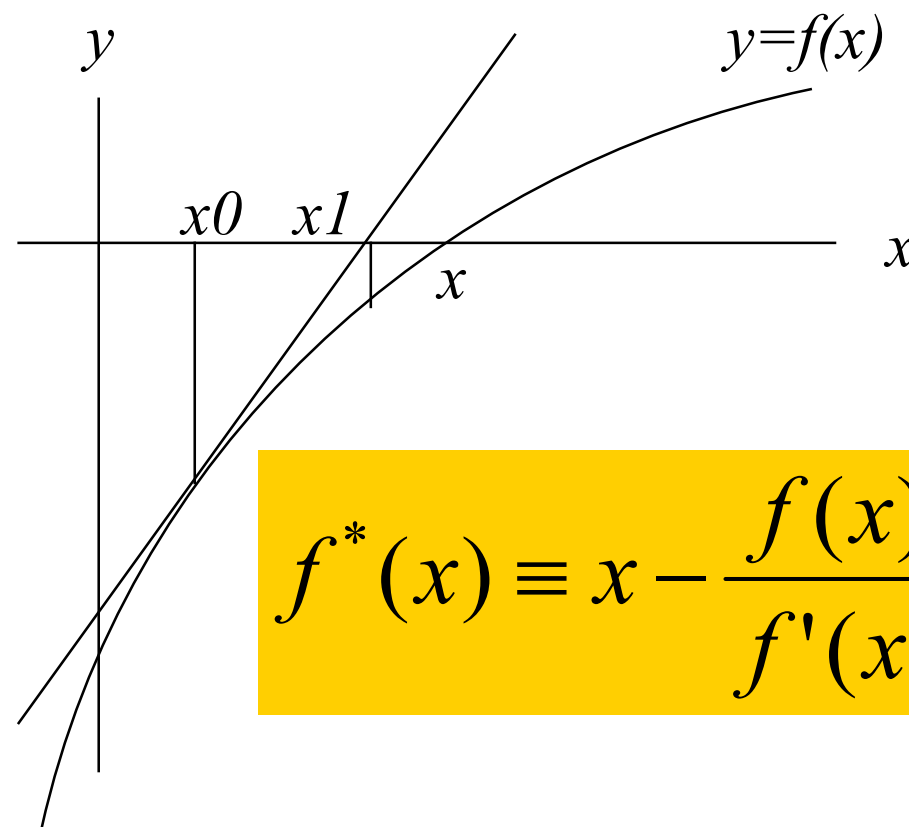
# ニュートン法

- 非線形方程式の定番解法

$$f(x) = 0$$

- 基本は線形近似
- ニュートン反復

$$x \rightarrow f^*(x)$$



$$f^*(x) \equiv x - \frac{f(x)}{f'(x)}$$

# ニュートン反復の導出

- 線形近似

$$f(x_0 + \Delta x) = f(x_0) + f'(x_0)\Delta x + \dots = 0$$

- 近似解  $\rightarrow$  ニュートン反復公式

$$\Delta x = \frac{-f(x_0)}{f'(x_0)}$$

$$f^*(x) \equiv x - \frac{f(x)}{f'(x)}$$



# ニュートン法の特徴

---

- 収束が**二次**(=ガマの油売り)
  - 有効桁数が倍々で増加
  - 「一桁が二桁、二桁が四桁、…」
- 速いが(一般には)不安定
- 重根のときは遅い
- 使い方のコツ
  - 解の囲い込み: 単根性を保証
  - 安定な出発値: 安定性を保証

# ニュートン法に対する

## 良い出発値

- 囲い込み

$$x_L < x < x_R$$

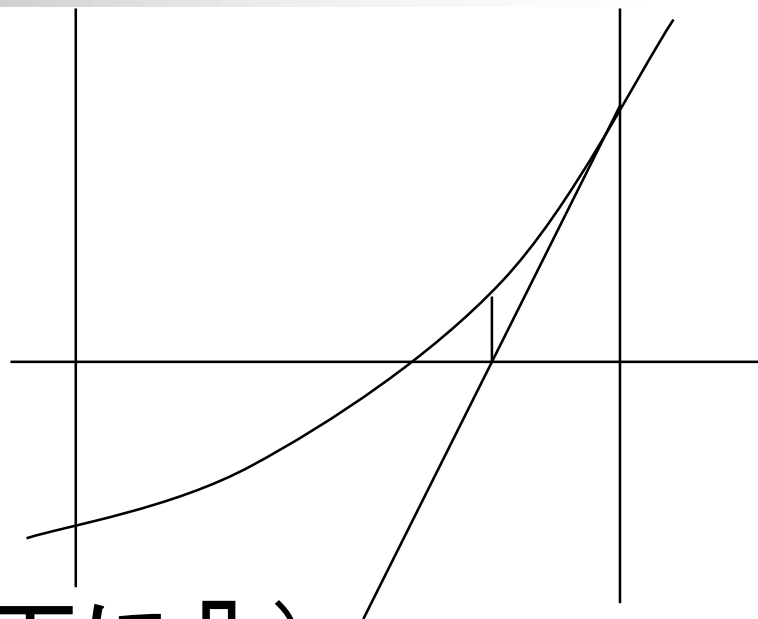
- 仮定その1 (根の存在)

$$f(x_L) < 0 < f(x_R)$$

- 仮定その2 (単調増加、下に凸)

$$x_L < x < x_R \rightarrow f'(x) > 0, f''(x) > 0$$

- 安定な出発値 = 解の **上界**





# ニュートン法の例

- 平方根の計算  $\sqrt{a}$  ( $1 \leq a < 4$ )

- 変形方程式

$$f(x) \equiv \frac{1}{x^2} - a = 0$$

$$x \equiv \frac{1}{\sqrt{a}}$$

- ニュートン写像

$$x \rightarrow f^*(x) \equiv 0.5x(3 - ax^2)$$

$$\sqrt{a} = ax$$

- 安定な出発値 = ニュートン写像値

- 例

$$x_0 = \max \left( f^* \left( \frac{1}{2} \right), f^* \left( \frac{3}{4} \right), f^* (1) \right)$$

$$= \max \left( \left( \frac{3}{4} \right) - \left( \frac{a}{16} \right), \left( \frac{9}{8} \right) - \left( \frac{27a}{128} \right), \left( \frac{3}{2} \right) - \left( \frac{a}{2} \right) \right)$$

$$\left( \frac{1}{2} < x \leq 1 \right)$$

# ニュートン法の初期値

## (楕円型ケプラー方程式)

■ 仮定  $f(0) \leq 0 < f(\pi), f'(E) > 0, f''(E) > 0$

■ 結論  $E_{\text{True}} \leq f^*(E)$

■ 安定な初期値 = ニュートン写像値

■ 例

$$E_0 = \min \left( f^*(0), f^*\left(\frac{\pi}{2}\right), f^*(\pi) \right)$$
$$= \min \left( \frac{M}{1-e}, M+e, \frac{M+\pi e}{1+e} \right)$$

# ケプラー方程式の 高速高精度解法

- 楕円型: Fukushima 1997a, CMDA
- 双曲型: Fukushima 1997b, CMDA
- 拡張楕円型: Fukushima 1996, AJ
- 拡張双曲型: Fukushima 1997c, AJ
- ガウス型: Fukushima 1998, CMDA
- 普遍型: Fukushima 1999, CMDA

# 楕円型ケプラー方程式 の高速解法

- 高速化のカギ: 三角関数を**使わない**
  - 三角関数の呼び出し: 乗算より20倍以上遅い
- 手法 = 離散化 + テイラー展開
- 要点1: 粗い格子上で三角関数表を準備
  - 例:  $[0, \pi/2]$  で257点
- 要点2: ニュートン反復で上界値を適用
  - 収束を保証
- 要点3: 十分近くなったらテイラー展開

# 離散化ニュートン法

- 格子間隔  $\Delta E \equiv \pi / (2N)$   $N = 256$

- 関数表の準備 ( $j = 1, 2, \dots, N$ )

$$E_j \equiv j\Delta E, C_j \equiv \cos E_j, A_j \equiv E_j C_j - \sin E_j$$

- ニュートン反復公式

$$E_n^* = \frac{M - eA_n}{1 - eC_n}$$

- 初期値

$$n = N$$

- 離散化反復公式

$$n \rightarrow n^* \equiv \text{Ceiling} \left( \frac{E_n^*}{\Delta E} \right)$$

# テイラー展開 ニュートン法

- 三角関数のテイラー展開 (倍精度で7次)

$$\delta C = 1 - \frac{(\delta E)^2}{2} + \dots, \delta S = \delta E - \frac{(\delta E)^3}{6} + \dots$$

- 関数値  $E \equiv E_n + \delta E, S \equiv S_n \delta C + C_n \delta S,$   
 $C \equiv C_n \delta C - S_n \delta S, A \equiv EC - S$

- ニュートン写像  $E \rightarrow E^* = \frac{M - eA}{1 - eC}$

# ケプラー方程式の 高速高精度解法

- 楕円型: Fukushima 1997a, CMDA
- 双曲型: Fukushima 1997b, CMDA
- 拡張楕円型: Fukushima 1996, AJ
- 拡張双曲型: Fukushima 1997c, AJ
- ガウス型: Fukushima 1998, CMDA
- 普遍: Fukushima 1999, CMDA

# 双曲型ケプラー方程式 の標準解法

$$f_H(F) \equiv e \sinh F - F - M_H = 0 \quad (|M_H| < \infty, 1 < e)$$

- 変数域の標準化(鏡映反転)

$$|M_H| < \infty \rightarrow 0 \leq M_H < \infty \rightarrow 0 \leq F < \infty$$

- ニュートン反復公式

$$F \rightarrow f_H^*(F)$$

$$f_H^*(F) \equiv F - \frac{f_H(F)}{f_H'(F)} = \frac{M_H + e(F \cosh F - \sinh F)}{e \cosh F - 1}$$



# ニュートン法の初期値

## (双曲型ケプラー方程式)

■ 仮定  $f_H(0) \leq 0 < f_H(\infty), f_H'(F) > 0, f_H''(F) > 0$

■ 結論  $F_{\text{True}} \leq f_H^*(F)$

■ 安定な初期値 = ニュートン写像値

■ 例 
$$F_0 = \min\left(f_H^*(0), f_H^*(1), f_H^*(8)\right)$$
$$= \min\left(\frac{M_H}{e-1}, \frac{M_H + A_1 e}{C_1 e - 1}, \frac{M_H + A_8 e}{C_8 e - 1}\right)$$

$A_1 \approx 0.368, C_1 \approx 1.543, A_8 \approx 10433, C_8 \approx 1490$

# 双曲型ケプラー方程式 の高速解法

- 再び高速化のカギ: 双曲線関数を**使わない**
- 手法 = 変形 + 囲い込み + 離散化ニュートン
- 要点1: 方程式の変形: 微小量は  $g=1/e$   
 $\sinh F - gF = L \equiv gM_H \quad (0 \leq F < \infty, 0 < g < 1)$
- 要点2: 囲い込み  $F_D \equiv 6.998 \times 10^{-2} < F < F_W \equiv 5.337$ 
  - F大: 漸近展開、F小: マクローリン展開
- 要点3: 離散化ニュートン法
- 要点4: 十分近くなったらテイラー展開

# 離散化ニュートン法

## (双曲型ケプラー方程式)

- 格子間隔  $\Delta F \equiv (F_W - F_D) / N$   $N = 512$

- 関数表の準備 ( $j = 1, 2, \dots, N$ )

$$F_j \equiv F_D + j\Delta F, C_j \equiv \cosh F_j, A_j \equiv F_j C_j - \sinh F_j$$

- ニュートン写像

$$F_n^* = \frac{L + A_n}{C_n - g}$$

- 初期値

$$n = N$$

- 離散化反復公式

$$n \rightarrow n^* \equiv \text{Ceiling} \left( \frac{F_n^* - F_D}{\Delta F} \right)$$

# テイラー展開

## ニュートン法 (双曲型)

- 双曲線関数のテイラー展開 (倍精度で7次)

$$\delta C = 1 + \frac{(\delta F)^2}{2} + \dots, \delta S = \delta F + \frac{(\delta F)^3}{6} + \dots$$

- 関数値  $F \equiv F_n + \delta F, S \equiv S_n \delta C + C_n \delta S,$   
 $C \equiv C_n \delta C + S_n \delta S, A \equiv FC - S$

- ニュートン写像  $F \rightarrow F^* = \frac{L + A}{C - g}$

# 放物型ケプラー方程式 の厳密解

$$\tau + \frac{\tau^3}{3} = M_P$$

## ■ カルダノの公式

$$\tau = \alpha - \frac{1}{\alpha}, \alpha \equiv \sqrt[3]{\frac{3M_P + \sqrt{4 + 9M_P^2}}{2}}$$

## ■ 立方根計算は非常に遅い

# 放物型ケプラー方程式 の標準解法

$$f_P(\tau) \equiv \tau + \tau^3 / 3 - M_P = 0$$

$$(|M_P| < \infty)$$

## ■ 変数域の標準化(鏡映反転)

$$-\infty < M_P < \infty \Rightarrow 0 \leq M_P < \infty \Rightarrow 0 \leq \tau < \infty$$

## ■ ニュートン反復公式

$$\tau \rightarrow f_P^*(\tau)$$

$$f_P^*(\tau) \equiv \tau - \frac{f_P(\tau)}{f_P'(\tau)} = \frac{M_P + 2\tau^3 / 3}{1 + \tau^2}$$

# ニュートン法の初期値 (放物型ケプラー方程式)

■ 仮定  $f_P(0) \leq 0 < f_P(\infty), f_P'(\tau) > 0, f_P''(\tau) > 0$

■ 結論  $\tau_{\text{True}} \leq f_P^*(\tau)$

■ 安定な初期値 = ニュートン写像値

■ 例 
$$\tau_0 = \min\left(f_P^*(0), f_P^*(1), f_P^*(3)\right)$$
$$= \min\left(M_P, \frac{M_P + 2/3}{2}, \frac{M_P + 18}{10}\right)$$

# 放物型ケプラー方程式 の高速解法

- 高速化のカギ: より高次の方法
- **ハレーの方法** (3次収束)

$$\tau \rightarrow f_P^+(\tau)$$

$$f_P^+(\tau) \equiv \tau - \frac{f_P(\tau) f_P'(\tau)}{\left[ f_P'(\tau) \right]^2 - f_P(\tau) f_P''(\tau) / 2}$$
$$= \frac{3M_P (1 + 2\tau^2) + (\tau^5 - \tau^3)}{3M_P \tau + (3 + 3\tau^2 + 2\tau^4)}$$



# ハレー

- エドモンド・ハレー
- 1656-1742
- 周期彗星の発見
- **ハレーの方法**
- 固有運動
- プリンキピア出版
- グリニッジ天文台長



# ハレー法の導出

- **2次**テイラー展開

$$f(x_0 + \Delta x) = f(x_0) + f'(x_0)\Delta x + \frac{f''(x_0)}{2}(\Delta x)^2 + \dots = 0$$

- 問題点: 2次方程式の根の複数性
- 解決法: 形式解右辺にニュートン法を代入

$$\Delta x = \frac{-f(x_0)}{f'(x_0) + \frac{f''(x_0)}{2}\Delta x} \cong \frac{-f(x_0)}{f'(x_0) - \frac{f''(x_0)f(x_0)}{2f'(x_0)}}$$

# ケプラー方程式の 高速高精度解法

- 楕円型: Fukushima 1997a, CMDA
- 双曲型: Fukushima 1997b, CMDA
- 拡張楕円型: Fukushima 1996, AJ
- 拡張双曲型: Fukushima 1997c, AJ
- ガウス型: Fukushima 1998, CMDA
- 普遍: Fukushima 1999, CMDA

# 拡張楕円型ケプラー 方程式を解く困難

## ■ 拡張楕円型ケプラー方程式

$$f(D) \equiv D - e_X \sin D + e_Y \cos D - L = 0 \quad (|L| < \infty, 0 \leq e_X^2 + e_Y^2 < 1)$$

$$D \equiv E + \varpi, e_X \equiv e \cos \varpi, e_Y \equiv e \sin \varpi, L \equiv M + \varpi, \varpi \equiv \Omega + \omega$$

- 変数域の標準化  $|L| < \infty \rightarrow 0 \leq L < \pi$
- 困難1: 二階微分 $f''(D)$ の符号の不定性
- 困難2: ニュートン写像の不安定性
- 困難3: 安定な初期値が見つからない

# 拡張楕円型ケプラー 方程式の高速解法

- 高速化のカギ: 解の確実な**囲い込み**
  - 三角関数の計算: 乗算より20倍以上遅い
- 離散化二分法+テイラー展開ニュートン法
- 1: 三角関数表の準備
  - 例:  $[0, \pi]$ で513点
- 2:  $e$ の値に応じて、6-8レベルの二分法
  - その後のニュートン法の収束を保証
- 3: テイラー展開ニュートン法

# 効果的な二分法

- Bツリー

$$\frac{D_n}{\pi} = \left( \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{3}{4}, \dots, \frac{1}{2^k}, \frac{3}{2^k}, \dots, \frac{2^k - 1}{2^k}, \dots \right)$$

- 二分法のレベル  $K = 6, 7, \text{ or } 8$

- 関数表の準備

$$C_n \equiv \cos D_n, S_n \equiv \sin D_n$$

- 具体的なアルゴリズム

```
n := 1; do k = 2, K { f_n := f(D_n); n := n * 2; if (f_n < 0) n ++ }
```

# ケプラー方程式の 高速高精度解法

- 楕円型: Fukushima 1997a, CMDA
- 双曲型: Fukushima 1997b, CMDA
- 拡張楕円型: Fukushima 1996, AJ
- 拡張双曲型: Fukushima 1997c, AJ
- ガウス型: Fukushima 1998, CMDA
- 普遍: Fukushima 1999, CMDA

# 拡張双曲型ケプラー 方程式を解く困難

## ■ 拡張双曲型ケプラー方程式

$$f(D) \equiv e_X \sinh D + e_Y (\cosh D - 1) - D - L = 0$$

$$(1 \leq e_X, |e_Y| < e_X)$$

## ■ 双曲線関数の効率的計算

$$s \equiv \sinh D, \cosh D - 1 = \frac{s^2}{1 + \sqrt{1 + s^2}}$$

## ■ 困難1: 解区間が無限大

## ■ 困難2: 適切な出発値公式が無い



# 拡張双曲型ケプラー 方程式の高速解法

- 高速化のカギ: 解の確実な**囲い込み**
- 注: 実質的に有限な解区間  $\sinh 37 \approx 5.86 \times 10^{15}$
- 多段階2分法 + テイラー展開ニュートン法
- 1: 変数域の粗い標準化  $\left( \frac{1}{32}, \frac{1}{2}, 8, 32 \right)$
- 2: 2段階2分法 (レベル4と4)
- 3: テイラー展開ニュートン法

# ケプラー方程式の 高速高精度解法

- 楕円型: Fukushima 1997a, CMDA
- 双曲型: Fukushima 1997b, CMDA
- 拡張楕円型: Fukushima 1996, AJ
- 拡張双曲型: Fukushima 1997c, AJ
- **ガウス型: Fukushima 1998, CMDA**
- 普遍: Fukushima 1999, CMDA



# 準放物軌道の困難

- **不定性問題** ( $e \sim 1$ の場合)
  - 軌道長半径  $a$  が無限大に...
  - $E$  もしくは  $F$  の解区間が無限小に...
  - その結果、非常に大きな桁落ちが...
- **解決法: ガウス型ケプラー方程式**
  - 巧妙な変数変換
  - 放物型ケプラー方程式の拡張
  - しかし、理論 (= 仕掛け?) は難解

# ケプラー軌道の 適切な分類

- 着目点: ケプラー方程式の  
1階微分値の桁落ち(1ビット・ロス)
- 楕円:  $e \cos E < 1/2$ 
  - $e < 1/2$  もしくは  $\cos E < 1/(2e)$
- 双曲線:  $e \cosh F > 2$ 
  - $e > 2$  もしくは  $\cosh F > 2/e$
- 準放物線: それ以外

# ガウス型ケプラー方程式

- ある種の**普遍**ケプラー方程式

$$f_G(w) \equiv w + \frac{w^3}{3} - W(w) = 0 \quad W(w) \equiv B(A(w))T_w$$

$$T_w \equiv t \sqrt{\frac{(1+9e)\mu}{20q^3}}$$

- 不定性を避ける新変数

$$A(w) \equiv b(e)w^2 = \frac{15(E - \sin E)}{9E + \sin E} = \frac{15(F - \sinh F)}{9F + \sinh F}$$

$$b(e) \equiv \frac{5(1-e)}{1+9e}$$

- 補助関数

$$B(A) \equiv \frac{20\sqrt{A}}{9E + \sin E} = \frac{20\sqrt{-A}}{9F + \sinh F} = 1 - \frac{3}{175}A^2 - \dots$$

# 位置速度計算 (ガウス型)

- ガウス型ケプラー方程式を解く

- 新変数

$$\rho = \frac{q}{1 + A(w)C(A(w))}, \tau_G = \sqrt{\frac{5(1+e)}{1+9e}} w C(A(w))$$

- 新関数

$$C(A) \equiv \frac{1}{\sqrt{A}} \tan \frac{E}{2} = \frac{1}{\sqrt{-A}} \tanh \frac{F}{2} = 1 + \frac{2}{5} A + \frac{38}{175} A^2 + \dots$$

- 軌道面上の位置 (速度は複雑なので省略)

$$\begin{cases} \xi = \rho (1 - \tau_G^2) \\ \eta = 2\rho\tau_G \end{cases}$$

# ガウス型ケプラー

## 方程式の高速解法

- 高速化のカギ: **良い初期値**
- 1: 囲い込み  $8.048 \times 10^{-8} < A(w) < 0.3125$ 
  - 漸近解とマクローリン展開の活用
- 2: 放物型ケプラー方程式の高速解  $w_0 = \tau$
- 3: ニュートン反復公式

$$w \rightarrow f_G^*(w) \equiv w - \frac{f_G(w)}{f_G'(w)} = \frac{(2/3)w^3 + B(A(w))T_w}{1 + w^2 - 2b(e)wB'(A(w))T_w}$$

$$B'(A) \equiv \frac{dB(A)}{dA} = -\frac{6}{175}A - \dots$$

# ケプラー方程式の 高速高精度解法

- 楕円型: Fukushima 1997a, CMDA
- 双曲型: Fukushima 1997b, CMDA
- 拡張楕円型: Fukushima 1996, AJ
- 拡張双曲型: Fukushima 1997c, AJ
- ガウス型: Fukushima 1998, CMDA
- 普遍: Fukushima 1999, CMDA





# 軌道三分類の困難

- 軌道要素計算上の困難
  - 軌道の三分類の複雑さ
  - 限られたガウス型の適用範囲
  - 実際上は、大きな計算精度落ち
- **究極的**解決法：普遍ケプラー方程式
  - KS (Kustaanheimo-Stiefel) 正則化
  - Stiefel and Scheifele (1971), Battin (1987)

# 無次元化普遍 ケプラー方程式

- 無次元化された**普遍**ケプラー方程式

$$f_U(G) \equiv G + \kappa U_3(G, \lambda) - L = 0 \quad L \equiv \nu(t - T) \quad \nu \equiv \sqrt{\frac{\mu(1+e)}{q^3}} \quad \kappa \equiv \frac{1-\lambda}{2}$$

- 普遍化変数

$$G \equiv \frac{E}{\sqrt{\lambda}} = \frac{F}{\sqrt{-\lambda}} = 2\tau \left( 1 - \frac{\lambda\tau^2}{3} + \dots \right) \quad \tau \equiv \tan \frac{f}{2} \quad \lambda \equiv \frac{1-e}{1+e}$$

- Battinの普遍関数  $U_n(G, \lambda) \equiv G^n c_n(\lambda G^2)$

- Stumpff関数  $c_0(x) \equiv \cos \sqrt{x} = \cosh \sqrt{-x}$

$$c_n(z) \equiv \sum_{j=0}^{\infty} \frac{(-z)^j}{(n+2j)!} \quad c_1(x) \equiv \frac{\sin \sqrt{x}}{\sqrt{x}} = \frac{\sinh \sqrt{-x}}{\sqrt{-x}} \quad z c_n(z) = \frac{1}{(n-2)!} - c_n(z)$$

# 位置速度計算 (普遍)

- 普遍ケプラー方程式を解く

$$G + \kappa U_3(G, \lambda) = v(t - T)$$

$$v \equiv \sqrt{\frac{\mu(1+e)}{q^3}}$$

- 軌道面上の位置速度

$$\begin{cases} \xi = q(R - U_2(G, \lambda)) \\ \eta = qU_1(G, \lambda) \end{cases}$$

$$\begin{cases} \dot{\xi} = -vqU_1(G, \lambda) / R \\ \dot{\eta} = vqU_0(G, \lambda) / R \end{cases}$$

$$R = 1 + \kappa U_2(G, \lambda)$$

# 普遍ケプラー方程式 の高速計算

- 高速化のカギ: 「分割統治」
- 1: 小さいe、楕円型ケプラー方程式の高速解
- 2: 大きなe、双曲型ケプラー方程式の高速解
- 3: それ以外: ハレーの方法

$$G \rightarrow f_U^+(G) \equiv G - \frac{f_U(G) f_U'(G)}{[f_U'(G)]^2 - f_U(G) f_U''(G) / 2}$$

- 4: 良い出発値 = 近似方程式の近似解
  - 近似三次方程式の近似解



# 高速化の結果

---

- 楕円型 : 2.5倍
- 双曲型 : 3.7倍
- 拡張楕円型 : 2.0倍
- 拡張双曲型 : 既存の方法なし
- ガウス型 : 3~4倍
- 普遍 : 7~13倍



## ソフトウェア (F77, F90)

---

- 楕円型 : xekep2.txt
- 双曲型 : xhkep2.txt
- 放物型 : xpkep2.txt
- 普遍 : xukep2.txt
- **ResearchGate**から無料で入手可能
- 「ResearchGate Fukushima」で検索

# 参考文献

- Battin, R. H.: 1987, An Introduction to Mathematics and Methods of Astrodynamics, AIAA, New York
- Colwell, P.: 1993, Solving Kepler's Equation Over Three Centuries, Willmann-Bell, Richmond
- Fukushima, T.: 1996, Astron. J., 112, 2858
- Fukushima, T.: 1997a, CMDA, 66, 309
- Fukushima, T.: 1997b, CMDA, 68, 121
- Fukushima, T.: 1997c, Astron. J., 113, 1920
- Fukushima, T.: 1998, CMDA, 70, 115
- Fukushima, T.: 1999, CMDA, 75, 201
- Stiefel, E. L., and Scheifele, G.: 1971, Linear and Regular Celestial Mechanics, Springer, Berlin

CMDA = Celest. Mech. Dyn. Astron.