

2次元・地衡流乱流におけるエネルギースペクトルとフラックス不等式

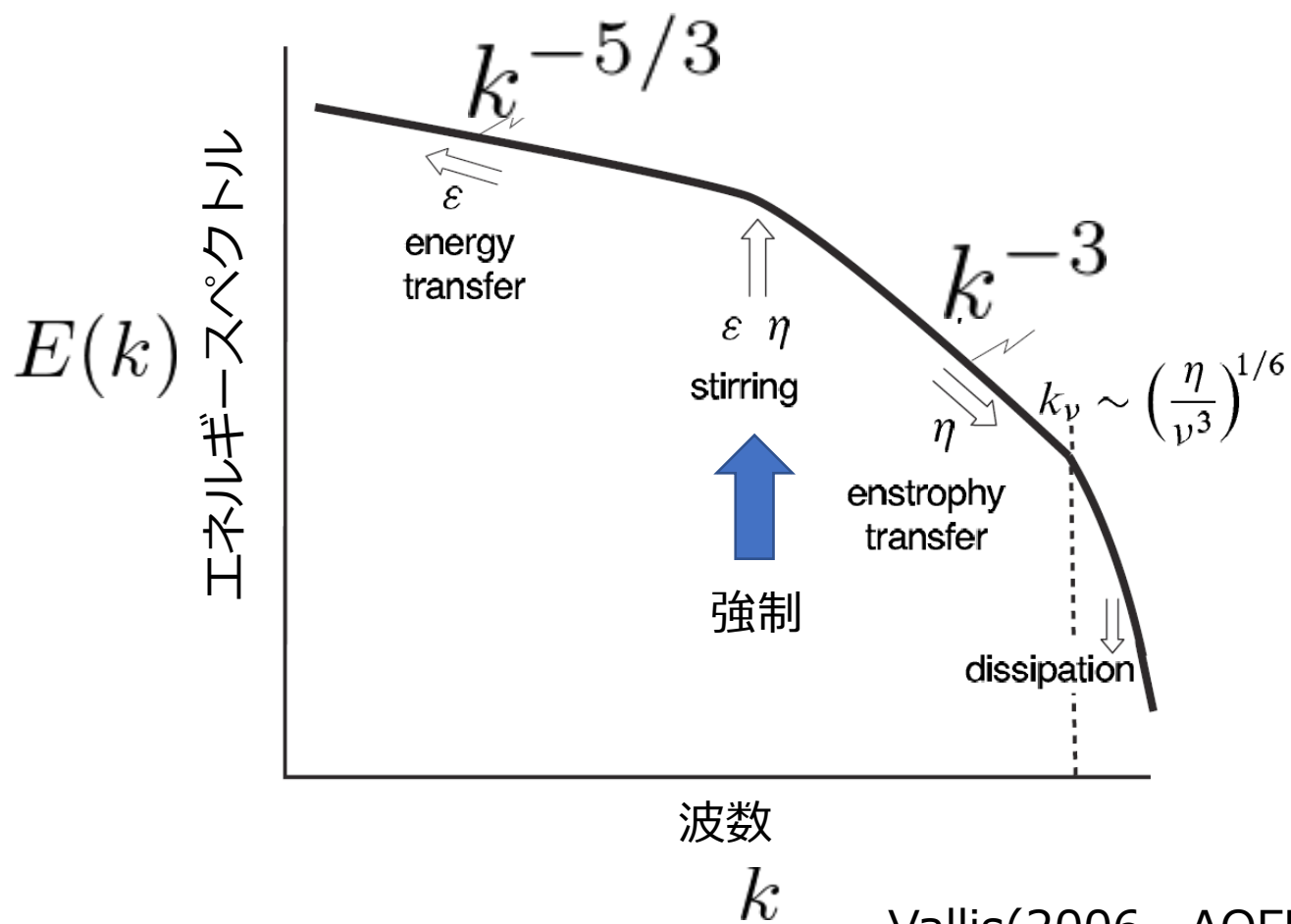
岩山隆寛（福岡大・理）

地球流体力学オンラインセミナー
2021年6月17日

Iwayama, T., Okazaki, S., and T. Watanabe, T., Numerical investigation of the Danilov inequality for two-layer quasi-geostrophic systems. *Fluid Dynamics Research* **51**(2019), 055507(28 pages).

はじめに

強制散逸乱流2次元乱流のスペクトル



- よく知られている事実
 - ある狭い波数帯域で系を強制
 - 強制波数帯域よりも低波数側にエネルギーが輸送

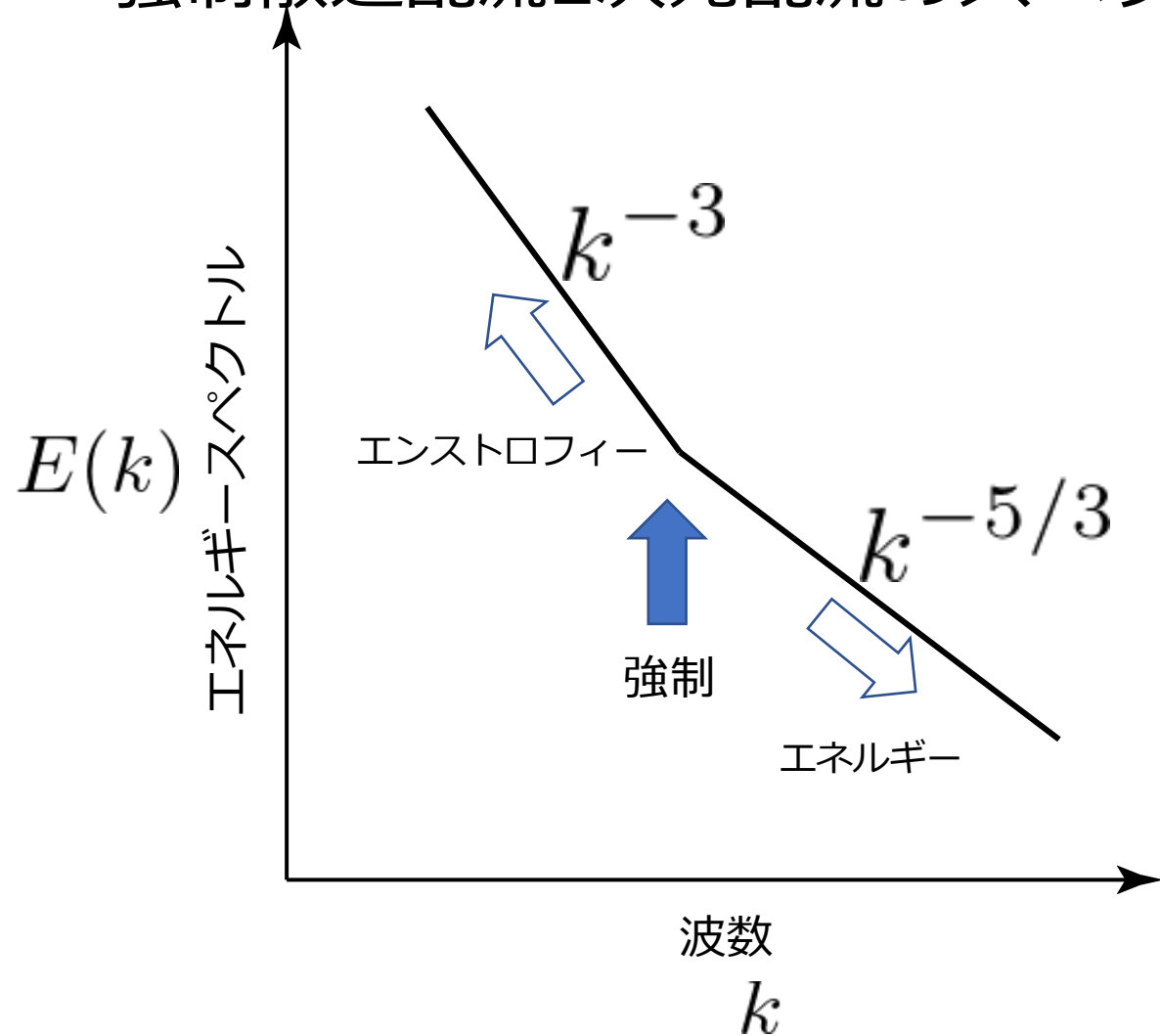
$$E(k) \propto k^{-5/3}$$

- 強制波数帯域よりも高波数側にエントロフィーが輸送

$$E(k) \propto k^{-3}$$

はじめに

強制散逸乱流2次元乱流のスペクトル



- 素朴な疑問：以下のようにならないのか？
 - ある狭い波数帯域で系を強制
 - 強制波数帯域よりも低波数側にエントロフィーが輸送

$$E(k) \propto k^{-3}$$

- 強制波数帯域よりも高波数側にエネルギーが輸送

$$E(k) \propto k^{-5/3}$$

はじめに

動機：

- 2次元乱流（NS方程式に従う強制散逸乱流）や地衡流乱流（2層準地衡流渦位方程式に従う強制散逸乱流）におけるエネルギーやエントロピーの波数空間内の輸送方向はどのように決まるか？

今日の話

- 輸送方向を決める式を紹介：

- Danilo不等式

- エネルギーフラックスとエントロピーフラックスからなる不等式
- Tung and Orlando (2003, *J. Atmos. Sci.* **60**)が初出（ただし, QG系）
- 2D系の証明はGkioulekas and Tung (2005, *Discrete and Continuous Dynamical System B* **5**)に掲載
- Danilo(2004)からpersonal communicationによってGkioulekas and Tungに伝えられた.

- カスケード不等式

- エネルギースペクトルの重心波数に関する議論
- Arbic, Flierl, and Scott (2007, *J. Phys. Oceanogr.*, **37**)
- 先ず, 2次元乱流の場合, 次に, 地衡流乱流の場合, の順に話をします.

2次元NS系の場合

波数空間ダイナミクスの基礎（１）

- エネルギースペクトルの発展方程式

$$\frac{\partial E(k)}{\partial t} = -\frac{\partial \Pi_E(k)}{\partial k} + F(k) + D(k)$$

- $\Pi_E(k)$: エネルギーフラックス（単位時間に波数 k を通過して低波数側から高波数側へ流れるエネルギー）

$\Pi_E(k) > 0$: エネルギーフラックスは高波数向き

$\Pi_E(k) < 0$: エネルギーフラックスは低波数向き

$\Pi_E(0) = 0, \Pi_E(\infty) = 0$

- $F(k)$: 強制スペクトル $F(k) > 0$
- $D(k)$: 散逸スペクトル $D(k) < 0$
- $\mathcal{E} = \int_0^\infty E(k) dk$: 全エネルギー

波数空間ダイナミクスの基礎（2）

- エンストロフィースペクトルの発展方程式

$$\frac{\partial Z(k)}{\partial t} = -\frac{\partial \Pi_Z(k)}{\partial k} + k^2 F(k) + k^2 D(k)$$

- $\Pi_Z(k)$: エンストロフィーフラックス（単位時間に波数 k を通過して低波数側から高波数側へ流れるエンストロフィー）
 - $Z(k) = k^2 E(k)$: エネルギースペクトルとエンストロフィースペクトルの関係
- triad interaction（三角相互作用, 三波相互作用）
 - triad : ある特定の性質を持った3つのものの組
 - 波数ベクトルが三角形を形成（ $\mathbf{k} + \mathbf{l} + \mathbf{m} = 0$ ）するモードのみが相互作用できる

Fjortoftの定理

- Fjortoft (1953, Tellus **5**)

- 波数ベクトルの大きさが k, l, m の3つのモード間でエネルギーとエントロフィーを保存的に分配
- 仮定: $k < l < m$
- $\delta E(k)$: 波数ベクトルの大きさが k のモードのエネルギー変化

エネルギー保存: $\delta E(k) + \delta E(l) + \delta E(m) = 0$

エントロフィー保存: $k^2 \delta E(k) + l^2 \delta E(l) + m^2 \delta E(m) = 0$

$$\rightarrow \delta E(k) = \frac{l^2 - m^2}{m^2 - k^2} \delta E(l), \quad \delta E(m) = \frac{k^2 - l^2}{m^2 - k^2} \delta E(l),$$

- 結論: 中間の波数モードへ向けて, または, 中間の波数モードからエネルギーとエントロフィーが輸送される
- 問題点:
 - 三角相互作用が(十分に)考慮されていない
 - 一組の三角相互作用しか考慮していない

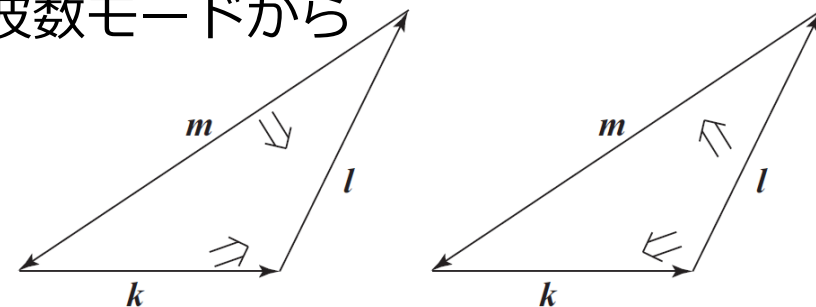


図 5.1 $k + l + m = 0, k < l < m$ を満たすモード間でのエネルギーやエントロフィーの輸送. $\leftarrow$ がエネルギーやエントロフィーの輸送される方向を表す.

2次元乱流の古典論

- Kraichnan(1967,PoF **10**)
 - Fjortoft (1953) に三角相互作用の詳細と多数のモードが励起されていることを考慮.
 - エネルギースペクトルの冪則とエネルギーフラックス, エンストロフィーフラックスの関係を導出
 - 計算はかなり複雑. 結果だけ紹介
 - 波数ベクトルの大きさが $l(=vk)$, k , $m(=wk)$ の3つのモードが相互作用
 - エネルギースペクトル : $E(k) \propto k^{-n}$
 - 重み関数 : W_E, W_Z
 - エネルギー伝達関数 ($l < k < m$ のモードが相互作用して, k のモードが得るエネルギー) : $T(k, l, m)$

$$\Pi_E(k) = k^{(5-3n)/2} \int_0^1 dv \int_1^{1+v} dw W_E(v, w, n) T(1, v, w)$$
$$\Pi_Z(k) = k^{(9-3n)/2} \int_0^1 dv \int_1^{1+v} dw W_Z(v, w, n) T(1, v, w)$$

三角相互作用の詳細と
多数のモードの励起を表現

2次元乱流の古典論

$$\frac{\partial E(k)}{\partial t} = -\frac{\partial \Pi_E(k)}{\partial k} + \cancel{F(k)} + \cancel{D(k)}$$

- 慣性領域

- 強制も散逸も効かない波数領域では、統計的定常状態でエネルギー/エントロピーフラックスは波数に依存しない
- エネルギーフラックスから

$$\Pi_E(k) = k^{(5-3n)/2} \int_0^1 dv \int_1^{1+v} dw W_E(v, w, n) T(1, v, w)$$

$$\rightarrow n = 5/3$$

$W_E(v, w, 5/3) > 0$, $W_Z(v, w, 5/3) = 0$ ・ エントロピーフラックスはゼロ

- エントロピーフラックスから

$$\Pi_Z(k) = k^{(9-3n)/2} \int_0^1 dv \int_1^{1+v} dw W_Z(v, w, n) T(1, v, w)$$

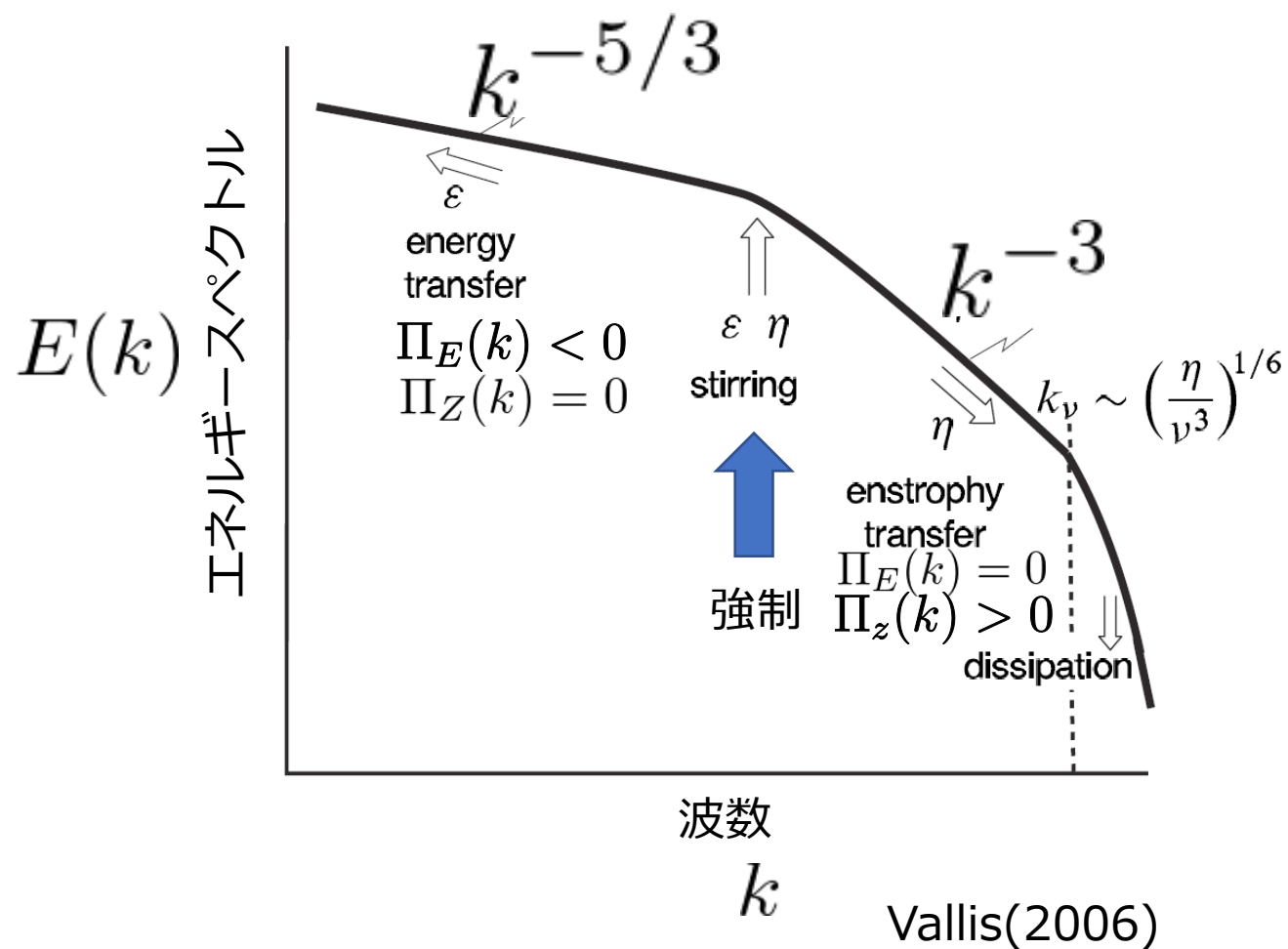
$$\rightarrow n = 3$$

$W_E(v, w, 5/3) = 0$, $W_Z(v, w, 5/3) < 0$ ・ エネルギーフラックスはゼロ

- エネルギーフラックスの向きとエントロピーフラックスの向きは逆向き
- Fjortoftの定理で述べたように $T(k, l, m)$ の符号は決まらず
 - Spreading hypothesis : エネルギーは波数空間内で広がっていくであろう.
: 中間の波数からエネルギーは出ていくセンス・・・ $T(k, l, m) < 0$
- Spreading hypothesisを考慮することによって, エネルギーフラックスは低波数, エントロピーフラックスは高波数へ向くことが導かれる.

Kraichnan(1967)の結論

強制散逸乱流2次元乱流のスペクトル



- Spreading hypothesisを使用
 - 強制波数帯域よりも低波数側にエネルギーが輸送

$$E(k) \propto k^{-5/3}$$

$$\Pi_Z(k) = 0$$

- 強制波数帯域よりも高波数側にエントロフィーが輸送

$$E(k) \propto k^{-3}$$

$$\Pi_E(k) = 0$$

Spreading hypothesisを使用しないで、支配方程式からフラックスの方向を決められないか？

Danilov不等式

- 2次元Navier-Stokes方程式系における波数空間内のフラックスに関する不等式 (Danilov, 2004; Gkioulekas and Tung, 2005)
- 定常状態, 強制波数帯域を除く波数領域で以下の不等式が導ける:

$$k^2 \Pi_E(k) - \Pi_Z(k) < 0$$

- K67によると慣性領域 ($E(k) \propto k^{-5/3}$) では $\Pi_Z(k) = 0$ だったので, 不等式より
 $\Rightarrow \Pi_E(k) < 0$ (エネルギーは低波数に輸送)
- 同様に, 慣性領域では ($E(k) \propto k^{-3}$) では $\Pi_E(k) = 0$
 $\Rightarrow \Pi_Z(k) > 0$ (エントロフィーは高波数に輸送)
- 慣性領域におけるエネルギーフラックスとエントロフィーフラックスの向きが決まる
- Danilovの不等式の証明は次ページ

Danilov不等式の証明

$$\begin{aligned}\frac{\partial E(k)}{\partial t} &= -\frac{\partial \Pi_E(k)}{\partial k} + F(k) + D(k) \\ \frac{\partial Z(k)}{\partial t} &= -\frac{\partial \Pi_Z(k)}{\partial k} + k^2 F(k) + k^2 D(k)\end{aligned}$$

- Danilov (2004), Gkioulekas & Tung (2005)
- エネルギースペクトルの発展方程式を波数に関して0 ~ k まで積分

$$\Pi_E(k) - \Pi_E(0) = \int_0^k \left\{ F(q) + D(q) - \frac{\partial E(q)}{\partial t} \right\} dq$$

- 統計的定常状態, 強制は狭い波数帯域のみ, k は強制波数帯域よりも低波数

$$\Pi_E(k) = \int_0^k D(q) dq$$

- 同様にエンストロフィースペクトルの方程式から

$$\Pi_Z(k) = \int_0^k q^2 D(q) dq$$

- $k^2 \Pi_E(k) - \Pi_Z(k)$ を計算. $k^2 - q^2 > 0$, $D(q) < 0$ に注意すると

$$k^2 \Pi_E(k) - \Pi_Z(k) = \int_0^k (k^2 - q^2) D(q) dq < 0$$

- 積分を逆に $k \sim \infty$ にしたとき, k は強制波数帯域よりも高波数, $k^2 - q^2 < 0$, $D(q) < 0$ に注意すると

$$k^2 \Pi_E(k) - \Pi_Z(k) = - \int_k^\infty (k^2 - q^2) D(q) dq < 0$$

Danilov不等式とは異なる議論の仕方

- Arbic *et al.* (2007)
- 統計的定常状態において、エネルギースペクトルの重心波数が、強制波数 k_F よりも低波数側に位置することを証明.
- エネルギースペクトルの発展方程式を波数に関して $0 \sim \infty$ で積分

$$\frac{\partial E(k)}{\partial t} = -\frac{\partial \Pi_E(k)}{\partial k} + F(k) - \kappa E(k) - 2\nu k^2 E(k)$$

$$0 = \cancel{\Pi_E(0)} - \cancel{\Pi_E(\infty)} + \int_0^\infty \{F(k) - \kappa E(k) - 2\nu k^2 E(k)\} dk$$

$$\int_0^\infty F(k) dk = \kappa \mathcal{E} + 2\nu \mathcal{Z}$$

$\mathcal{E}$: エネルギー, $\mathcal{Z}$: エンストロフィー

- 同様にエンストロフィースペクトルの発展方程式も積分

$$\int_0^\infty k^2 F(k) dk = \kappa \mathcal{Z} + 2\nu \mathcal{P} \quad \mathcal{P} \equiv \int_0^\infty k^4 E(k) dk \quad : \text{パリンストロフィー}$$

$$\int_0^\infty k^2 F(k) dk = k_F^2 \int_0^\infty F(k) dk \quad : \text{強制が } k_F \text{ 近傍に限られるなら}$$

$$\left(\int_0^\infty F(k) dk = \kappa \mathcal{E} + 2\nu \mathcal{Z} \right) \times \mathcal{Z} \quad \text{から}$$

$$\left(k_F^2 \int_0^\infty F(k) dk = \kappa \mathcal{Z} + 2\nu \mathcal{P} \right) \times \mathcal{E} \quad \text{を引き算して以下を得る：}$$

$$(\mathcal{Z} - k_F^2 \mathcal{E}) \int_0^\infty F(k) dk = 2\nu (\mathcal{Z}^2 - \mathcal{P} \mathcal{E})$$

Schwartzの不等式より $\mathcal{Z}^2 - \mathcal{P} \mathcal{E} < 0$

$$\int_0^\infty F(k) dk > 0 \quad \text{なので, } \mathcal{Z} - k_F^2 \mathcal{E} < 0 \quad \text{または, } k_F^2 > \frac{\mathcal{Z}}{\mathcal{E}}$$

一方, エネルギースペクトルの重心波数 $k_E \equiv \frac{\int_0^\infty k E(k) dk}{\int_0^\infty E(k) dk}$ を定義して

$$\int_0^\infty (k - k_E)^2 E(k) dk = \mathcal{Z} - k_E^2 \mathcal{E} > 0$$

または, $\frac{\mathcal{Z}}{\mathcal{E}} > k_E^2$

以上より $k_F^2 > k_E^2$

- 減衰性乱流で似た議論 (Rhines, 1979, *Ann. Rev. Fluid Mech.* **11**) はあるがspreading hypothesisが必要だった

2層準地衡流系の場合

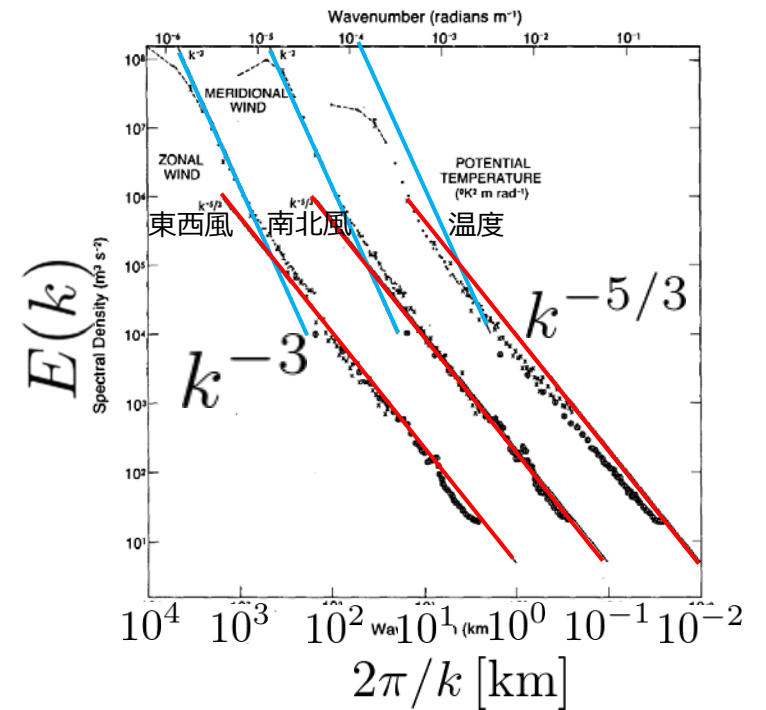
Iwayama, Okazaki, & Watanabe, *FDR* **51**(2019)の紹介

Danilov不等式はQG系では数学的に符号不確定だが、数値実験よると成立する.

はじめに：

Nastrom-Gage (NG) スペクトルとは

- 地球大気のエネルギースペクトル
(Nastrom & Gage, 1985, *JAS* **42**)
2つのスケーリングレンジがある
 - $E(k) \propto k^{-3}$ (波長 300~1000 km)
 - $E(k) \propto k^{-5/3}$ (波長 2.6 ~ 300 km)
- 大気大循環モデルや客観解析データでも再現
(例えば, Koshyk et al., 1999, *GRL* **26**;
Burgess et al. 2013, *JAS* **70**)
- 地球大気の中・大規模運動の普遍的性質と考えられる

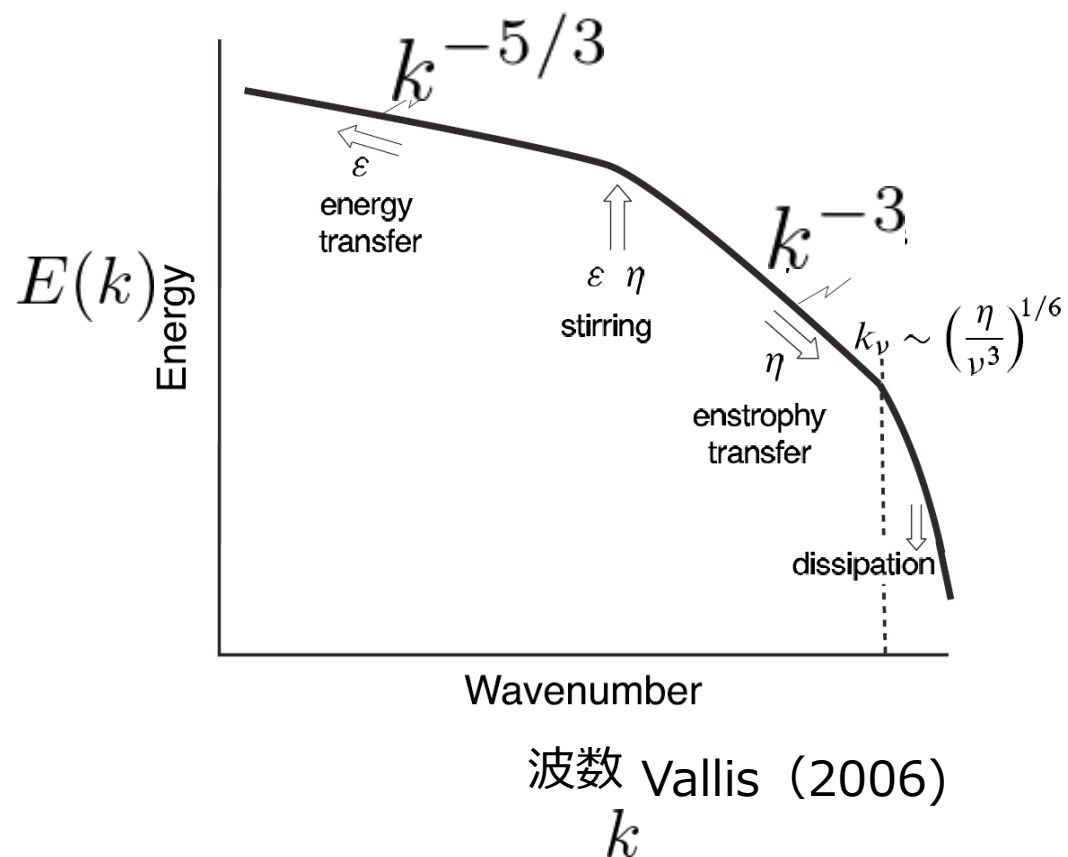


Nastrom & Gage (1985)

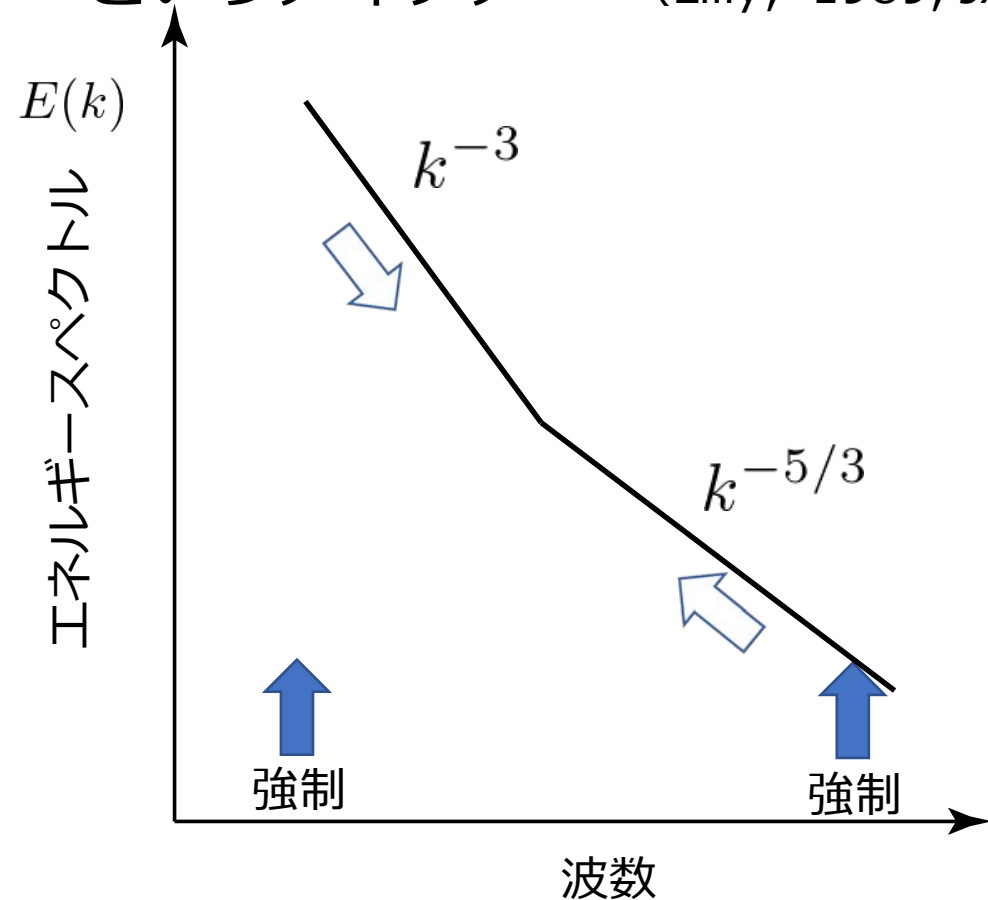
はじめに

NGスペクトルを2次元乱流で説明する試み

- 2D乱流の常識



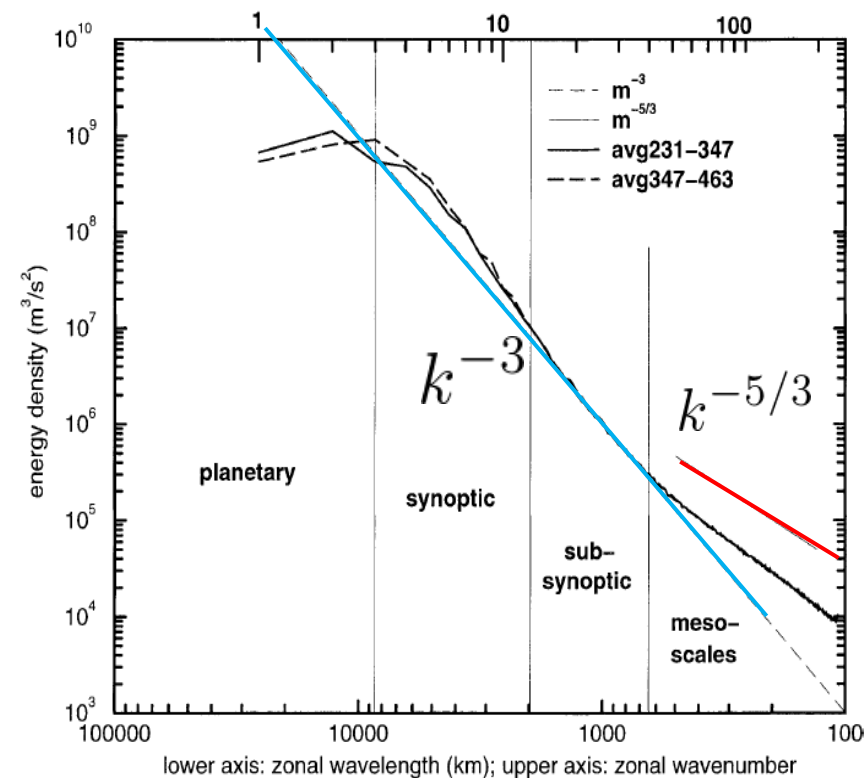
- 異なるスケールで系を強制する,
というアイデア (Lilly, 1989, JAS 46)



はじめに：

Tung & Orlando (2003, *JAS* **60**)の研究

- 準地衡2層モデルの数値実験によってNGスペクトルを再現
- 系の強制は傾圧不安定に伴うもののみ.
- Lilly (1989) のような小スケールの外的強制はなくてもよい
- 余談：
 - Google scholarで調べると、この論文の引用件数は187件.

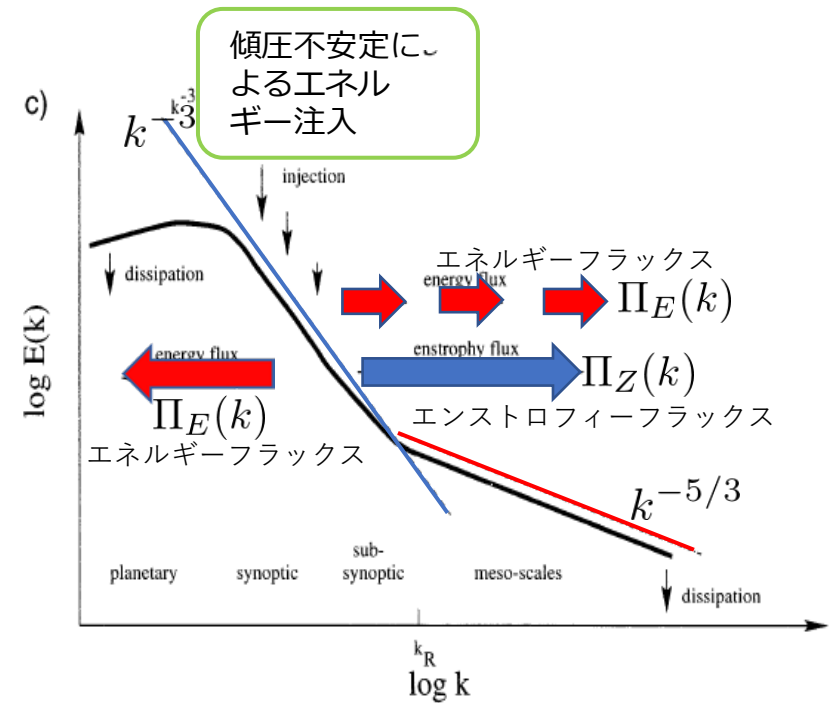


Tung & Orlando (2003)

はじめに：

Tung & Orlando (2003)の研究

- 準地衡2層系におけるNGスペクトルの形成メカニズムを提唱
 - 傾圧不安定によるエネルギー注入
 - 高波数側へのエネルギーカスケードが存在（**隠れたカスケード**）
 - エネルギーフラックスがエンストロフィーフラックスより卓越する波数領域で、**エネルギー慣性領域スペクトル $k^{-5/3}$ の形成**
- 注意：現実のNGスペクトルの形成メカニズムではなく，QG系でのNGスペクトルの形成メカニズムである，と論文中で著者らは言及



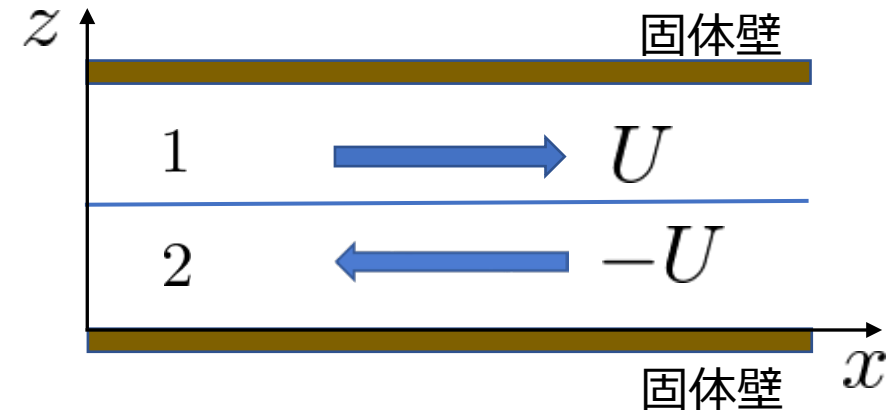
Tung & Orlando (2003)

本研究の目的

- T003によるNGスペクトルの $k^{-5/3}$ スペクトルの形成メカニズムを検証する
 - T003を除いて準地衡2層モデルでNGスペクトルは再現されていない
 - 形成メカニズムの検証も行われていない
- $k^{-5/3}$ スペクトルの形成メカニズム
 1. 隠れたカスケードは存在するか？
 2. エネルギーフラックスがエンストロフィーフラックスより卓越する
($k^2 \Pi_E(k) - \Pi_Z(k) > 0$) 波数領域は存在するか？
 3. 上記の波数領域は慣性領域か？
- 2次元Navier-Stokes乱流ではエネルギー慣性領域でもエンストロフィー慣性領域でも
$$k^2 \Pi_E(k) - \Pi_Z(k) < 0 \quad \dots \text{Danilovの不等式}$$
が証明されているので上記のメカニズムは働かない.
 - 地衡流乱流特有の性質？

問題設定

- ベータ平面
- 等しい厚さの準地衡2層系
- 一様なシア一流
- 上下非対称な粘性係数
- 下層に働くEkman摩擦
- 擾乱について2重周期境界条件
- 擾乱の支配方程式系（準地衡流渦位方程式）：



変形半径： k_d^{-1}

$$\begin{aligned}\frac{\partial q_1}{\partial t} &= -J(\psi_1, q_1) - \beta \frac{\partial \psi_1}{\partial x} - U \frac{\partial}{\partial x} \left(\nabla^2 \psi_1 + k_d^2 \frac{\psi_1 + \psi_2}{2} \right) + (-1)^{\gamma-1} \nu_1 \nabla^{2\gamma} q_1, \\ \frac{\partial q_2}{\partial t} &= -J(\psi_2, q_2) - \beta \frac{\partial \psi_2}{\partial x} + U \frac{\partial}{\partial x} \left(\nabla^2 \psi_2 + k_d^2 \frac{\psi_1 + \psi_2}{2} \right) + (-1)^{\gamma-1} \nu_2 \nabla^{2\gamma} q_2 - \kappa \nabla^2 \psi_2\end{aligned}$$

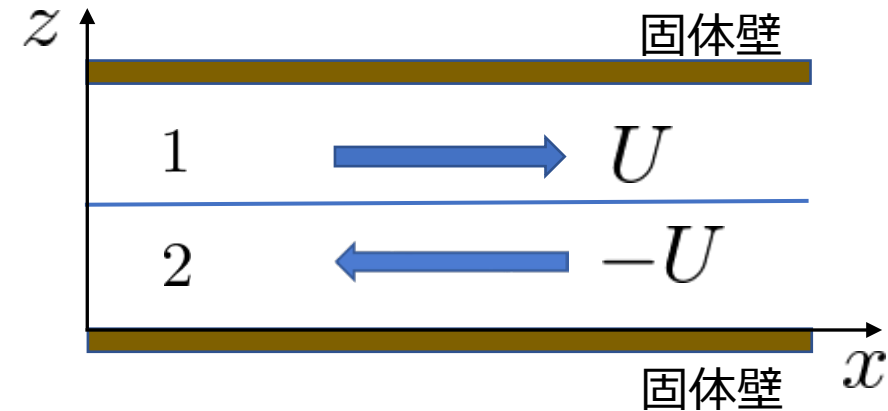
移流 ベータ効果 シアー（強制） 上下非対称な粘性 Ekman摩擦

(Gkioulekas, 2014, *Physica D*)

$k^2 \Pi_E(k) - \Pi_Z(k) < 0$ を破る可能性のある項

問題設定

- ベータ平面
- 等しい厚さの準地衡2層系
- 一様なシア一流
- 上下非対称な粘性係数
- 下層に働くEkman摩擦
- 擾乱について2重周期境界条件
- 擾乱の支配方程式系（準地衡流渦位方程式）：



$$\begin{aligned}
 \frac{\partial q_1}{\partial t} &= -J(\psi_1, q_1) - \beta \frac{\partial \psi_1}{\partial x} - U \frac{\partial}{\partial x} \left(\nabla^2 \psi_1 + k_d^2 \frac{\psi_1 + \psi_2}{2} \right) + (-1)^{\gamma-1} \nu_1 \nabla^{2\gamma} q_1, \\
 \frac{\partial q_2}{\partial t} &= -J(\psi_2, q_2) - \beta \frac{\partial \psi_2}{\partial x} + U \frac{\partial}{\partial x} \left(\nabla^2 \psi_2 + k_d^2 \frac{\psi_1 + \psi_2}{2} \right) + (-1)^{\gamma-1} \nu_2 \nabla^{2\gamma} q_2 - \kappa \nabla^2 \psi_2
 \end{aligned}$$

移流 ベータ効果 シアー（強制） 上下非対称な粘性 Ekman摩擦

(Gkioulekas, 2014, *Physica D*)

$$k^2 \Pi_E(k) - \Pi_Z(k) < 0 \text{ を破る可能性のある項}$$

2層準地衡流系のDanilov不等式

$$\psi = \frac{1}{2}(\psi_1 + \psi_2) : \text{順圧モード}$$

$$\tau = \frac{1}{2}(\psi_1 - \psi_2) : \text{傾圧モード}$$

$$\nu_1 = \nu, \quad \Delta\nu = \nu_2 - \nu_1$$

$$\begin{aligned} k^2 \Pi_E(k) - \Pi_Z(k) = & - \int_k^\infty [(k^2 - k_d^2) \langle -k'_x U k_d^2 \Im [\hat{\psi}(\mathbf{k}') \hat{\tau}^*(\mathbf{k}')] \rangle \\ & - \nu k'^{2\gamma} \langle (k^2 - k'^2) k'^2 |\hat{\psi}(\mathbf{k}')|^2 + (k^2 - k'^2 - k_d^2)(k'^2 + k_d^2) |\hat{\tau}(\mathbf{k}')|^2 \rangle \\ & - \frac{\Delta\nu}{2} k'^{2\gamma} \langle (k^2 - k'^2) k'^2 |\hat{\psi}(\mathbf{k}')|^2 \\ & \quad - \{ (k^2 - k'^2)(k'^2 + k_d^2) + k'^2(k^2 - k'^2 - k_d^2) \} \Re [\hat{\psi}(\mathbf{k}') \hat{\tau}^*(\mathbf{k}')] \\ & \quad + \{ (k^2 - k'^2 - k_d^2)(k'^2 + k_d^2) \} |\hat{\tau}(\mathbf{k}')|^2 \rangle \\ & - \frac{\kappa}{2} k'^2 \langle (k^2 - k'^2) |\hat{\psi}(\mathbf{k}') - \hat{\tau}(\mathbf{k}')|^2 - k_d^2 \{ |\hat{\tau}(\mathbf{k}')|^2 - \Re [\hat{\psi}(\mathbf{k}') \hat{\tau}^*(\mathbf{k}')] \} \rangle \\ & \quad - 2\alpha k_d^2 (k^2 - k'^2 - k_d^2) \langle |\hat{\tau}(\mathbf{k}')|^2 \rangle] dk' \end{aligned} \quad (19)$$

- Danilov不等式は符号不確定なので，数値実験的に調べる必要がある

数値実験の概要(1)

- 領域： $2\pi \times 2\pi$ の正方形領域
- 境界条件： 周期境界条件
- 計算法： 順圧成分 ($\psi = (\psi_1 + \psi_2)/2$)
傾圧成分 ($\tau = (\psi_1 - \psi_2)/2$)
に分解して計算
スペクトル法 + Runge-Kutta-Gill法
- 初期条件： 微小で一様なエネルギースペクトル
$$E_\psi(k) = E_\tau(k) = 3 \times 10^{-8}$$
を持つ乱数

数値実験の概要(2)

- スピニアップ：低解像度（ 256^2 , 切断波数 $k_T = 85$ ）で $t=1000$ （800,000ステップ）まで計算
- スピニアップさせた場を初期値として高解像度（ 512^2 , $k_T = 170$ ）で $t=1500$ （800,000ステップ）まで計算
- $1300 \leq t \leq 1500$ の結果を解析・平均
- 方程式に含まれるパラメター
 - Tung & Orlando (2003)では実験の詳細（超粘性の値）が書かれていない
 - Larichev & Held (1995, *JPO* **25**)（ $k < k_d$ のダイナミクスを詳細に研究）を参考

$$U = 2.5 \times 10^{-2}, k_d = 10, \gamma = 4,$$

$$\nu_1 = 5.12 \times 10^{-16} (k_T/128)^{2\gamma}, \kappa = 4.0 \times 10^{-2}$$

数値実験の概要 (3)

- 長さ k_d^{-1} , 時間 $(2Uk_d)^{-1}$ で物理量を再スケールする

- 系を特徴づける無次元パラメター

$$\frac{2Uk_d}{\kappa}, \frac{2Uk_d^2}{\beta}, \frac{2U}{\nu k_d^{2\gamma-1}}, \frac{2U}{\Delta\nu k_d^{2\gamma-1}}$$

- 重要なパラメター $\frac{2Uk_d}{\kappa}, \frac{2Uk_d^2}{\beta}$

- 前者は `throughput' (Arbic and Flierl, 2004, *JOP* **34**) と呼ばれている

数値実験の概要(4)

- 4種類の実験：

f -平面

上層と下層は同じ粘性係数 $\nu_2/\nu_1 = 1$

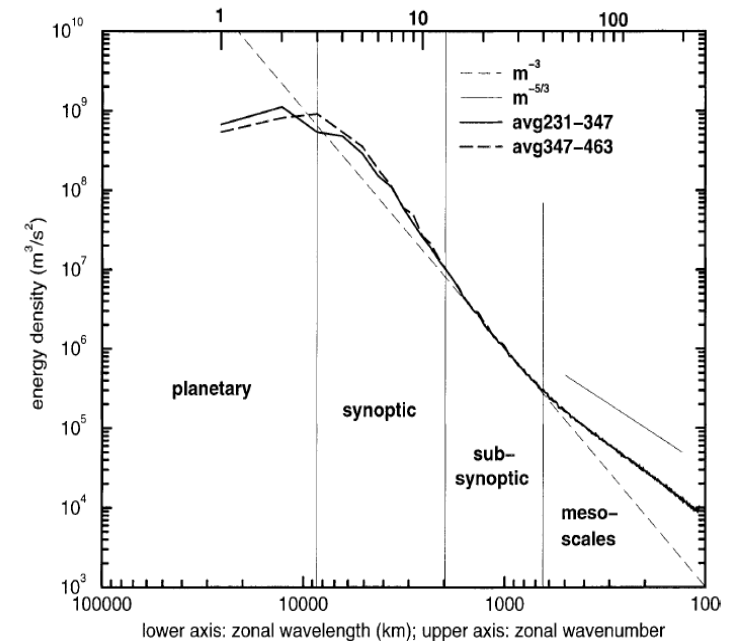
1. Ekman摩擦係数 κ に対する依存性を調べる実験 (TH) …解像度 512^2
 - κ の値をLH95の値の1/2倍から1000倍まで変化 (9ケース)
2. 解像度依存性を調べる実験 (TH-H) …解像度 1024^2
 - TH実験と同様 (5ケース)
3. 上下非対称な粘性に対する依存性を調べる実験 (HV) …解像度 512^2
 - LH95と同様の κ
 - 上層と下層の粘性係数の比 ν_2/ν_1 を1/10倍から10倍まで変化 (6ケース)

ベータ平面

4. β の値を変える実験…解像度 1024^2
 - 傾圧不安定の必要条件 $2 < \frac{2Uk_d^2}{\beta}$ を満たす (9ケース)

参考：T003の数値実験の設定

- 緯度50度を中心とするベータチャネル, 2-Level QGモデル
 - 水路の東西方向の長さ 25700km
 - 水路の東西方向の幅 3340km
 - 南北温度差 57K
 - 渦度方程式にEkman摩擦（時定数6.7日）
ラプラシアン^{18乗}の超粘性を導入
 - 熱力学方程式にNewton減衰（時定数20日）を導入
 - 最高解像度：東西方向に129 km
- スペクトル解析は東西方向のみに波数展開
 - 南北方向は不明（各緯度で平均？）
- 当初から解像度が足りていないとの批判
 - Smith (2004, JAS **61**) : comments
 - Tung (2004, JAS **61**): reply . . . フラックス不等式が重要と反論



f —平面実験

Iwayama *et al.*(2019)の結果

TH実験で使したパラメター

TABLE I. Parameters used for the TH experiments.

Experiment	N	k_T	κ	$2Uk_d/\kappa$	t_1	t_2	t_{ave}	Δt	$\Delta\nu$
TH1	512	170	0.02	25	1000	1500	200	$6.25 \cdot 10^{-4}$	0
TH2	512	170	0.04	12.5	1000	1500	200	$6.25 \cdot 10^{-4}$	0
TH3	512	170	0.08	6.25	1000	1500	200	$6.25 \cdot 10^{-4}$	0
TH4	512	170	0.2	2.5	1000	1500	200	$6.25 \cdot 10^{-4}$	0
TH5	512	170	0.4	1.25	1000	1500	200	$6.25 \cdot 10^{-4}$	0
TH6	512	170	0.8	0.625	1000	1500	200	$6.25 \cdot 10^{-4}$	0
TH7	512	170	2	0.25	1000	1500	200	$6.25 \cdot 10^{-4}$	0
TH8	512	170	8	$6.25 \cdot 10^{-2}$	10000	10500	200	$6.25 \cdot 10^{-4}$	0
TH9	512	170	40	$1.25 \cdot 10^{-2}$	64000	66000	500	$1.25 \cdot 10^{-3}$	0

TH-H実験で使したパラメター

TABLE III. As Table I, but for the TH-H experiments.

Experiment	N	k_T	κ	$2Uk_d/\kappa$	t_2	t_3	t_{ave}	Δt	$\Delta\nu$
TH1-H	1024	341	0.02	25	1500	1750	200	$3.125 \cdot 10^{-4}$	0
TH2-H	1024	341	0.04	12.5	1500	1750	200	$3.125 \cdot 10^{-4}$	0
TH5-H	1024	341	0.4	1.25	1500	1750	200	$3.125 \cdot 10^{-4}$	0
TH7-H	1024	341	2	0.25	1500	1750	200	$3.125 \cdot 10^{-4}$	0
TH9-H	1024	341	40	$1.25 \cdot 10^{-2}$	66000	66500	400	$6.25 \cdot 10^{-4}$	0

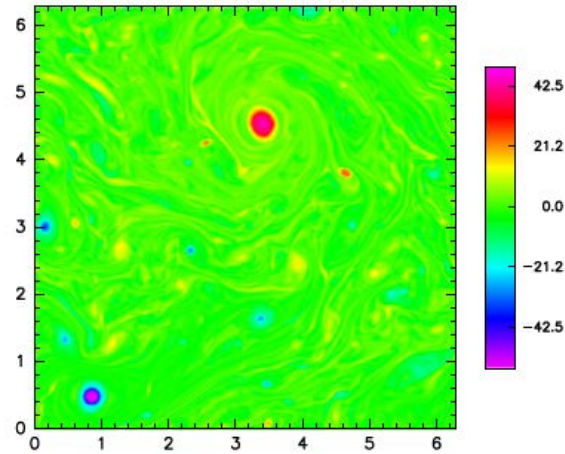
HV実験で使ったパラメター

TABLE V. As for Table I, but for the HV experiments.

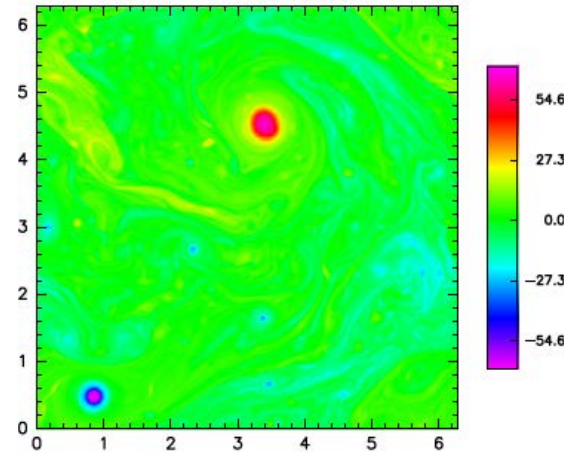
Experiment	N	k_T	κ	$2Uk_d/\kappa$	t_1	t_2	t_{ave}	Δt	$\Delta\nu/\nu_1$
HV1	512	170	0.04	12.5	1000	1500	200	$6.25 \cdot 10^{-4}$	-0.9
HV2	512	170	0.04	12.5	1000	1500	200	$6.25 \cdot 10^{-4}$	-0.75
HV3	512	170	0.04	12.5	1000	1500	200	$6.25 \cdot 10^{-4}$	-0.5
HV4	512	170	0.04	12.5	1000	1500	200	$6.25 \cdot 10^{-4}$	1
HV5	512	170	0.04	12.5	1000	1500	200	$6.25 \cdot 10^{-4}$	3
HV6	512	170	0.04	12.5	1000	1500	200	$6.25 \cdot 10^{-4}$	9

渦位場の順圧成分と傾圧成分

(a) Exp. TH2, barotropic

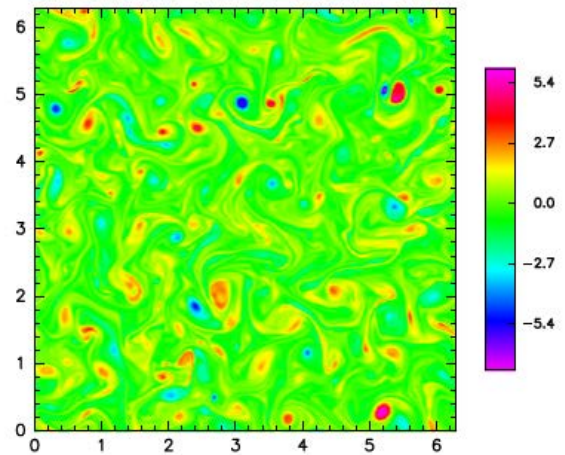


(b) Exp. TH2, baroclinic

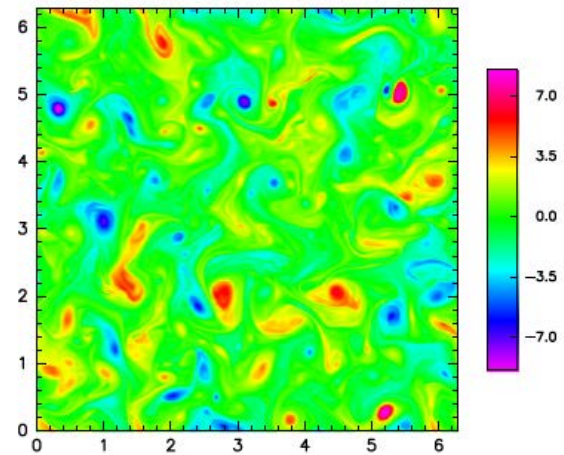


K : 弱い
LH95と同様

(c) Exp. TH5, barotropic



(d) Exp. TH5, baroclinic

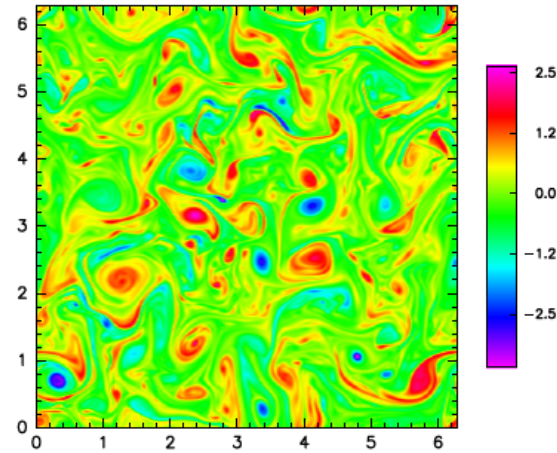


K :
LH95の10倍

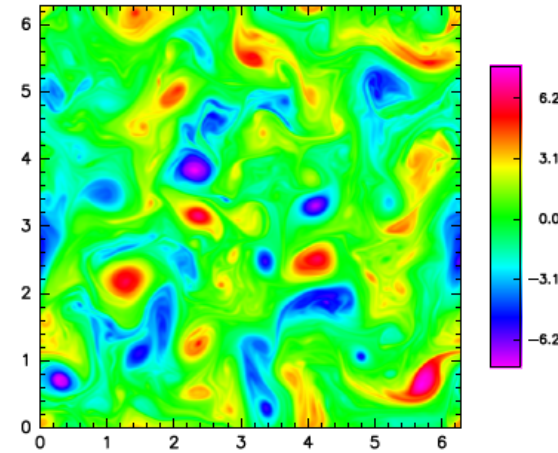


渦位場の順圧成分と傾圧成分

(e) Exp. TH7, barotropic

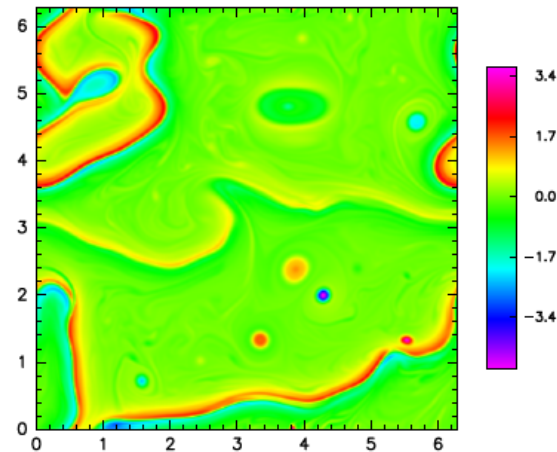


(f) Exp. TH7, baroclinic

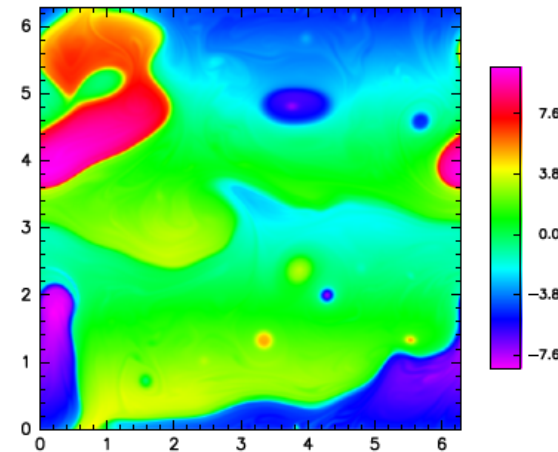


K :
LH95の50倍

(g) Exp. TH9, barotropic



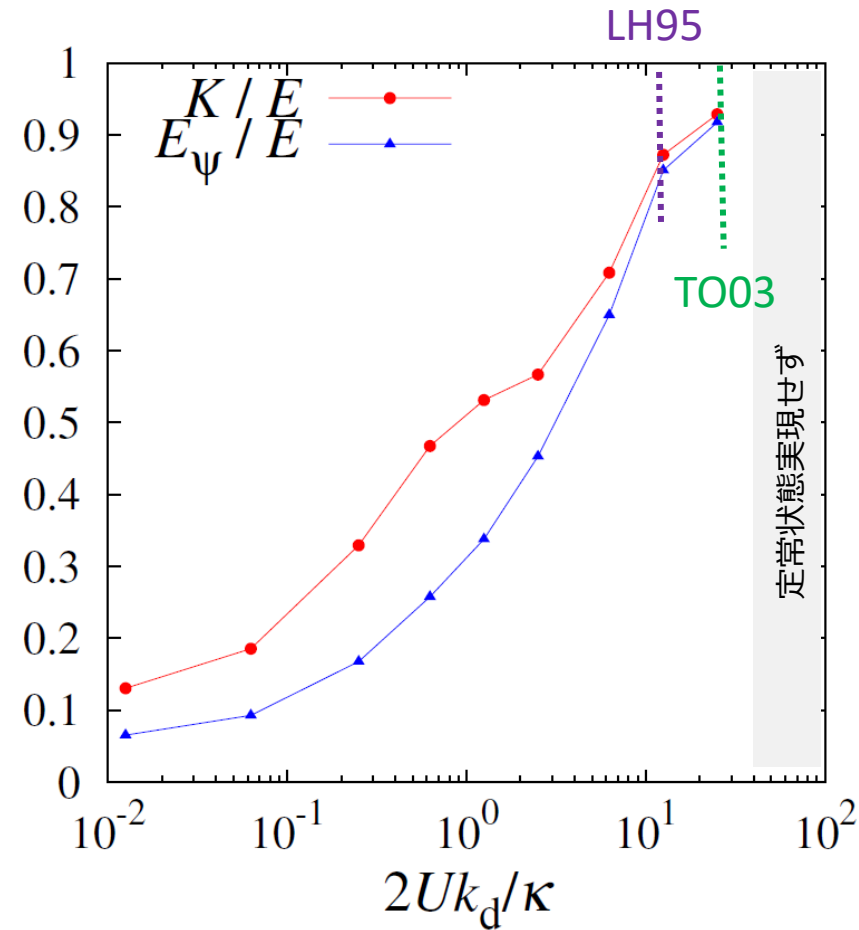
(h) Exp. TH9, baroclinic



K : 強い
LH95の1000倍



平衡状態におけるエネルギーとthroughputの関係



- E : 全エネルギー
- K : 運動エネルギー
- E_ψ : 順圧エネルギー

本研究の目的

- TO03によるNGスペクトルの $k^{-5/3}$ スペクトルの形成メカニズムを検証する
 - TO03を除いて準地衡2層モデルでNGスペクトルは再現されていない
 - 形成メカニズムの検証も行われていない

- $k^{-5/3}$ スペクトルの形成メカニズム

1. 隠れたカスケードは存在するか？
2. エネルギーフラックスがエントロフィーフラックスより卓越する
($k^2 \Pi_E(k) - \Pi_Z(k) > 0$) 波数領域は存在するか？
3. 上記の波数領域は慣性領域か？

- 2次元Navier-Stokes乱流ではエネルギー慣性領域でもエントロフィー慣性領域でも

$$k^2 \Pi_E(k) - \Pi_Z(k) < 0$$

・・・ Danilovの不等式

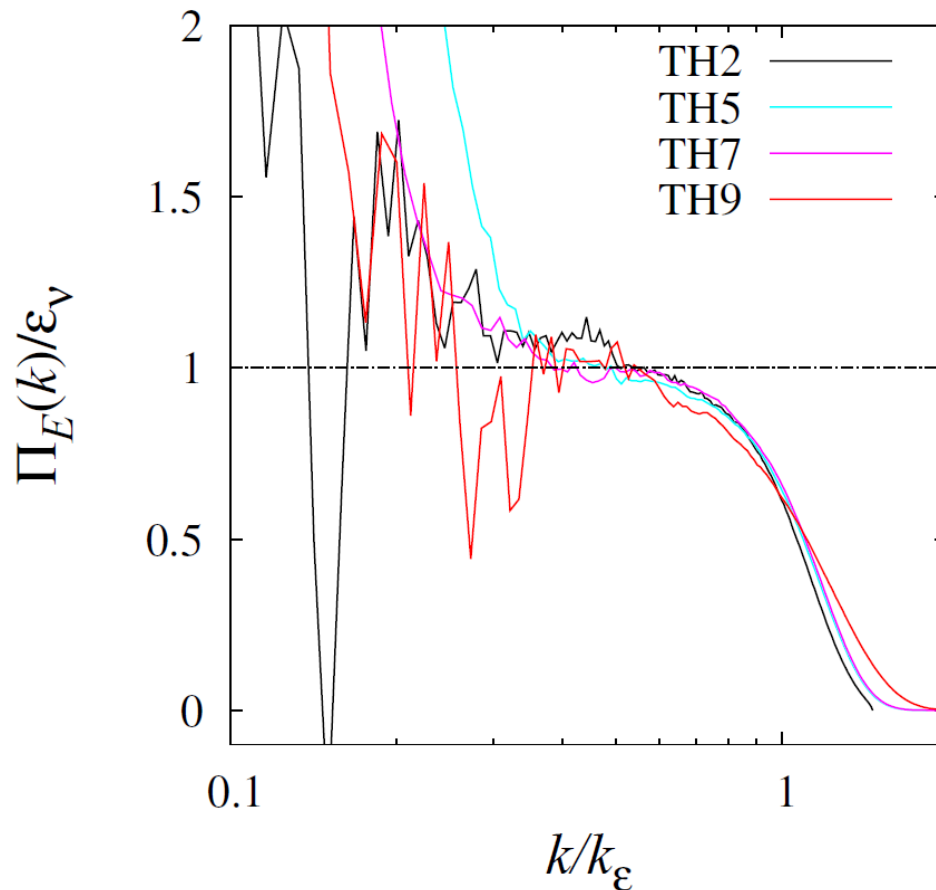
が証明されているので上記のメカニズムは働かない。

- 地衡流乱流特有の性質？ (Gkioulekas & Tung, 2007)

T003メカニズムの検証（1）：

隠れたエネルギーカスケードは存在するか？

- TH実験



- 超粘性に伴う散逸率と等しい高波数向きのフラックスが存在

- エネルギー散逸率

$$\epsilon_\nu \equiv - \left\langle \sum_{i=1}^2 \nu_i \psi_i \nabla^8 q_i \right\rangle$$

- 隠れたカスケードは存在する
しかし、...

- 定常性が満たされるならば、散逸率に等しい高波数向きのエネルギーフラックスは存在するので当たり前結果.

本研究の目的

- TO03によるNGスペクトルの $k^{-5/3}$ スペクトルの形成メカニズムを検証する
 - TO03を除いて準地衡2層モデルでNGスペクトルは再現されていない
 - 形成メカニズムの検証も行われていない

- $k^{-5/3}$ スペクトルの形成メカニズム

1. 隠れたカスケードは存在するか？
2. エネルギーフラックスがエントロフィーフラックスより卓越する
($k^2 \Pi_E(k) - \Pi_Z(k) > 0$) 波数領域は存在するか？
3. 上記の波数領域は慣性領域か？

- 2次元Navier-Stokes乱流ではエネルギー慣性領域でもエントロフィー慣性領域でも

$$k^2 \Pi_E(k) - \Pi_Z(k) < 0$$

・・・ Danilovの不等式

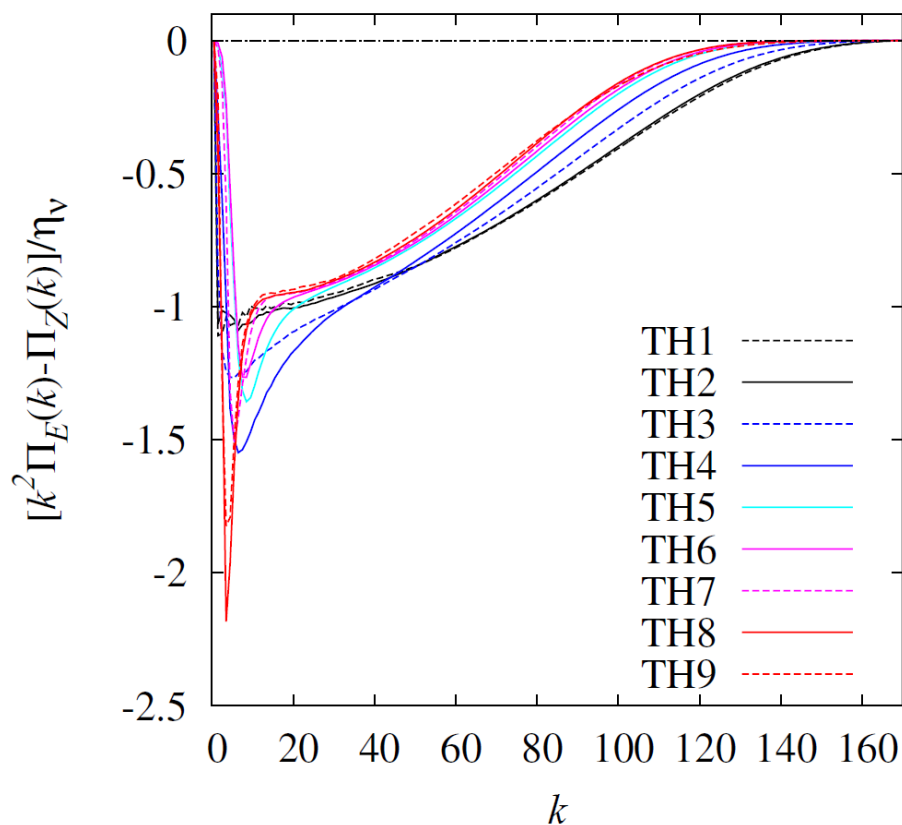
が証明されているので上記のメカニズムは働かない。

- 地衡流乱流特有の性質？ (Gkioulekas & Tung, 2007)

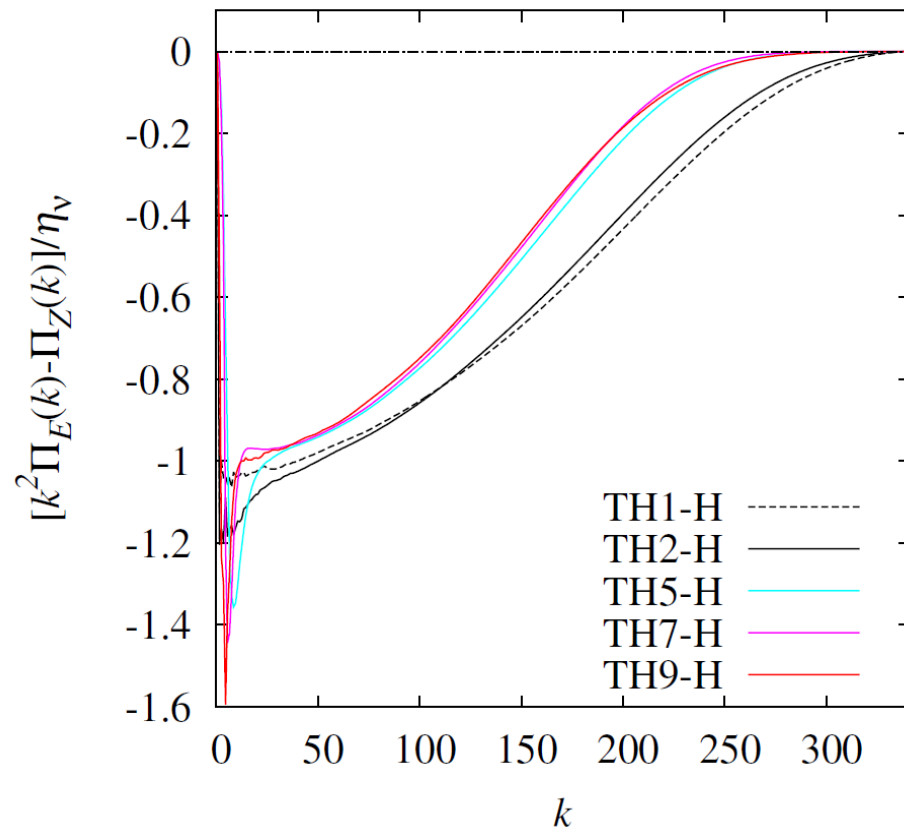
T003メカニズムの検証（2）

Danilov不等式は破れるか？

- TH実験



- TH-H実験

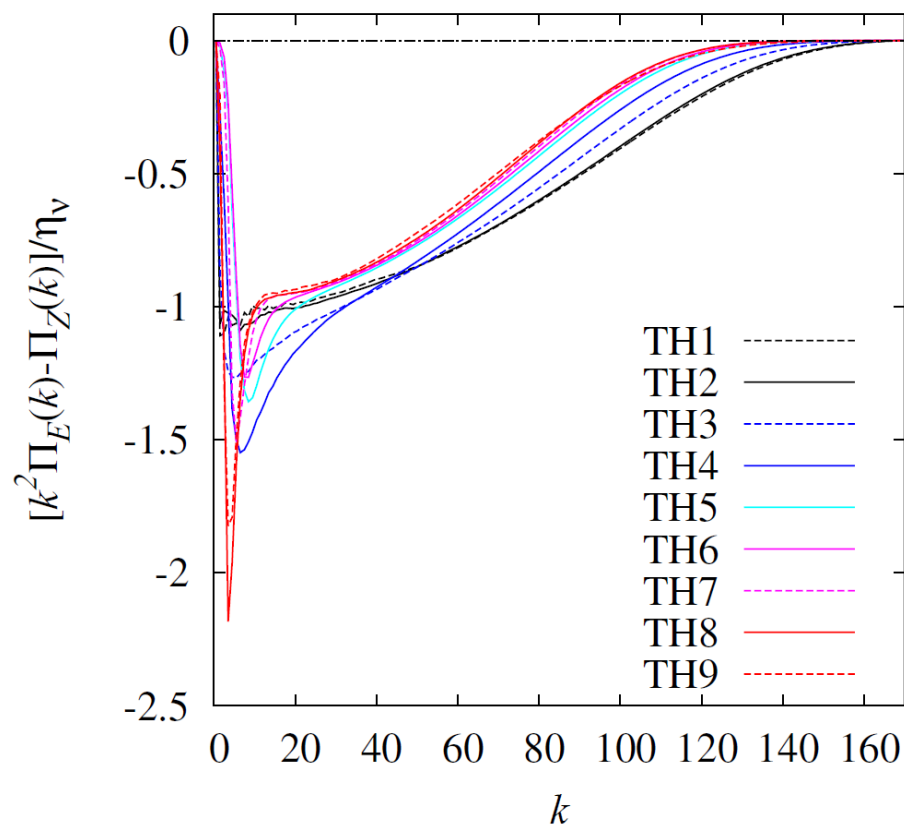


Danilov不等式は破れない！

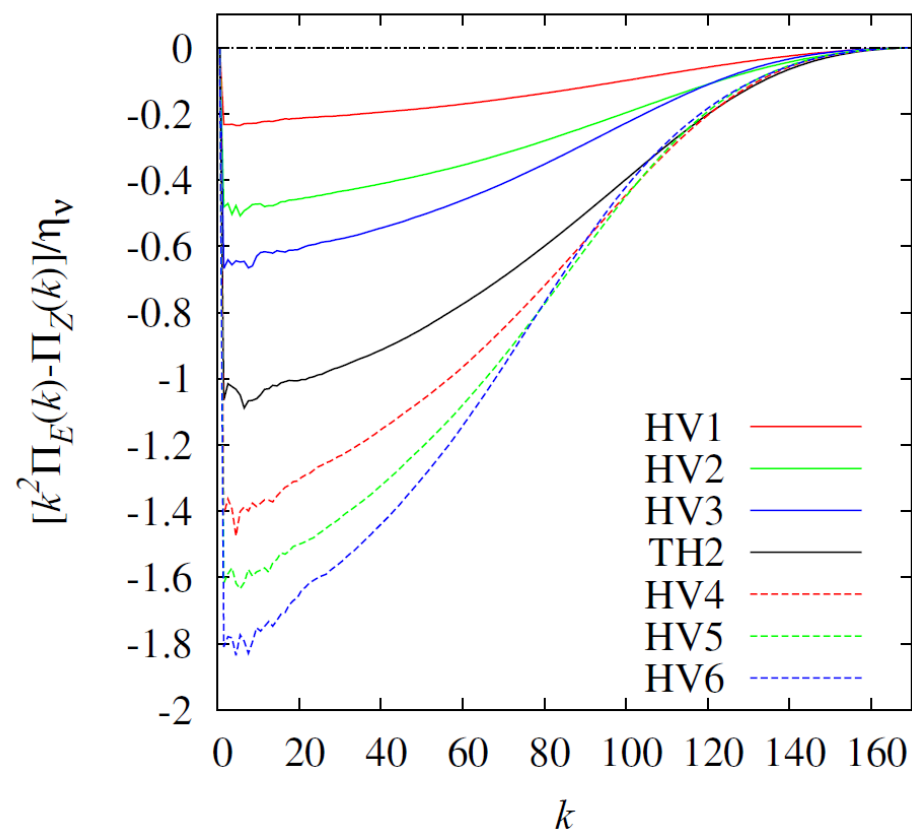
T003メカニズムの検証（2）

Danilov不等式は破れるか？

- TH実験



- HV実験



Danilov不等式は破れない！

本研究の目的

- TO03によるNGスペクトルの $k^{-5/3}$ スペクトルの形成メカニズムを検証する
 - TO03を除いて準地衡2層モデルでNGスペクトルは再現されていない
 - 形成メカニズムの検証も行われていない

- $k^{-5/3}$ スペクトルの形成メカニズム
 1. 隠れたカスケードは存在するか？
 2. エネルギーフラックスがエンストロフィーフラックスより卓越する
($k^2 \Pi_E(k) - \Pi_Z(k) > 0$) 波数領域は存在するか？
 3. 上記の波数領域は慣性領域か？

- 2次元Navier-Stokes乱流ではエネルギー慣性領域でもエンストロフィー慣性領域でも

$$k^2 \Pi_E(k) - \Pi_Z(k) < 0$$

・・・ Danilovの不等式

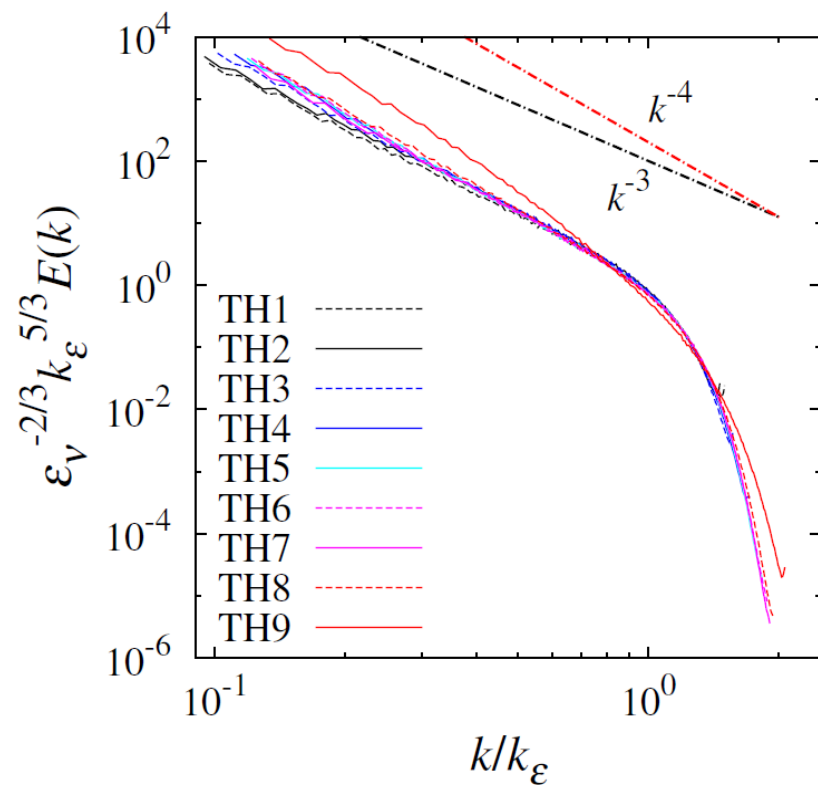
が証明されているので上記のメカニズムは働かない。

- 地衡流乱流特有の性質？

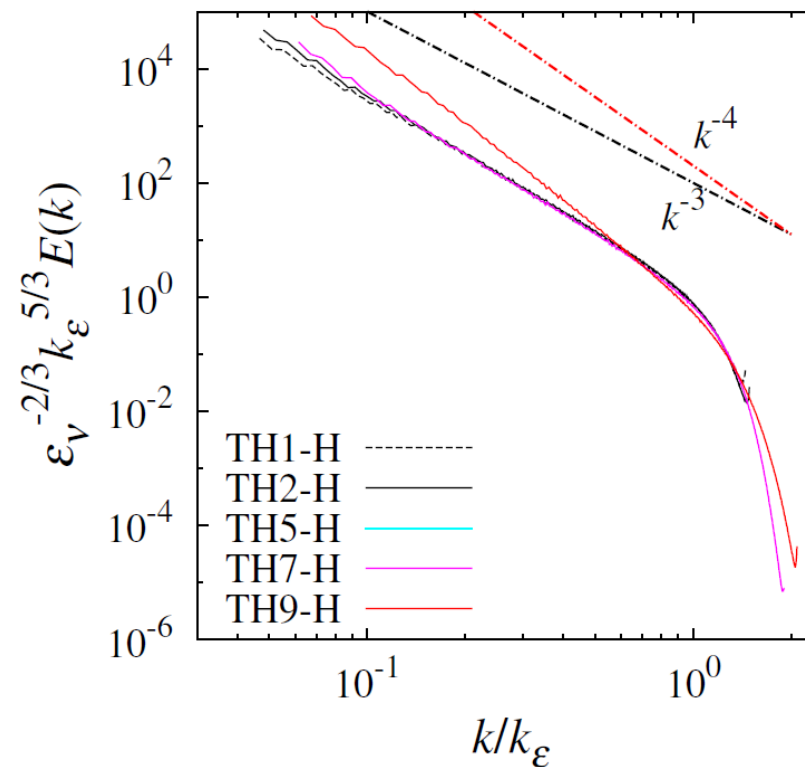
(Gkioulekas & Tung, 2007)

計算結果：全エネルギースペクトル

• TH実験



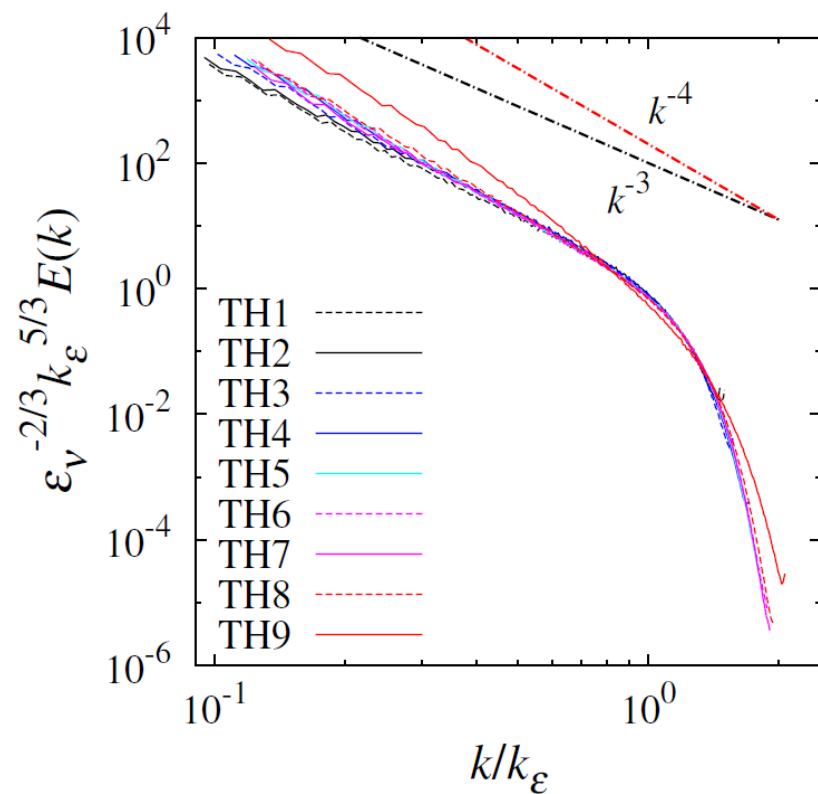
• TH-H実験



κ を0.5倍から1000倍まで変化
 k_d より大きい波数領域のみ表示

計算結果：全エネルギースペクトル

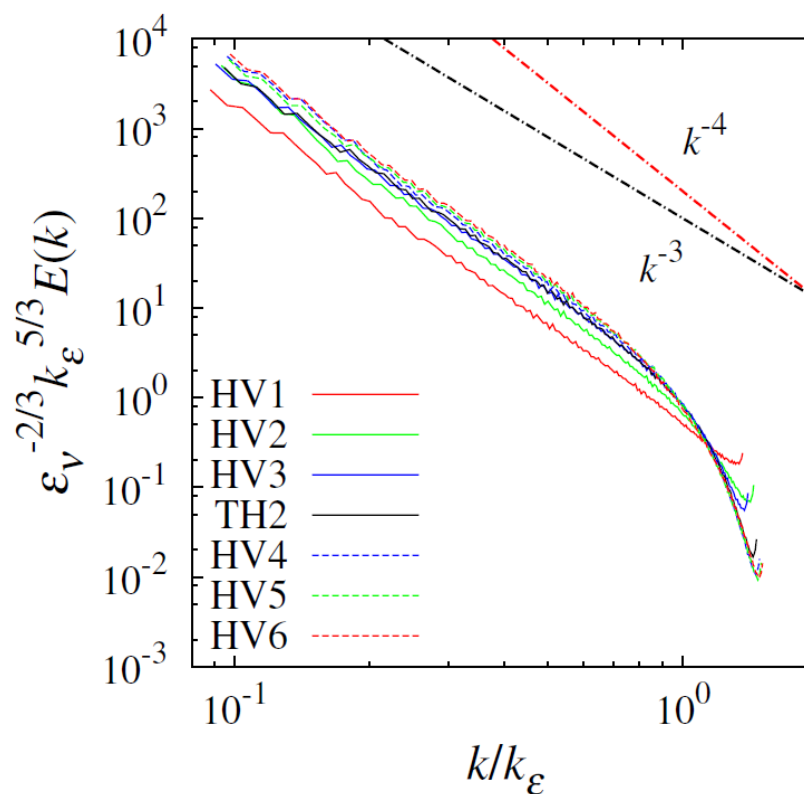
• TH実験



κ を0.5倍から1000倍まで変化

k_d より大きい波数領域のみ表示

• HV実験



ν_2/ν_1 を0.1倍から10倍まで変化

Iwayama et al. (2019)のまとめ

- 準地衡流2層モデルにおけるNGスペクトルの $k^{-5/3}$ スペクトル形成メカニズム (Tung & Orlando (2003)メカニズム) を数値実験的に検証した。
 - f 平面・2重周期境界では $k^{-5/3}$ スペクトルもTOメカニズムも再現されなかった。
 - 隠れたカスケードは存在する
 - フラックス差の符号の転移は起こらない ($k^2\Pi_E(k) - \Pi_Z(k) < 0$)
- Danilov不等式は破れない！**
- 高波数側にエネルギー慣性領域は形成されない
 - TO03のメカニズムは普遍的に働くものではない。
 - TO03はベータチャネルモデル.
 - 慣性領域は境界条件, 強制, 散逸に依存しない領域なので, TO03の結論は正しくない
 - 準地衡2層モデルにおける高波数領域 ($k_d \ll k$) の普遍的スペクトル
 - 古典論 $E(k) \propto k^{-3}$ を支持する結果 (throughputが大きい場合)
 - Saffmanスペクトル $E(k) \propto k^{-4}$ を支持する結果 (throughputが小さい場合)

余談 : Gkioulekasからのメール

Dear Dr. Iwayama,

I have enjoyed reading your paper

Takahiro Iwayama and Shogo Okazaki and Takeshi Watanabe (2019): "Numerical investigation of the Danilov inequality for two-layer quasi-geostrophic systems", Fluid Dynamics Research 51, 055507

which recently turned up on my Google Scholar alerts.

The two-layer quasi-geostrophic model is very interesting from the standpoint of turbulence research with several questions waiting to be explored.

In spite of the negative result, I very much appreciate your taking an interest in this problem. My current feeling is that a Danilov inequality violation is a bit of a transient effect, and may not be easy to reproduce with a two-layer quasi-geostrophic model. I am currently trying to flesh out the details of a mathematical argument that seems to be pointing in that direction, and hope to submit it for publication by December.

β -平面実験

流体力学会年会2019年で発表

数値実験の概要

- 方程式に含まれるパラメター：

- Iwayama *et al.* (2019)のTH-H実験（解像度 1024^2 ）と基本的に同様.
- 無次元パラメター

$\frac{2Uk_d}{\kappa}$: 0.25, 2.5, 12.5 の 3 ケース（Iwayama *et al.* (2019)のTH2, TH4, TH7実験）

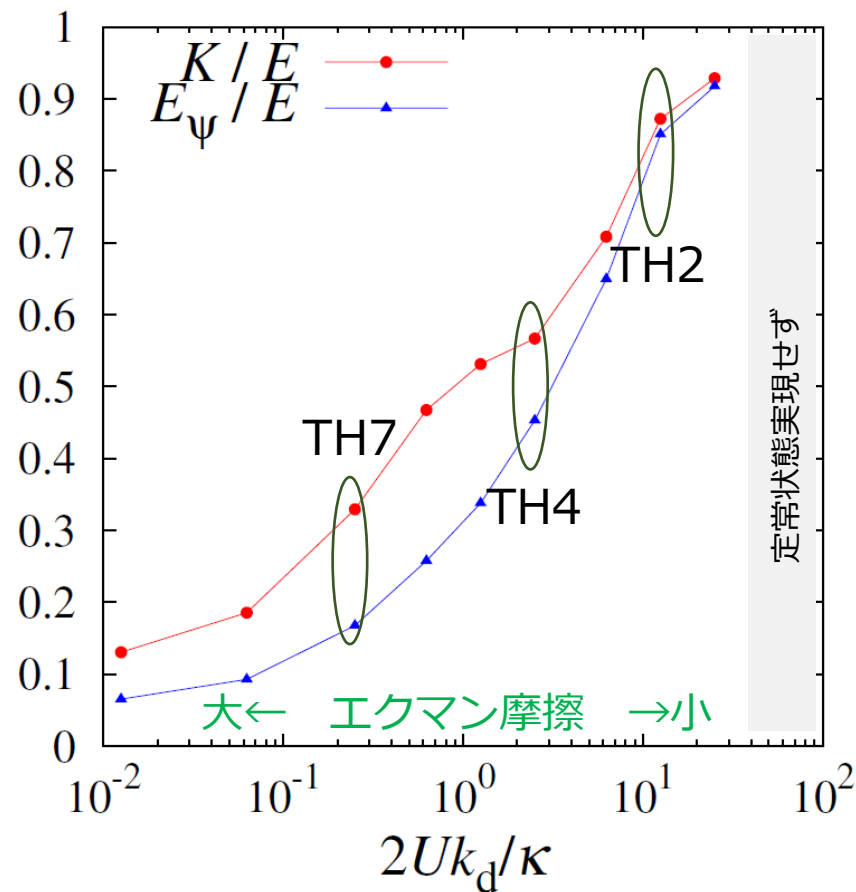
$\frac{2Uk_d^2}{\beta}$: 2.5, 5, 10, ∞ の 4 ケース
 $2 < \frac{2Uk_d^2}{\beta}$: 傾圧不安定の必要条件

$\frac{2U}{\nu k_d^{2p-1}}$: 散逸波数が切断波数以上になるように

- $k_d = 10$, $p = 4$, 上下層で等しい超粘性係数を使用

平衡状態におけるエネルギーとthroughputの関係

$\beta = 0$ の場合



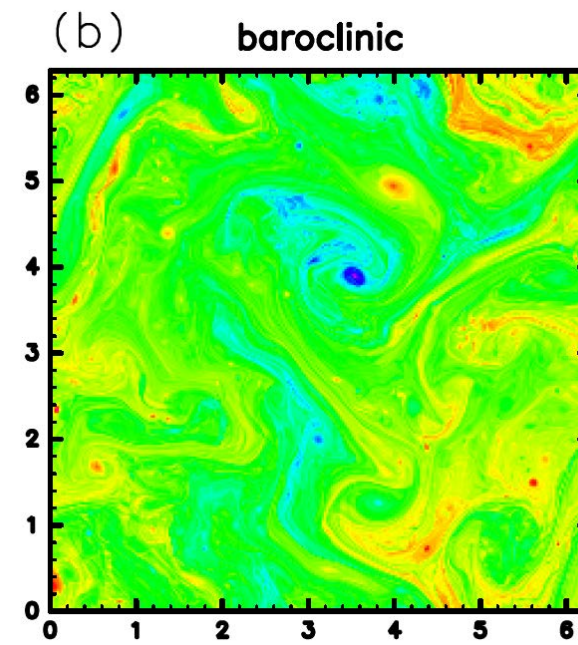
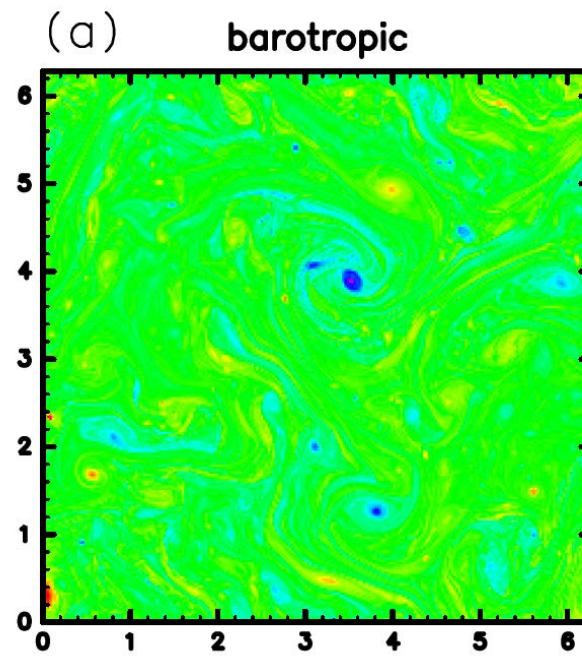
- E : 全エネルギー
- K : 運動エネルギー
- E_ψ : 順圧エネルギー

Iwayama, et al. (2019)

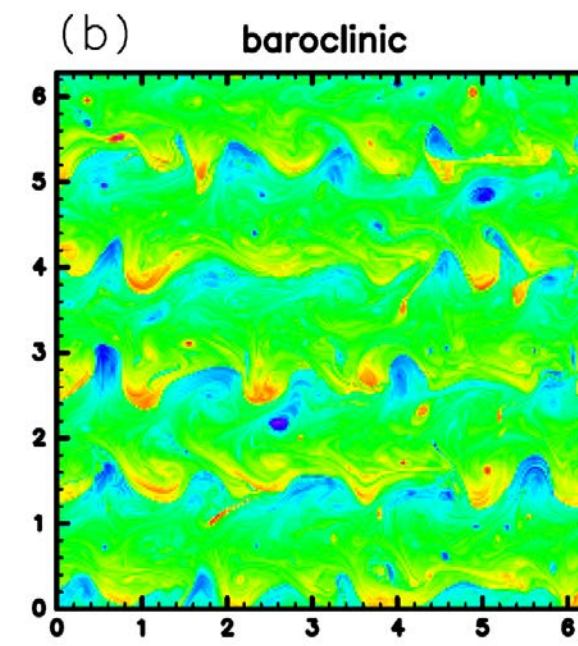
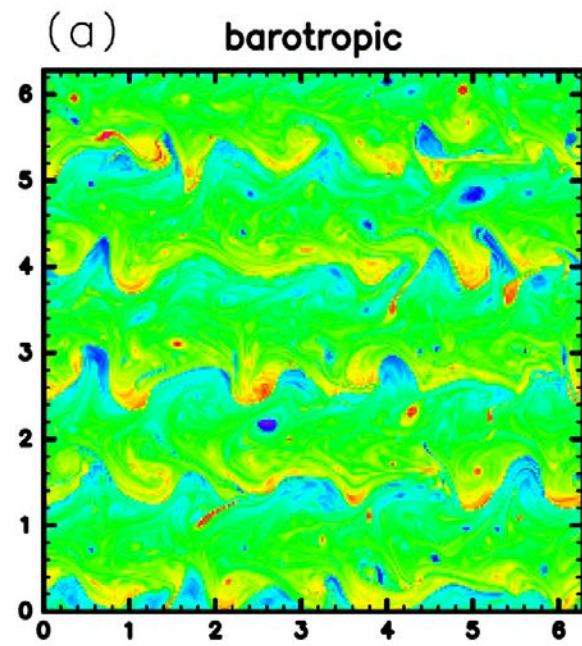
渦位場

エクマン摩擦：小

TH2, $\beta = 0$



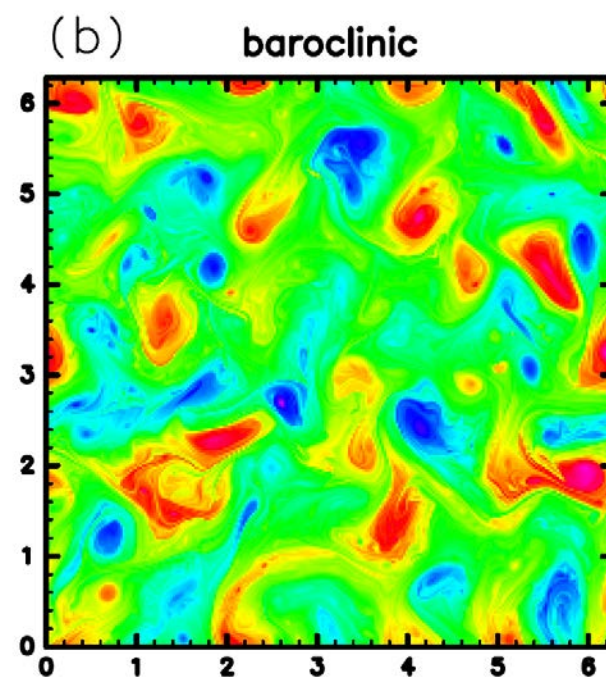
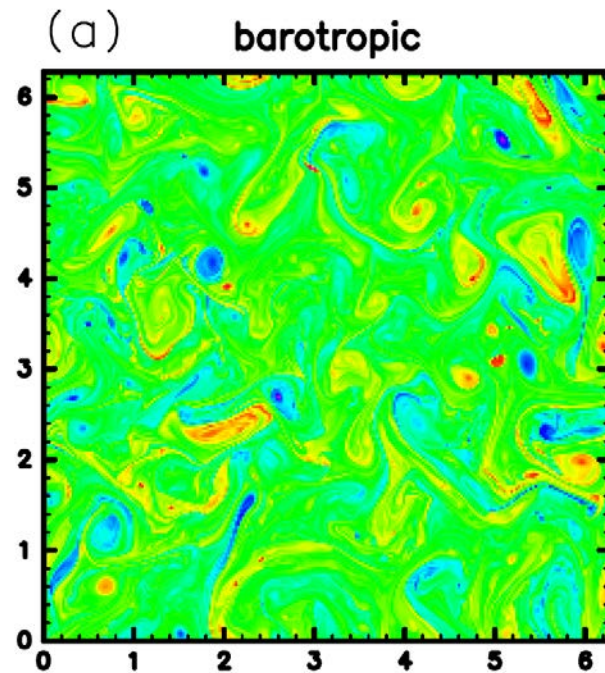
TH2, $\beta = 2$



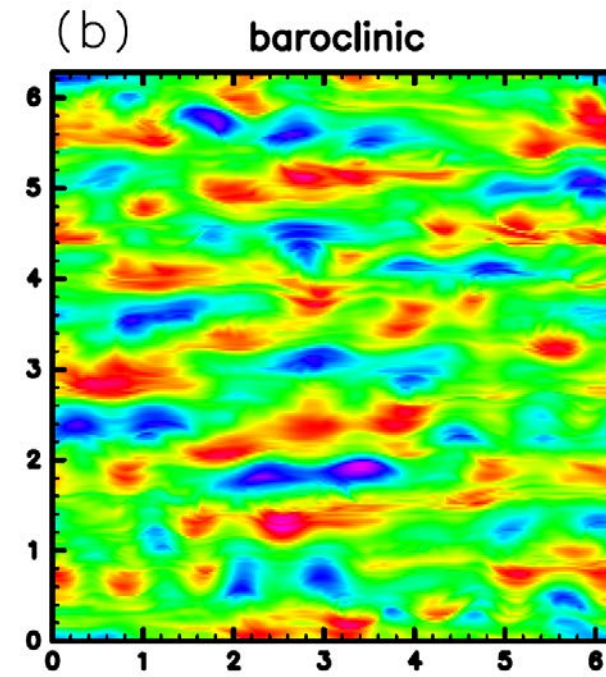
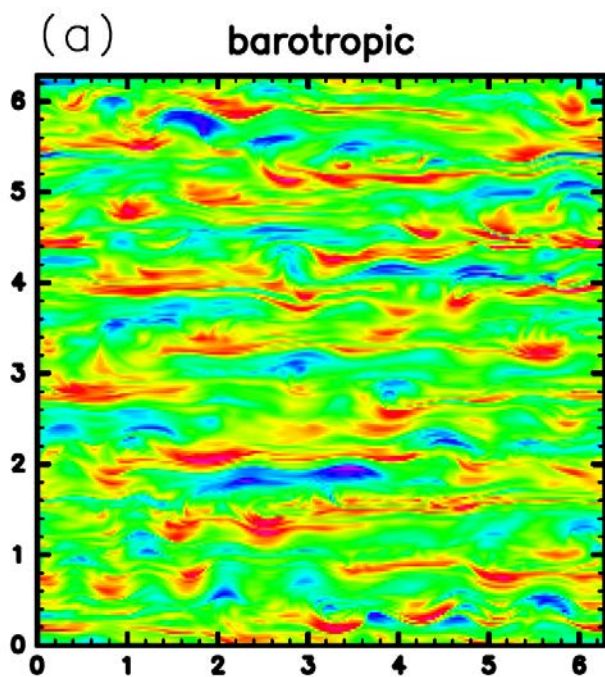
渦位場

エクマン摩擦：大

TH7, $\beta = 0$

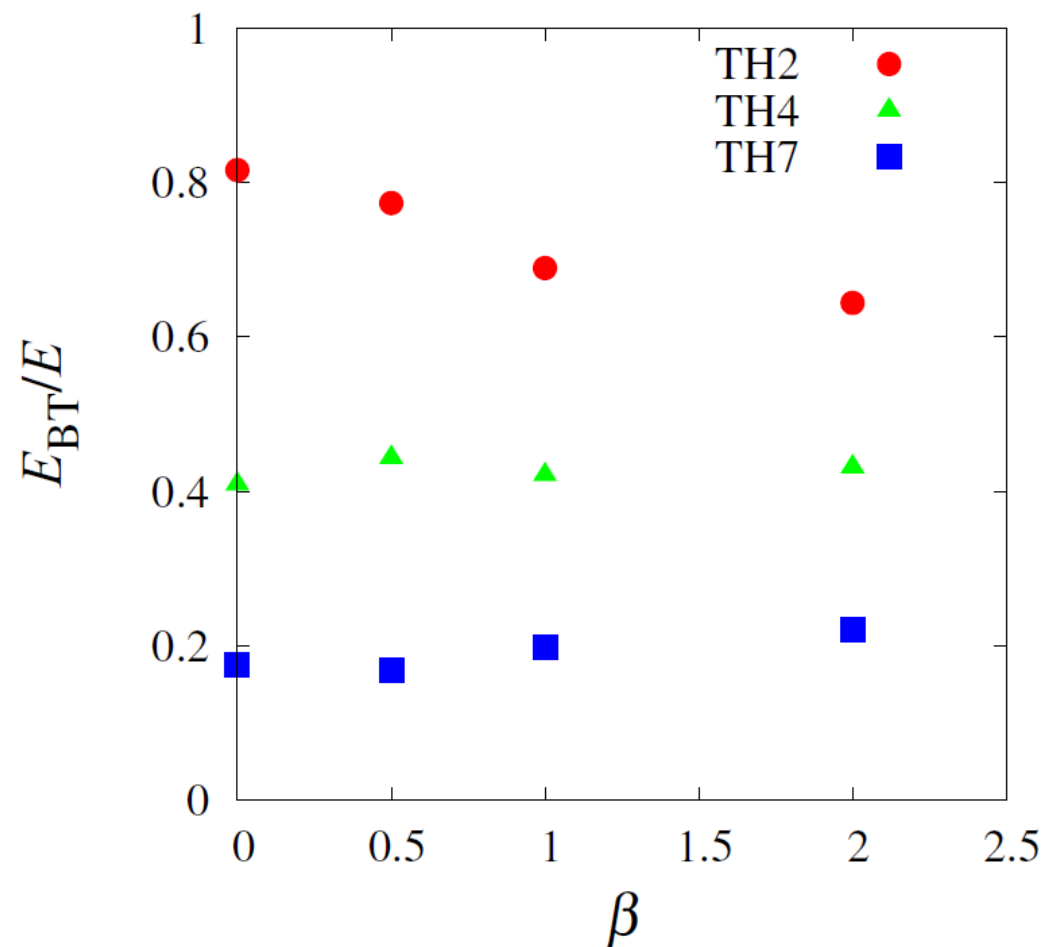


TH7, $\beta = 2$



結果：エネルギーの分配の β 依存性

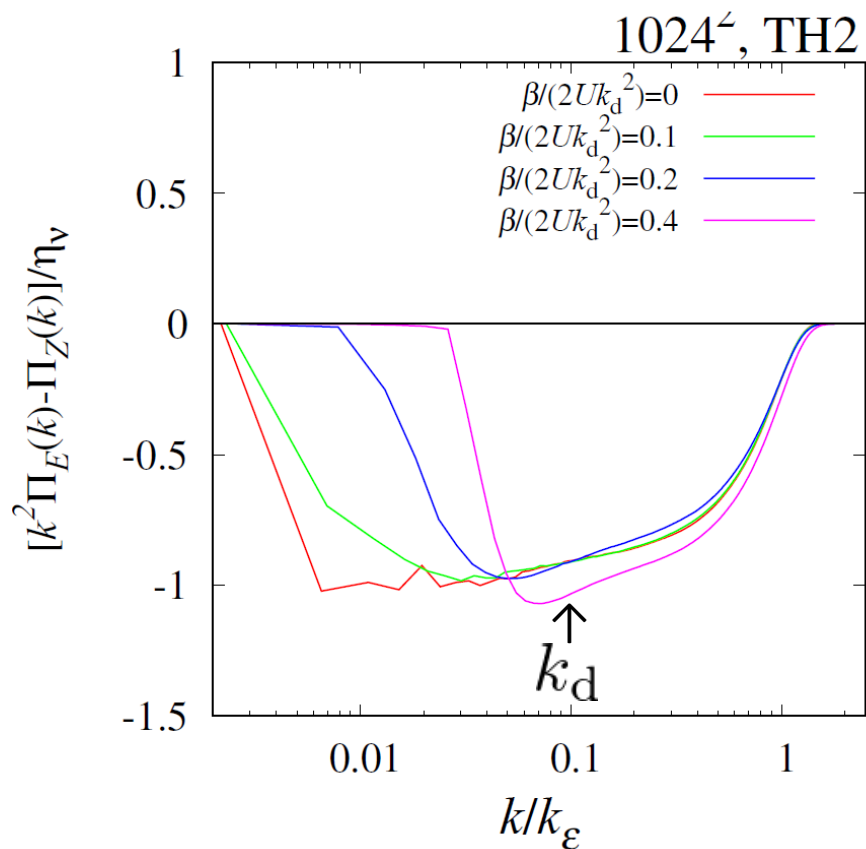
- 順圧エネルギーと全エネルギーの比



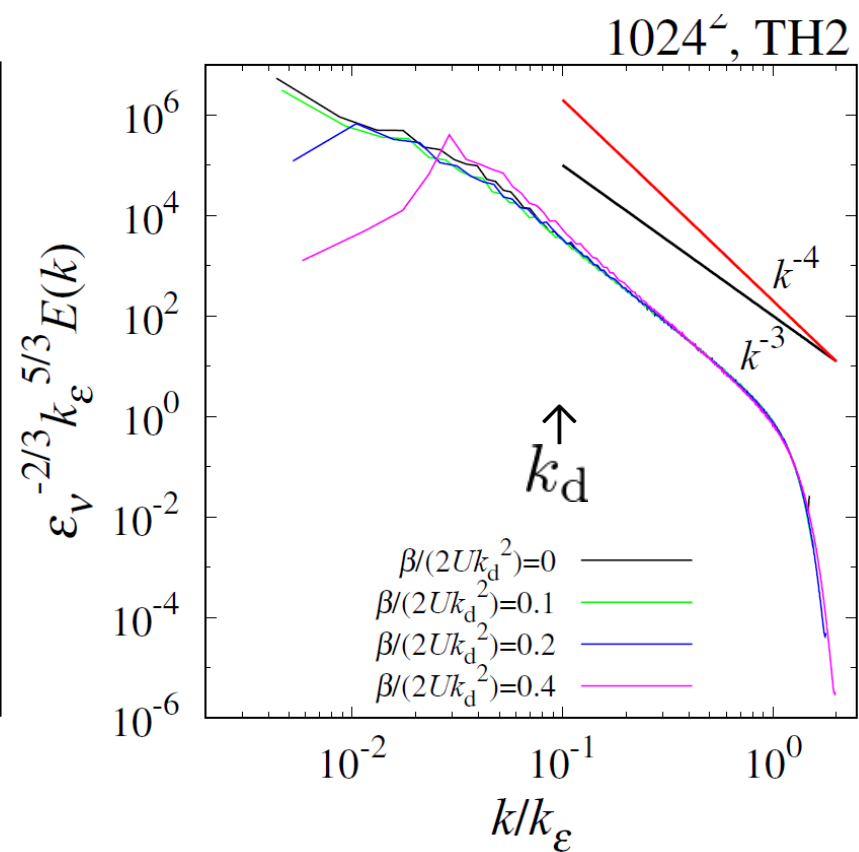
結果:

Danilovの不等式は破れるか？
スペクトルの傾きの転移はあるか？

- エクマン摩擦：小



フラックスの差

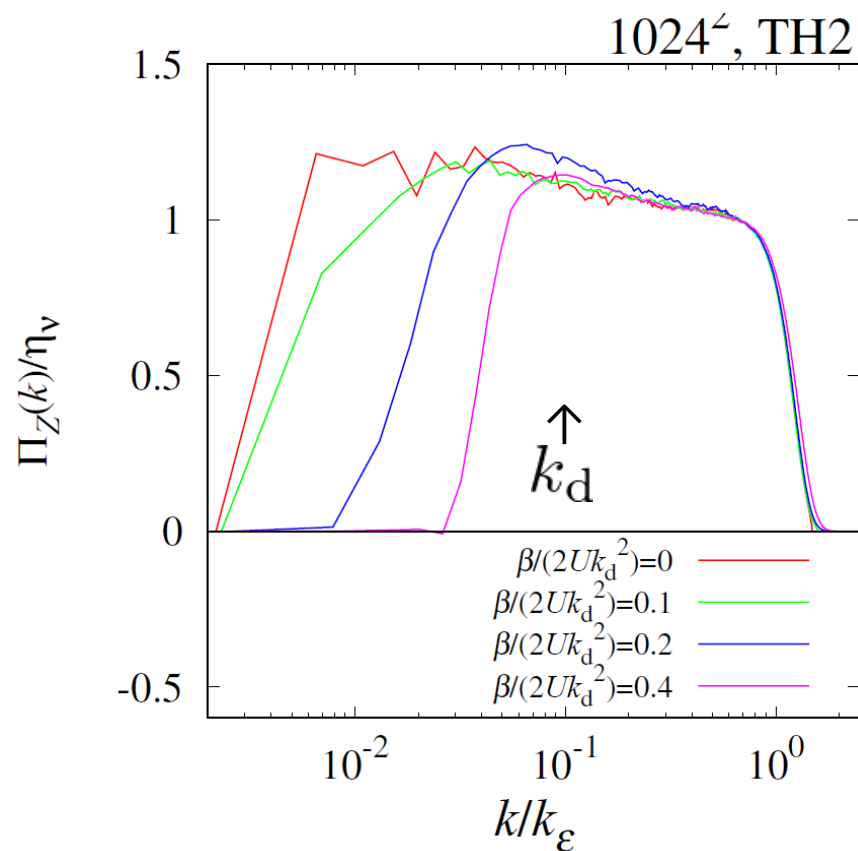


エネルギースペクトル

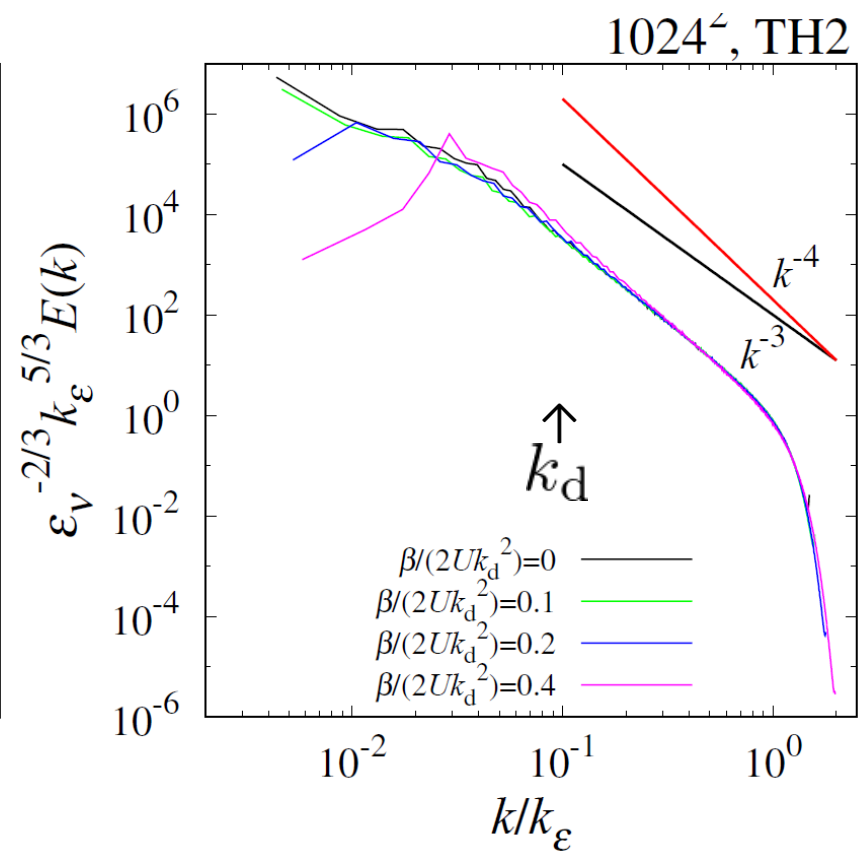
結果:

Danilovの不等式は破れるか？
スペクトルの傾きの転移はあるか？

- エクマン摩擦：小



エンストロフィーフラックス

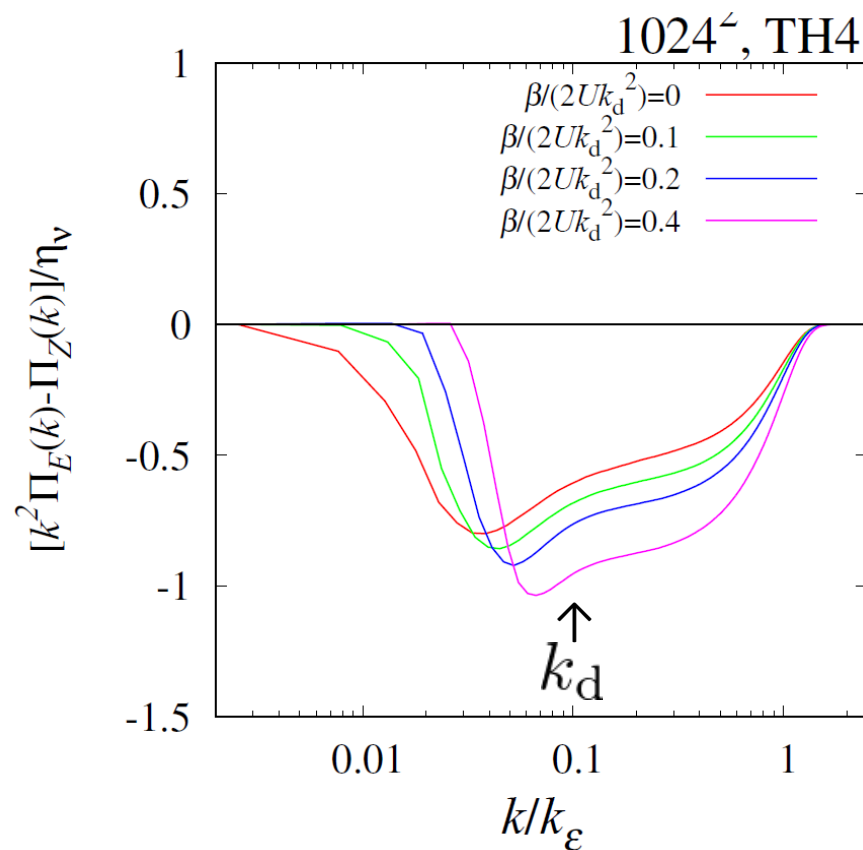


エネルギースペクトル

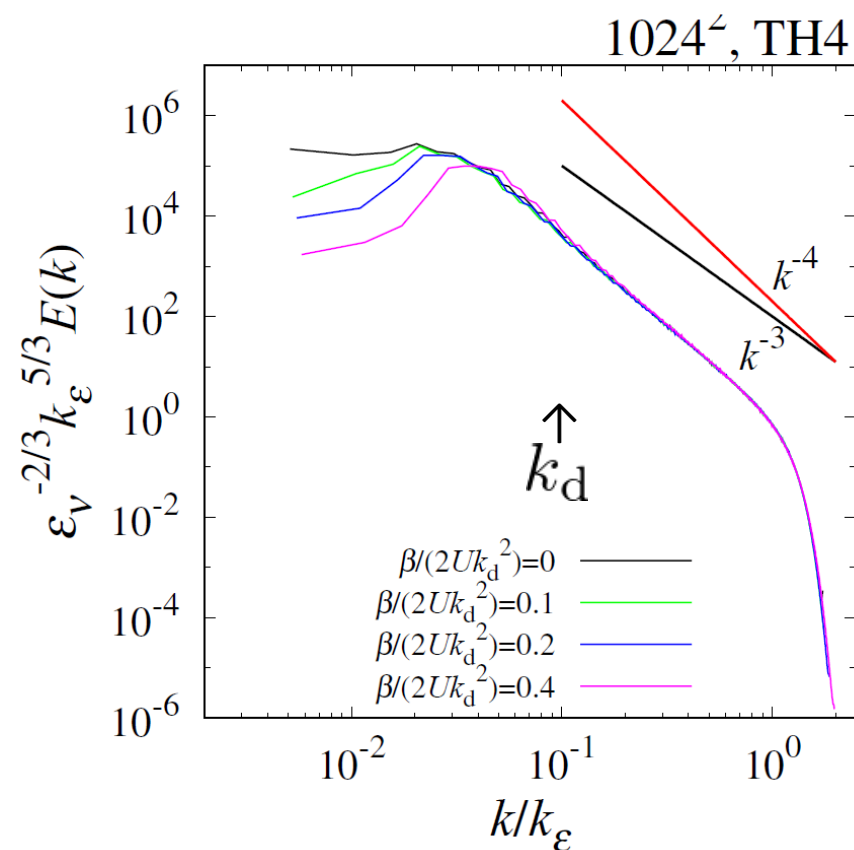
結果:

Danilovの不等式は破れるか？
スペクトルの傾きの転移はあるか？

- エクマン摩擦：中



フラックスの差

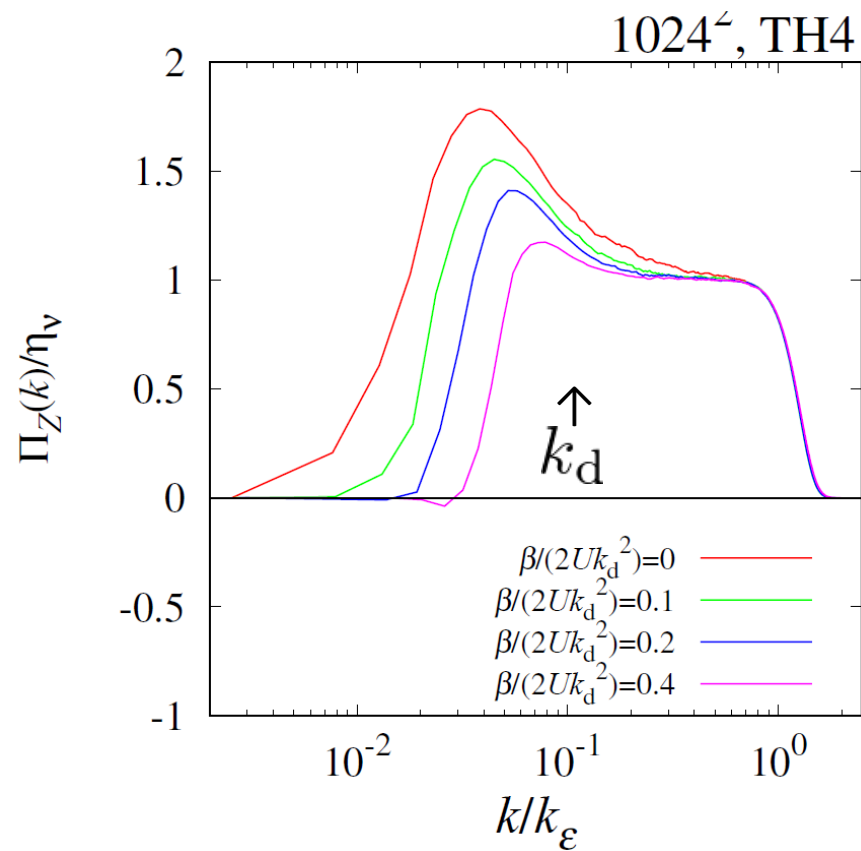


エネルギースペクトル

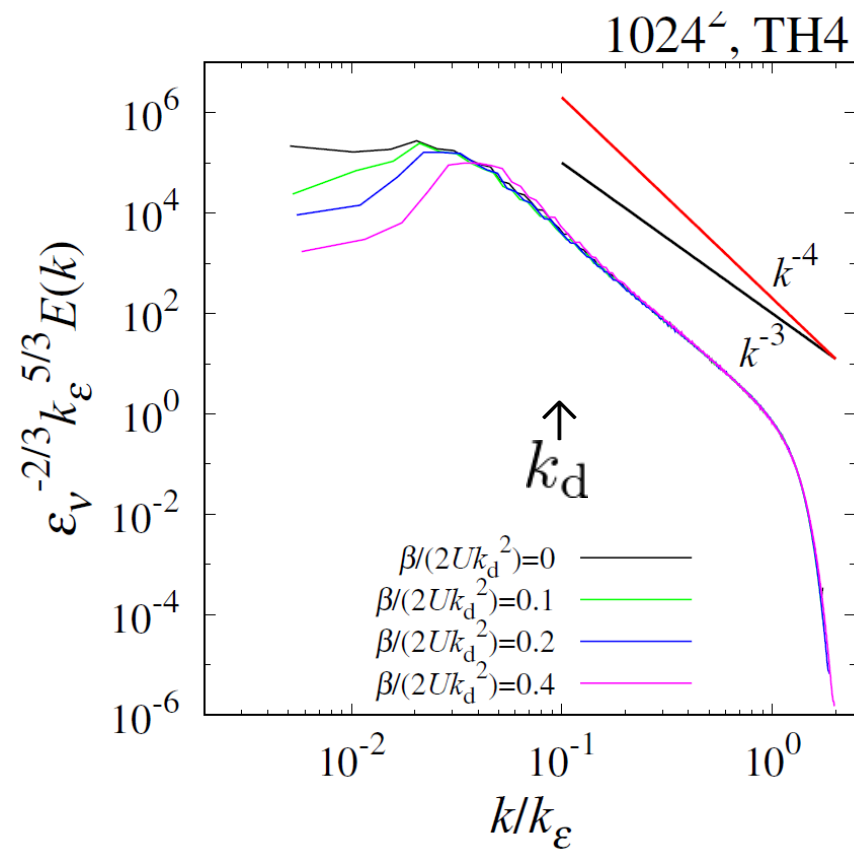
結果:

Danilovの不等式は破れるか？
スペクトルの傾きの転移はあるか？

- エクマン摩擦：中



エンストロフィーフラックス

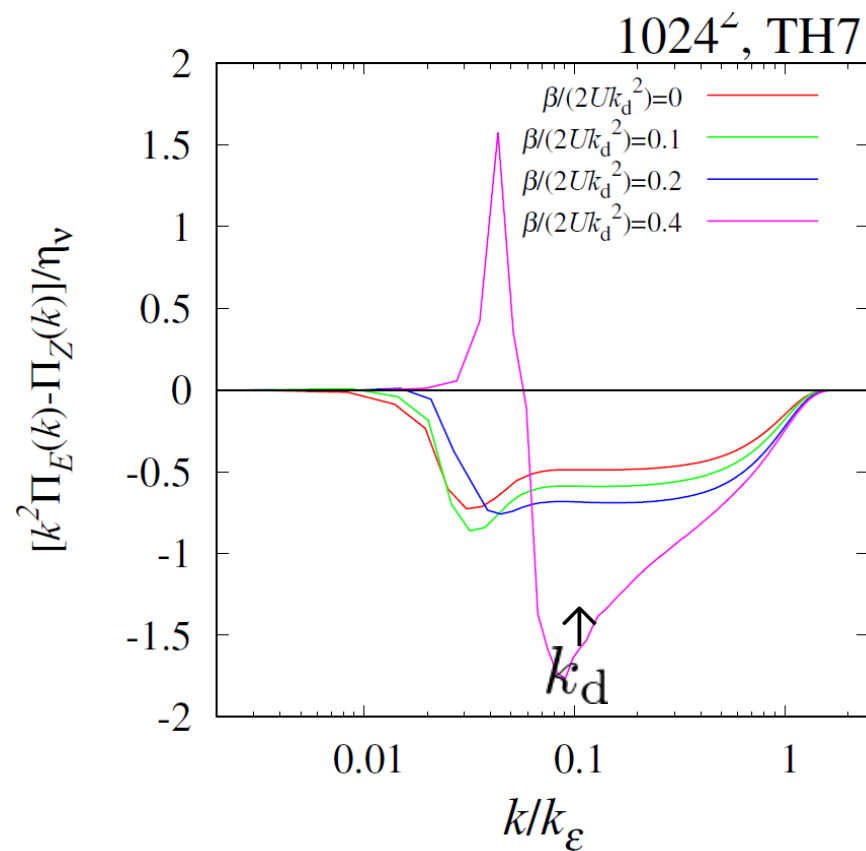


エネルギースペクトル

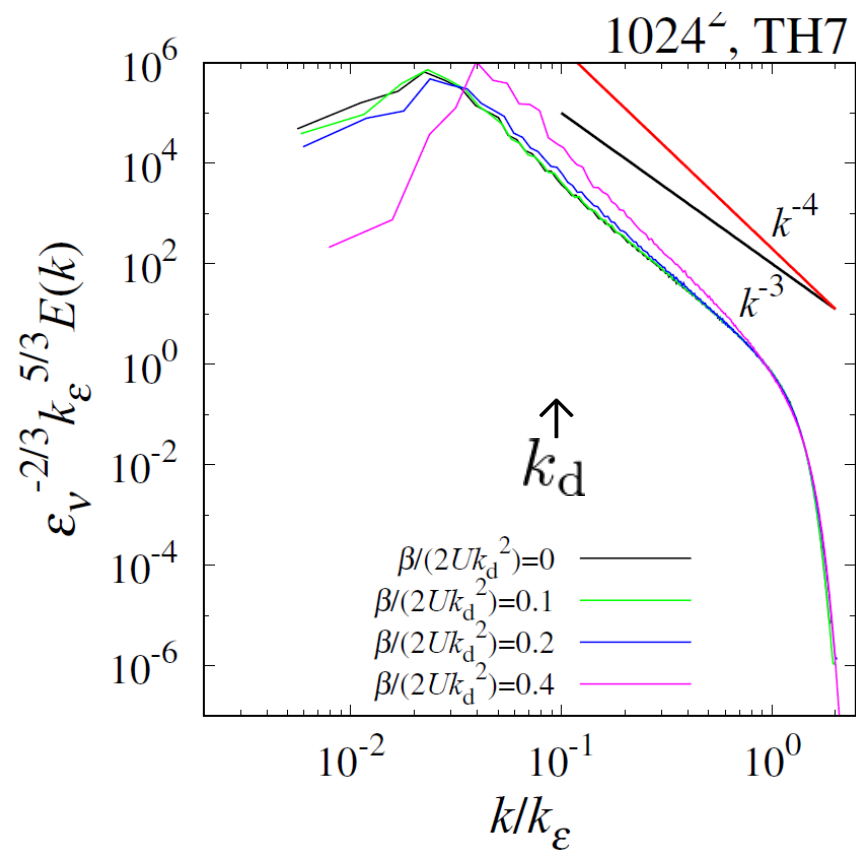
結果:

Danilovの不等式は破れるか？
スペクトルの傾きの転移はあるか？

- エクマン摩擦：大



フラックスの差

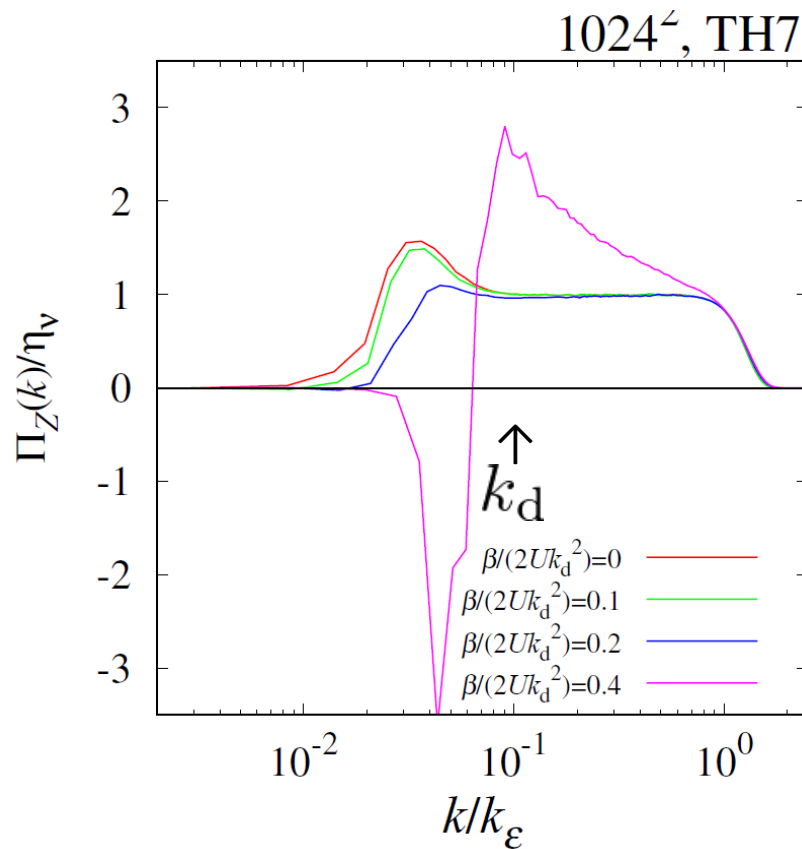


エネルギースペクトル

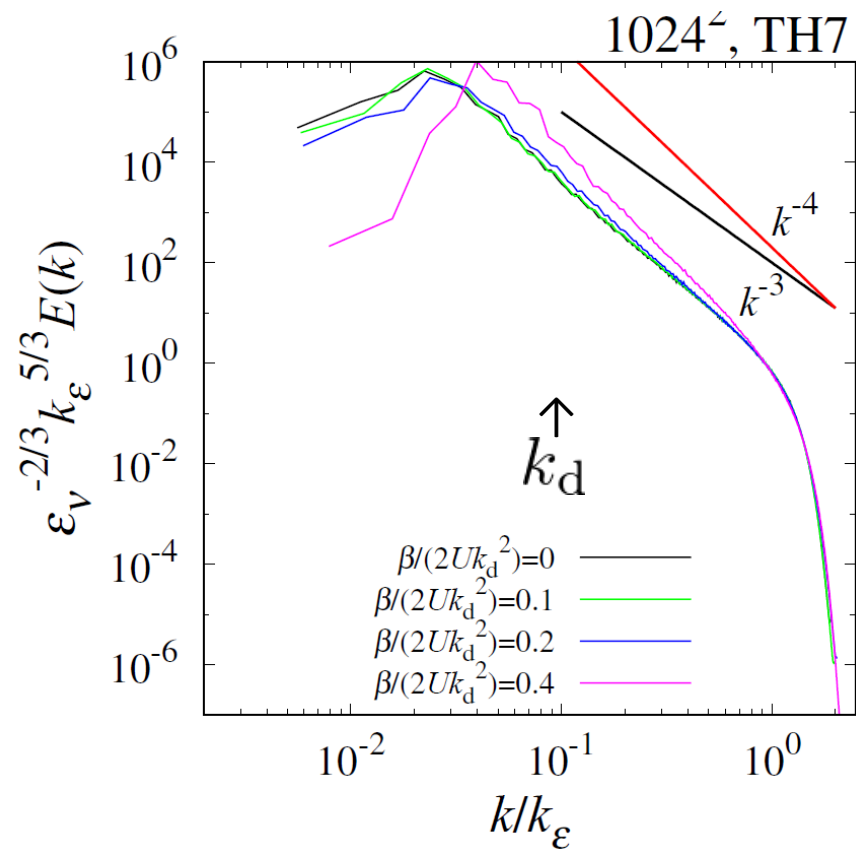
結果:

Danilovの不等式は破れるか？
スペクトルの傾きの転移はあるか？

- エクマン摩擦：大



エンストロフィーフラックス



エネルギースペクトル

結果のまとめ

- NGスペクトルもT003メカニズムも再現されなかった.
- 準地衡2層モデルにおける高波数領域 ($k_d \ll k$) のスペクトル

$$E(k) \sim k^{-\delta}, \quad 3 \lesssim \delta \lesssim 4$$

- Danilov不等式が破れる ($k^2 \Pi_E(k) - \Pi_Z(k) > 0$) 波数領域

- TH2:なし

- TH4: $\beta = 1 : 1 < k < 2$

$$\beta = 2 : 1 < k < 2$$

$$\beta = 2 : 3 < k < 5$$

- TH7: $\beta = 0.5 : 1 < k < 2$

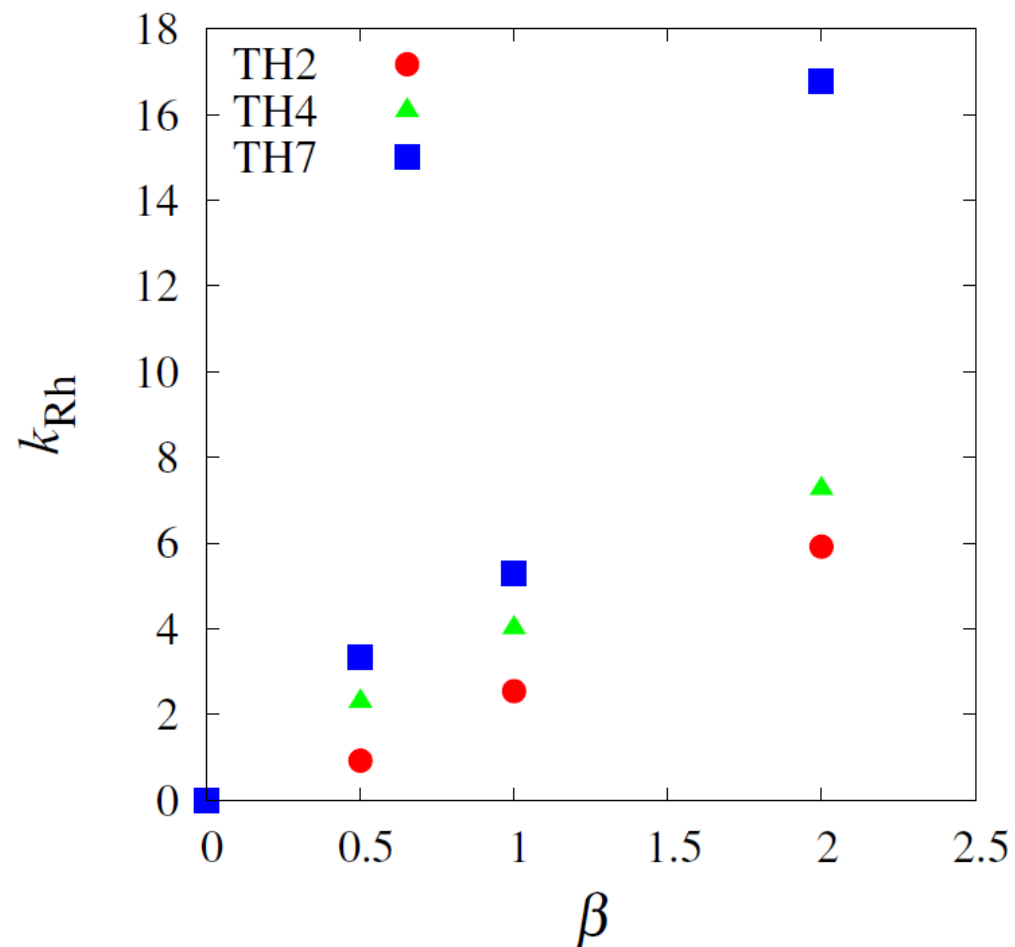
$$\beta = 1 : 2 < k < 3$$

$$\beta = 2 : 2 < k < 7$$

考察 : Rhines波数

(Rhines, 1975)

$$k_{\text{Rh}} \equiv \left\{ \frac{\beta}{\sqrt{(u_{\text{BT}}^2 + v_{\text{BT}}^2)}} \right\}^{1/2}$$



Danilov不等式が破れる
波数領域

- TH2: なし
- TH4: $\beta = 1 : 1 < k < 2$
 $\beta = 2 : 1 < k < 2$
 $\beta = 2 : 3 < k < 5$
- TH7: $\beta = 0.5 : 1 < k < 2$
 $\beta = 1 : 2 < k < 3$
 $\beta = 2 : 2 < k < 7$

Rhines波数以下で不等式が破れる.

線形領域と非線形領域の境界

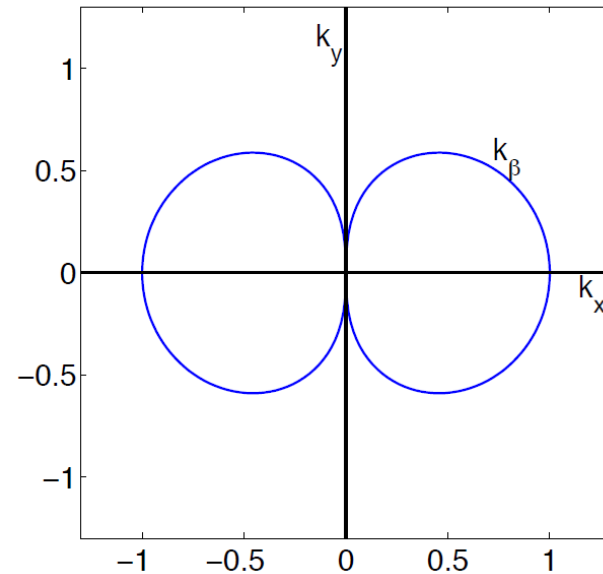
- より精密な議論

乱流のタイムスケール = Rossby波の周期

$$\epsilon^{1/3} k^{2/3} = \frac{\beta k_x}{k_x^2 + k_y^2}$$

$$k_x = \left(\frac{\beta^3}{\epsilon} \right)^{1/5} \cos^{8/5} \theta$$

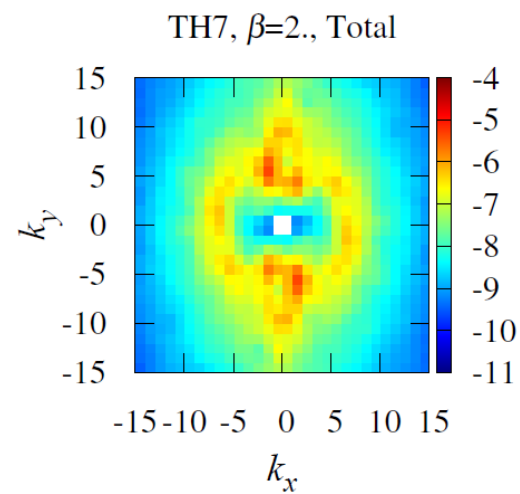
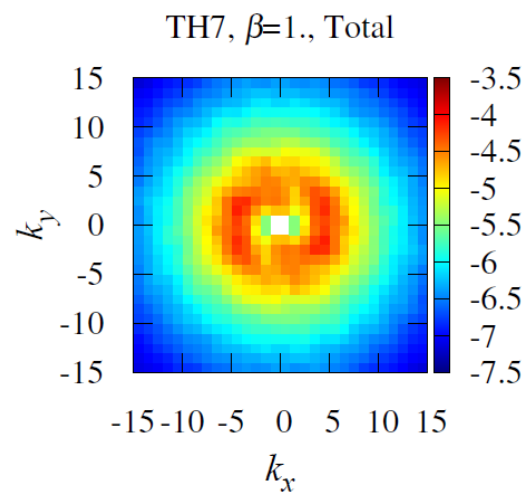
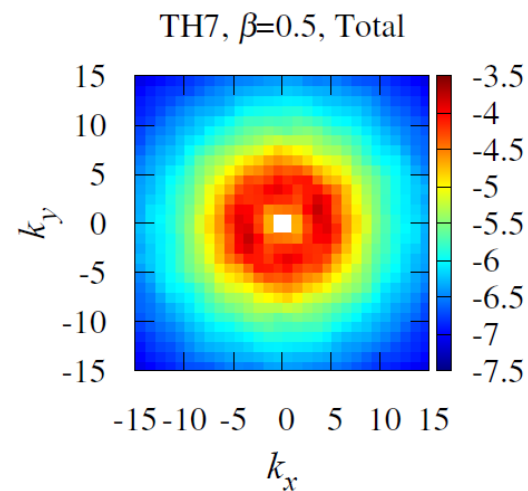
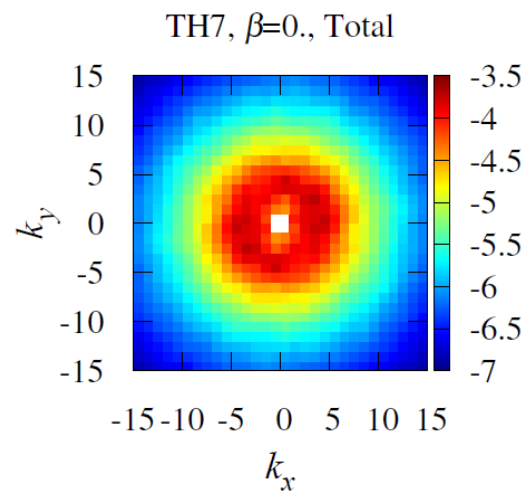
$$k_y = \left(\frac{\beta^3}{\epsilon} \right)^{1/5} \sin \theta \cos^{3/5} \theta$$



(Vallis, 2006)

2次元エネルギースペクトル

- エクマン摩擦：大

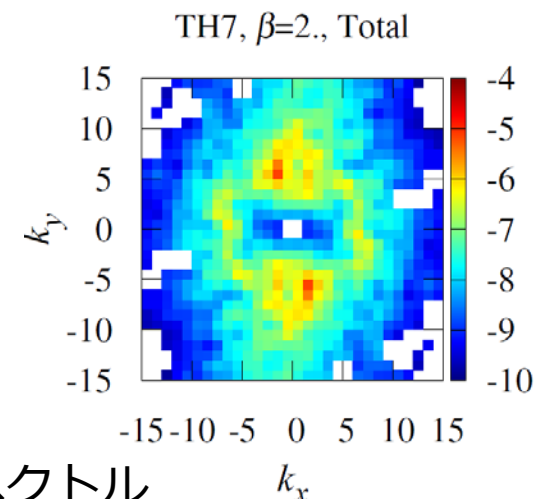


TH7, $\beta=2$ の結果について

- $\mathbf{k} = (-1, 5)$ に有意なスペクトル
- 線形論的な傾圧不安定により生じた波動？
- $t=5500$ を初期場として線形化方程式を数値計算

$$\begin{aligned}\frac{\partial q_1}{\partial t} &= -J(\psi_1, q_1) - \beta \frac{\partial \psi_1}{\partial x} - U \frac{\partial}{\partial x} \left(\nabla^2 \psi_1 + k_d^2 \frac{\psi_1 + \psi_2}{2} \right) + (-1)^{p-1} \nabla^{2p} q_1, \\ \frac{\partial q_2}{\partial t} &= -J(\psi_2, q_2) - \beta \frac{\partial \psi_2}{\partial x} + U \frac{\partial}{\partial x} \left(\nabla^2 \psi_2 + k_d^2 \frac{\psi_1 + \psi_2}{2} \right) + (-1)^{p-1} \nabla^{2p} q_2 - \kappa \nabla^2 \psi_2,\end{aligned}$$

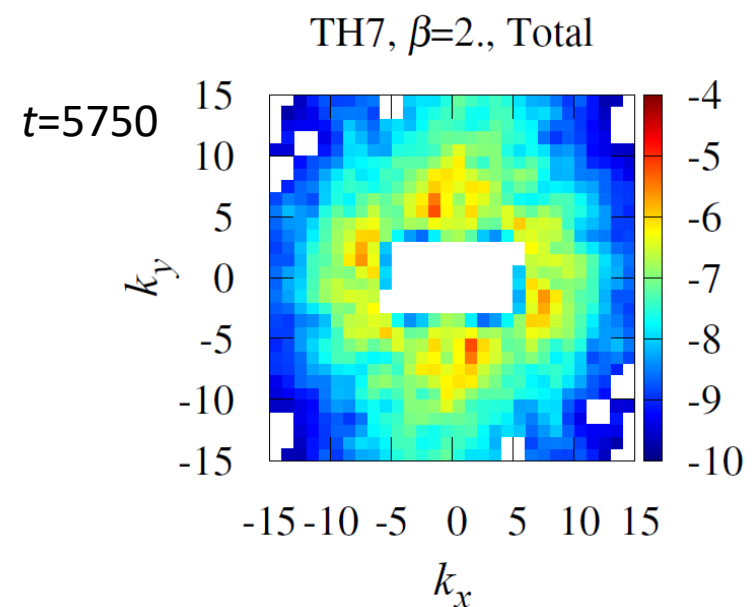
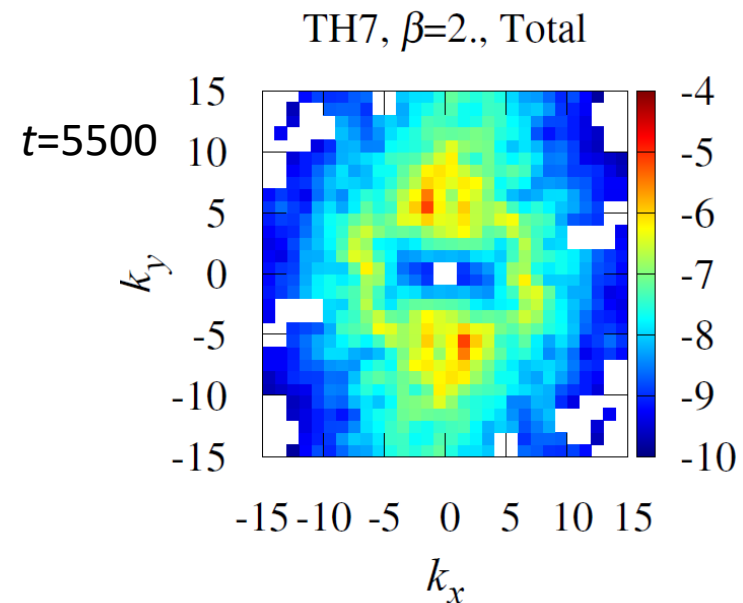
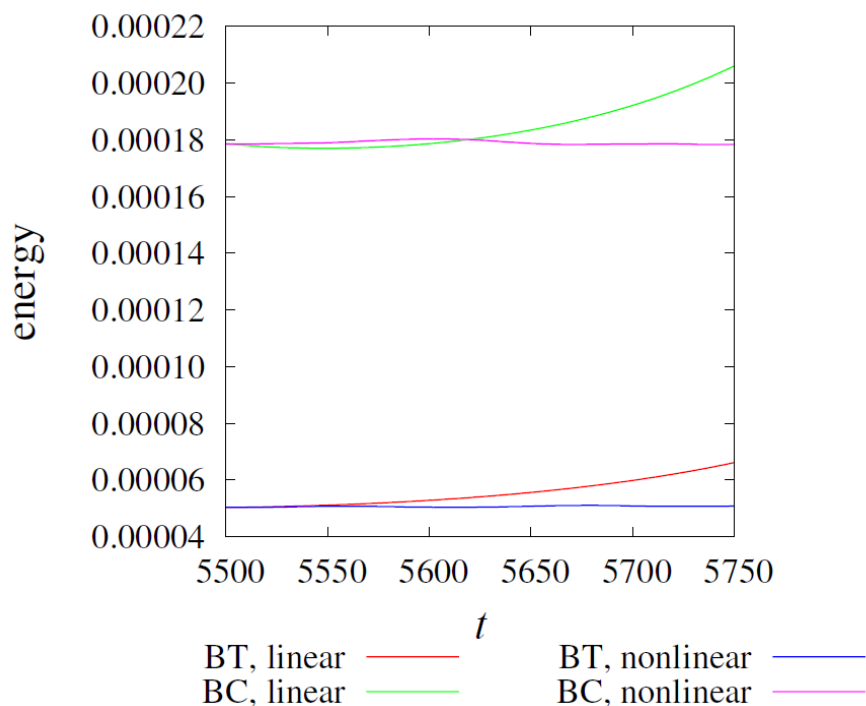
- $\kappa=0.5$ (減衰の時定数=20)



$t = 5500$ における2次元スペクトル

線形計算の結果

- エクマン摩擦の時定数よりも長い時間にわたり $\mathbf{k} = (-1, 5)$ のモードが存在



全体のまとめ

- 2次元乱流のエネルギー・エンストロフィーのフラックスの方向を決める不等式, Danilov不等式, を紹介.
- β -平面上準地衡2層モデルにおけるNastrom-Gageスペクトルの形成メカニズム (Tung & Orlando (2003)メカニズム) を数値実験的に検証
 - NGスペクトルもT003メカニズムも再現されなかった.
 - T003のメカニズムは普遍的に働くものではない.
 - 準地衡2層モデルにおける高波数領域 ($k_d \ll k$) のスペクトル
$$E(k) \sim k^{-\delta}, \quad 3 \lesssim \delta \lesssim 4$$
- Rhines波数よりも小さな波数領域 (線形波動領域) ではDanilov不等式は成立しない.
 - 乱流領域ではDanilov不等式は成立している