

2021-03-11 金星大気の観測・シミュレーション・データ同化に関する研究会

波動-平均流相互作用関連の話題

堀之内 武 (北大)

はじめに

- 林さんとの会話（昨秋？ 多少記憶の改変はあるかも）
 - 堀之内「だれかにMitchell一派のSR関係の研究をレビューしてほしいんだよね。」
 - 林「御意。さて誰かやるかね… もごもご」
 - 堀之内「うーん、やっぱり自分で読まないと分かった気になれないか…」
 - 林「じゃ、そのうち。」
- ということで、今日の話題はMitchell一派の研究に関連したことだけです。しかも網羅はしてません。（誤解や無理解もあるかも。）

MitchellグループのSR研究論文

- Mitchell & Vallis (2010): The transition to superrotation in terrestrial atmospheres. *JGR Planets*, 115(E12).
- Wang & Mitchell (2014): Planetary ageostrophic instability leads to superrotation. *GRL*, 41(12), 4118-4126.
- Dias Pinto & Mitchell (2014): Atmospheric superrotation in an idealized GCM: Parameter dependence of the eddy response. *Icarus*, 238, 93-109.
- Potter, Vallis, & Mitchell (2014): Spontaneous superrotation and the role of Kelvin waves in an idealized dry GCM. *JAS*, 71, 596-614.
- Mitchell, Vallis & Potter (2014): Effects of the seasonal cycle on superrotation in planetary atmospheres. *Astrophys J.*, 787, 23.
- Dias Pinto & Mitchell (2016): Wave-mean flow interactions and the maintenance of superrotation in a terrestrial atmosphere. *JAS*, 73, 3181-3196.

MitchellグループのSR研究（枠組）

- 理想化実験。モデルは球面スペクトルだったり、全球版WRFだったり。
- 基本は地球想定（温度減率とか気体定数とか..）のHeld-Suarez (1994)実験：
 - 惑星半径，自転角速度，ニュートン冷却率，境界層のレイリー摩擦係数を適宜変える
- 注意
 - 放射の日周期なし（放射緩和時定数より太陽日が短いことを陰に要請してるといえる。もちろん熱潮汐なし。）
 - 想定鉛直範囲は狭い（鉛直レベル設定はちゃんと書いてないが，中身から）。モデル上端付近にスポンジ層はないかも：半無限大気でなく，実質的には有限厚『大気』想定か。
 - 金星よりはタイタンを意識？（金星も言及してるが）
 - パラメター設定は，地球からタイタンぐらいまでのよう
 - ニュートン冷却率は一定（金星のように上下で何桁も変わる状況は対象外）

Held-Suarez (1994) 実験

Held-Suarez (1994) より

- 大気GCM力学コアテストとして提案された。
 - 力学コア：プリミティブ方程式系（運動量，熱力）を解く。水平や鉛直の渦粘性などを含む。水蒸気や降水はなし。
- 極ほど低温な温度基本場への線形緩和（「ニュートン冷却」）で大循環を引き起こす
- 下層の風速はゼロにむけて線形緩和（「レーリー摩擦」）：これで固体惑星に引きずられる。

$$\frac{\partial v}{\partial t} = \dots - k_v(\sigma)v$$

$$\frac{\partial T}{\partial t} = \dots - k_T(\phi, \sigma)[T - T_{eq}(\phi, \rho)]$$

$$T_{eq} = \max \left\{ 200\text{K}, \left[315\text{K} - (\Delta T)_y \sin^2 \phi - (\Delta \theta)_z \log \left(\frac{\rho}{\rho_0} \right) \cos^2 \phi \right] \left(\frac{\rho}{\rho_0} \right)^{\kappa} \right\}$$

$$k_T = k_a + (k_s - k_a) \max \left(0, \frac{\sigma - \sigma_b}{1 - \sigma_b} \right) \cos^4 \phi$$

$$k_v = k_f \max \left(0, \frac{\sigma - \sigma_b}{1 - \sigma_b} \right)$$

$$\sigma_b = 0.7$$

$$k_f = 1 \text{ day}^{-1},$$

$$k_a = 1/40 \text{ day}^{-1}$$

$$k_s = 1/4 \text{ day}^{-1}$$

$$(\Delta T)_y = 60\text{K}$$

$$(\Delta \theta)_z = 10\text{K}$$

$$\rho_0 = 1000 \text{ mb}$$

$$\kappa = \frac{R}{c_p} = \frac{2}{7}$$

$$c_p = 1004 \text{ J kg}^{-1} \text{ K}^{-1}$$

$$\Omega = 7.292 \times 10^{-5} \text{ s}^{-1}$$

$$g = 9.8 \text{ m s}^{-2}$$

$$a_e = 6.371 \times 10^6 \text{ m.}$$

Mitchell & Vallis (2010)

NC rate: 1/40 day⁻¹
(1/4 day⁻¹ in BL)

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla \mathbf{u} + \mathbf{f} \times \mathbf{u} = -\nabla_p \Phi - r\mathbf{u}, \quad (1)$$

nondimensionalize the above equations by setting $(\hat{u}, \hat{v}) = (u, v)/U$; $\hat{w} = wa/(UH)$; $\hat{\Phi} = \Phi/(2\Omega Ua)$; $\hat{t} = 2\Omega t$; $\hat{f} = f/(2\Omega) = \sin\varphi$, and $(\hat{\theta}, \hat{T}) = (\theta, T)/(T_o\Delta_H)$; with U a characteristic horizontal wind speed, a the planetary radius, H the scale height and Ω the rotation rate. For the scaling of winds we use the thermal wind relation; thus, $U = RT_o\Delta_H/(2\Omega a)$.

$$\frac{\partial \hat{\mathbf{u}}}{\partial \hat{t}} + Ro_T(\hat{\mathbf{v}} \cdot \nabla \hat{\mathbf{u}}) + \hat{\mathbf{f}} \times \hat{\mathbf{u}} = -\nabla_{\hat{p}} \hat{\Phi} - E\hat{\mathbf{u}} \quad (2)$$

An Ekman number $E = \frac{r}{2\Omega}$, A thermal Rossby number $Ro_T = \frac{U}{2\Omega a} = \frac{(RT_o\Delta_H)}{(2\Omega a)^2}$.

Table 1. Parameters for Experiment Design^a

	Ro_T		
	0.02	1.3	10.5
a	6.4×10^6 m	8×10^5 m	2.8×10^5 m
Ω	7×10^{-5} s ⁻¹	–	–
T_o	285 K	–	–
Δ_H	0.2	–	–

^aA dash indicates the same value as that of the entry on its left.

NC基本場に温度風平衡な東西風は？ → Ro_T で表せる

- 傾度風ベースの温度風平衡 ($z \equiv -H \ln \frac{p}{p_0}$, T_b はNC基本場):

$$\frac{2uu_z \tan \varphi}{a} + 2\Omega u_z \sin \varphi = -\frac{RT_b \varphi}{aH}$$

- $T_b = T_0 \Delta_H \cos^2 \varphi + C(z)$ なら, 赤道上 ($\varphi = 0$) では $\frac{uu_z}{a} + \Omega u_z = \frac{RT_0 \Delta_H}{aH}$ 。
- $z = 0$ で $u = 0$ として, 赤道上での風速 (u_{eq}) を z について解けば,

$$u_{eq}(z) = \sqrt{2RT_0 \Delta_H \frac{z}{H} + (a\Omega)^2} - a\Omega, \quad \text{即ち} \quad \frac{u_{eq}(z)}{a\Omega} = \sqrt{8Ro_T \frac{z}{H} + 1} - 1。$$

- MV10の $Ro_T = 10.5$ のケース ($a\Omega = 19.6$ m/s) では旋衡風にちかく, $u_{eq}(H) = 1.6 \times 10^2$ m/s ($\frac{u_{eq}(H)}{a\Omega} = 8.2$)。
- $Ro_T \frac{z}{H}$ が十分小なら地衡風近似OK。 $z = H$, 赤道での風速と回転速度の比は, $\frac{u_{eq}(H)}{a\Omega} \sim 4Ro_T$ 。 $Ro_T = 0.02$ のケースでは $\frac{u_{eq}(H)}{a\Omega} \sim 0.08$, $u_{eq}(H) \sim 36$ m/s

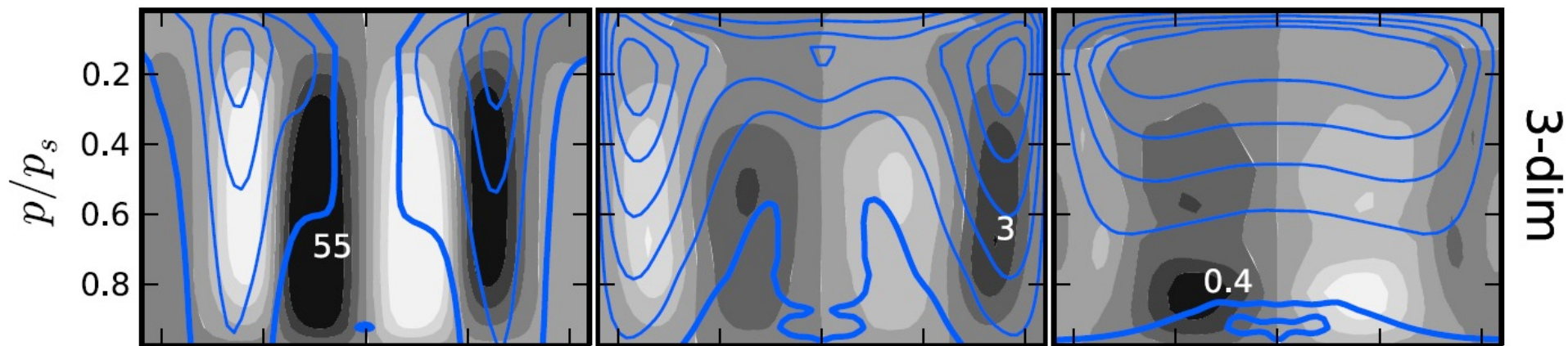
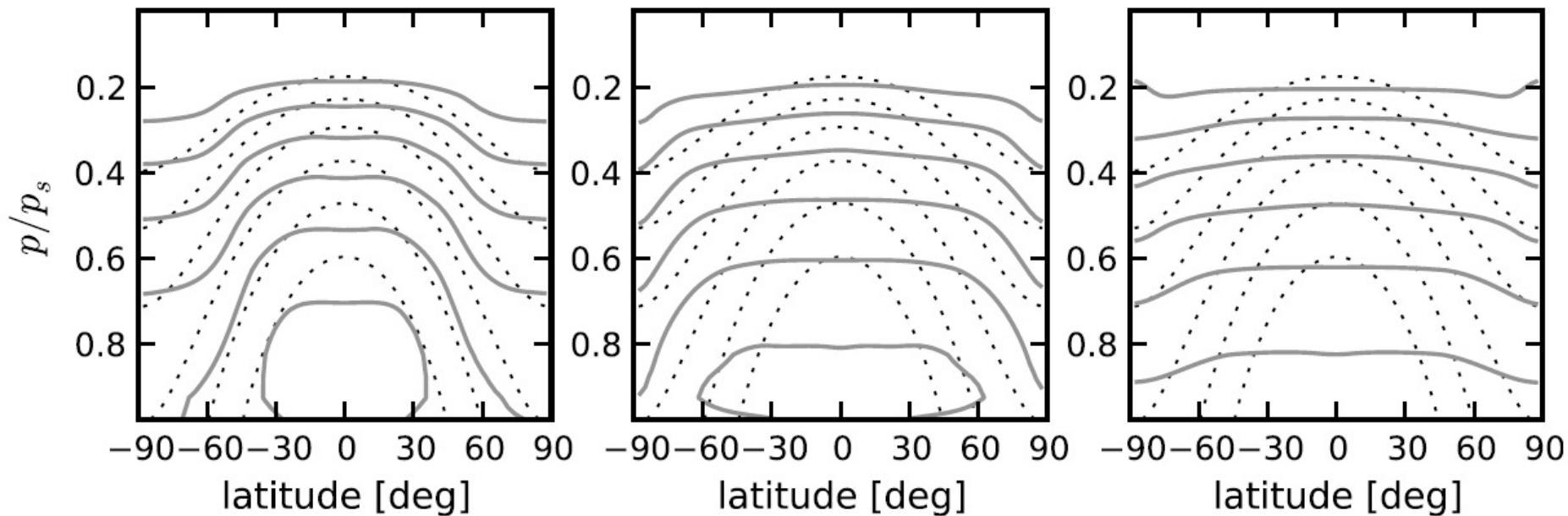
Mitchell & Vallis (2010)

結果T勾配 \ll 強制T勾配 \Rightarrow
結果の $Ro = U/2\Omega a$ はより小
(右2つは1のオーダー)

$Ro_T = 0.02$

$Ro_T = 1.3$

$Ro_T = 10.5$



contour interval: 10 m/s

Mitchell & Vallis (2010)

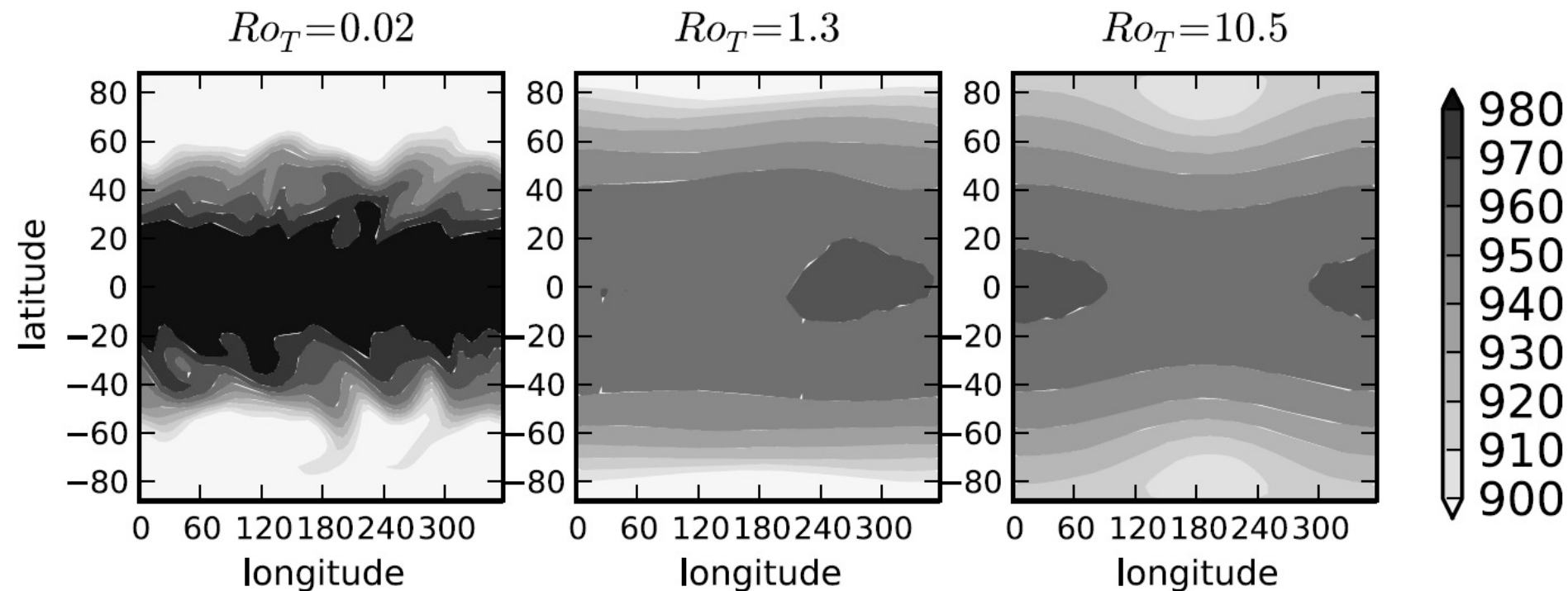


Figure 5. Snapshots at day 1080 of the 400 hPa level geopotential height in our three standard cases. Contours are spaced evenly from 900 to 980 m in increments of 10 m.

- 対スケールハイト (H) での変形半径 $NH/|\zeta_a|$ が惑星半径程度になると波数 1 が卓越し勝ち

Mitchell & Vallis (2010)

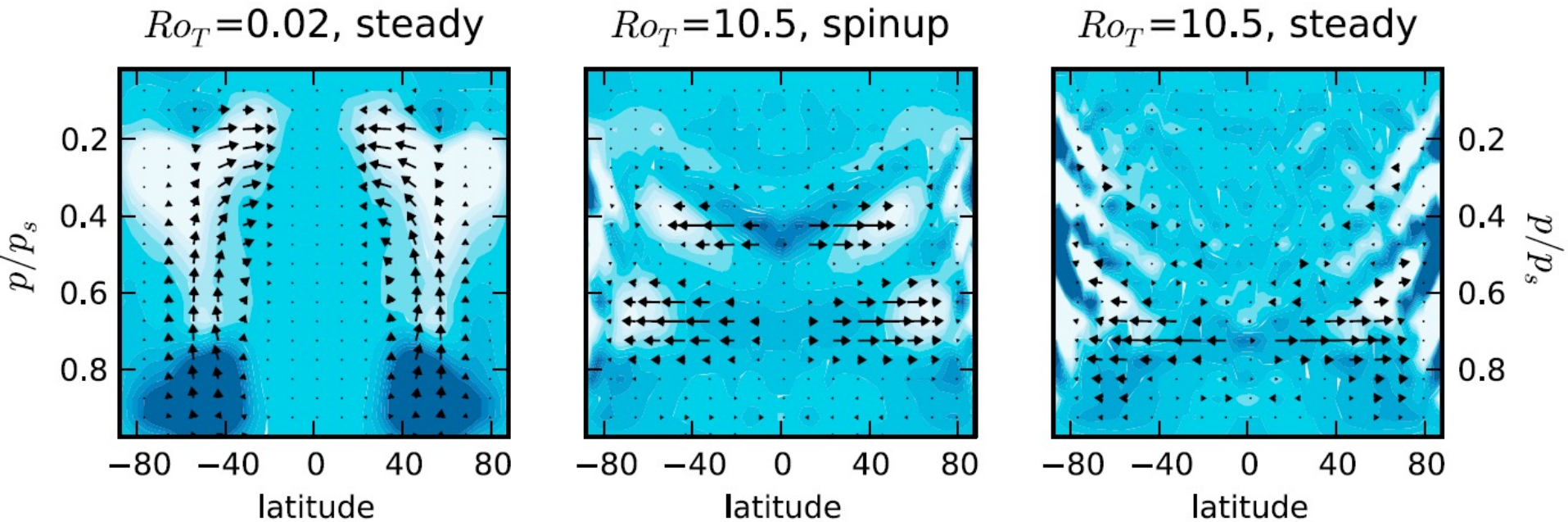
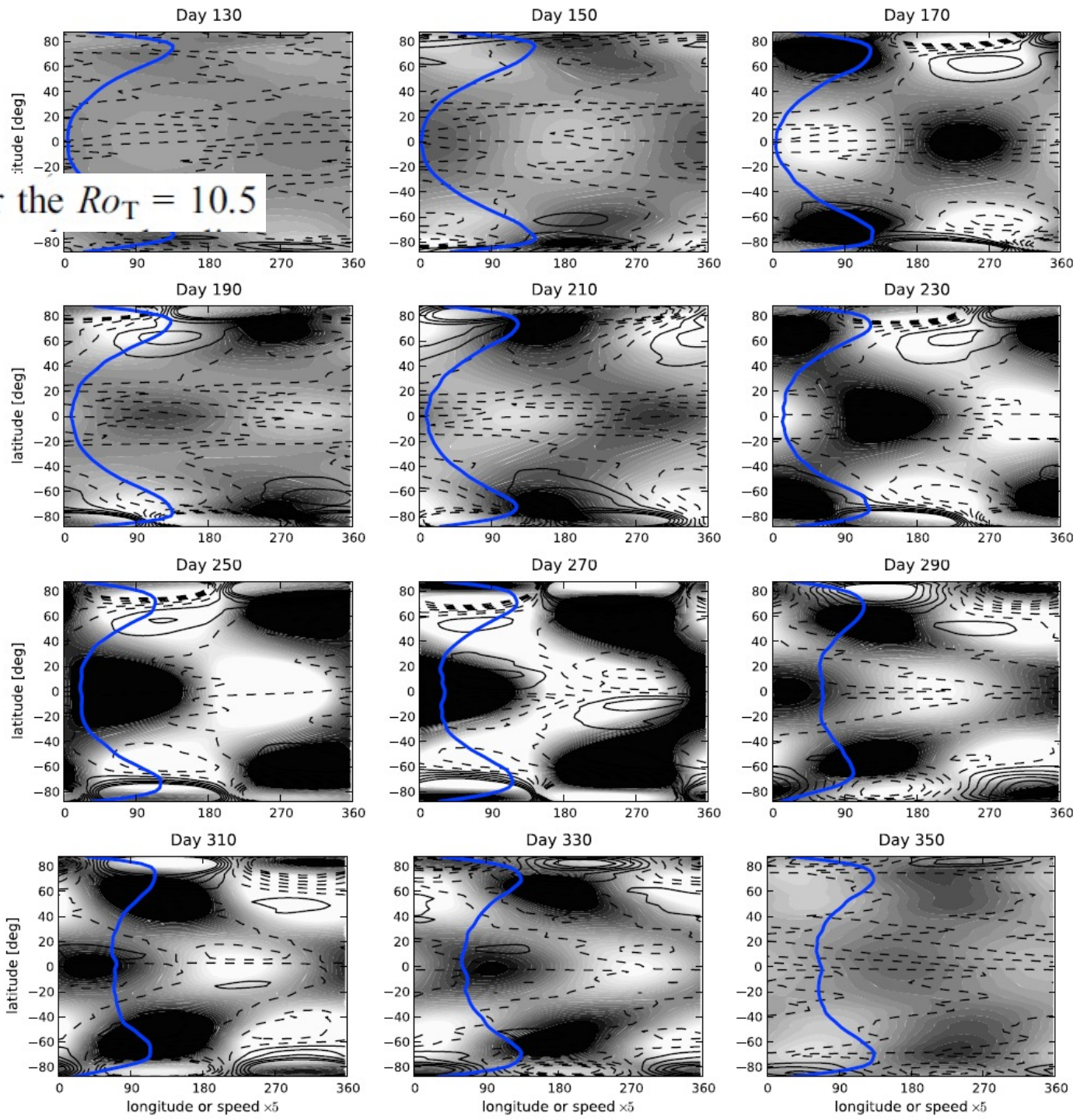


Figure 7. EP fluxes and their divergences. (left) The $Ro_T = 0.02$ (Earth-like) case after it has reached a statistically steady state (during days 1000 to 1080). (middle) The $Ro_T = 10.5$ case (Titan-like), during active spin-up, of the layer near $p/p_s = 0.4$ (days 215 to 305), and (right) the $Ro_T = 10.5$ case after reaching statistically steady state (days 1000 to 1080).

Mitchell &
Vallis (2010)

400 hPa level for the $Ro_T = 10.5$



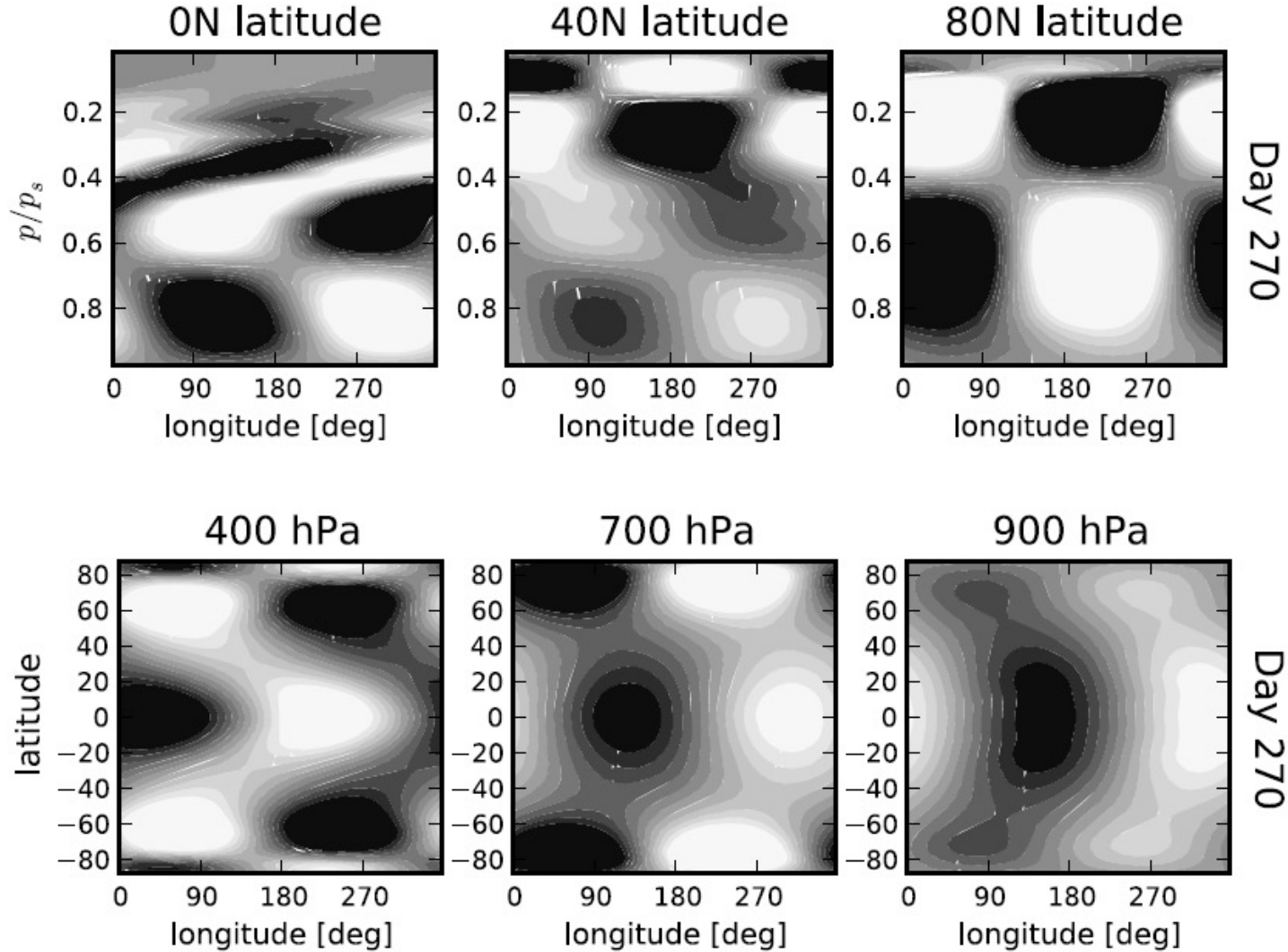


Figure 14. Vertical and horizontal slices of zonally asymmetric geopotential filtered for zonal wave number 1 and frequency -0.6 d^{-1} (shaded) during spin-up (day 270) at the latitudes or levels indicated. Contours are spaced evenly from -0.5 to 0.5 m in increments of 0.1 m.

Mitchell & Vallis (2010)

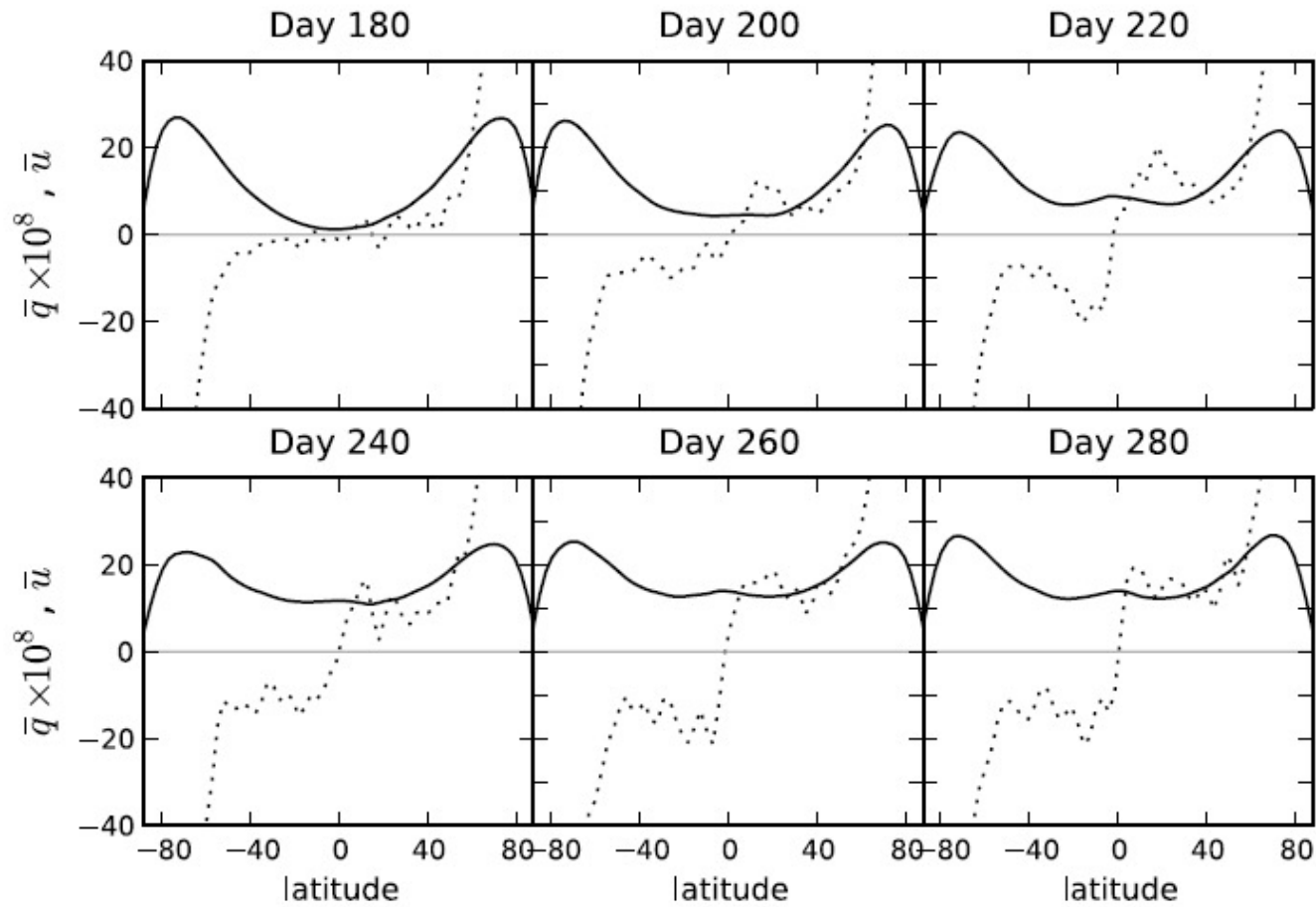


Figure 16. Same as in Figure 4 for snapshots during spin-up (on days indicated) of the $Ro_T = 10.5$ case at 400 hPa.

Mitchell & Vallis (2010)

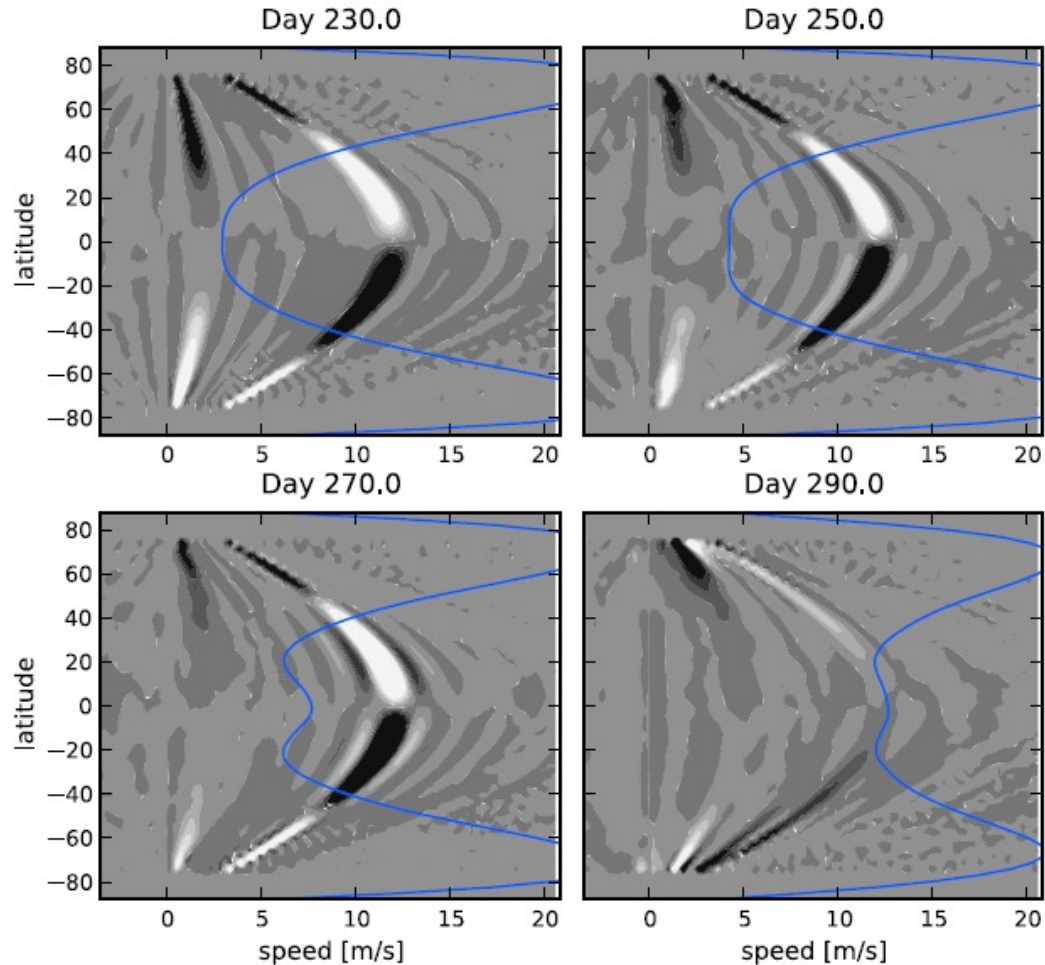


Figure 10. Phase speed-latitude plot of eddy momentum flux cospectra at the 400 hPa level (shaded) and zonal mean zonal wind (line) for the $Ro_T = 10.5$ case over a sequence of 20 day intervals during an active phase of spin-up. Dark (light) regions correspond to positive (negative) eddy momentum flux.

Mitchell & Vallis (2010)

- 熱ロスビー数 Ro_T の重要性を指摘
- 高 Ro_T (~ 10)時のSR形成
 - Spin-up時：波数 1，位相速度 ~ 10 m/sの波による水平の角運動量輸送が重要
 - RossbyとかKelvinとかinstabilityという言葉は随所に出てくるが，全体としてどういうことかということとは考えあぐねている印象（次のWang & Mitchell 2014までに深まったと想像）
- 高 Ro_T (~ 10)時のSR定常状態維持
 - やはり波による水平の運動量輸送が重要

さて、金星大気の Ro_T は？

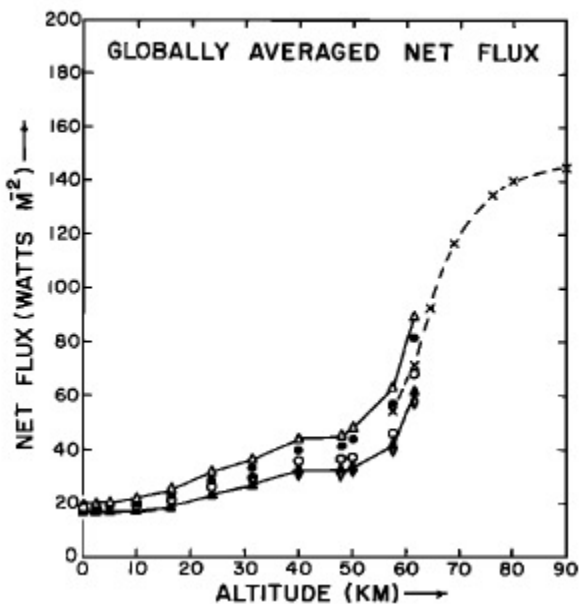
Mitchell & Valis (2010)の認識だと：

sition in parameter space. It is possible that Venus (with $Ro_T \approx 1200$) is in yet another parameter regime from that explored in this paper, but the essential dynamics of the superrotation of Titan (with $Ro_T \approx 30$) may be similar to

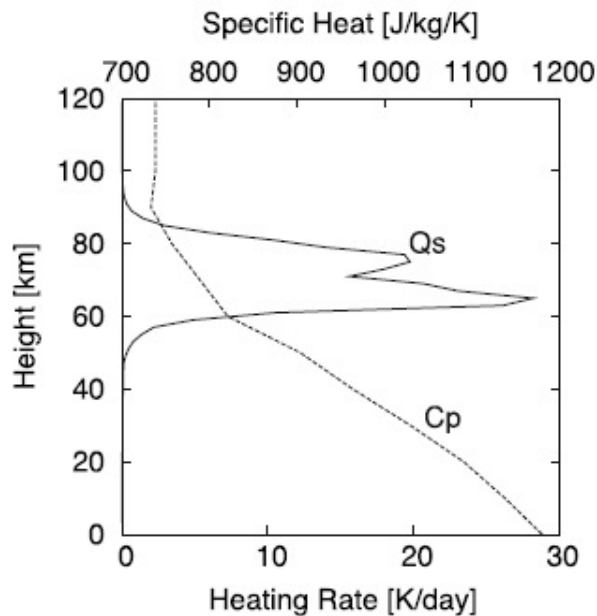
- $Ro_T = \frac{RT_0\Delta_H}{(2\Omega a)^2} \cdot (2\Omega a)^2 = 1.3 \times 10 \text{ m}^2 \text{ s}^{-2}$
- 仮にHS実験の $RT_0\Delta_H$ を使えば上記に近い
- 実際には？
 - 下層(H~15km)ではそもそもニュートン冷却は良い近似でないが、仮に放射時定数 $\tau = 1\text{e}3$ 日とすると、15km以下での赤道での加熱が 30 W/m^2 なら基本場の極赤道温度差 $T_0\Delta_H$ は5Kほどで($RT_0\Delta_H \sim 1\text{e}3 \text{ m}^2 \text{ s}^{-2}$)、 Ro_T は60ほど。(当然 τ がこの10倍なら Ro_T は600ほど)
 - ちなみに雲層では、Takagi & Matsuda (2007)を参考に加熱率 $Q = 6 \text{ K/day}$ (\because 直下点で 20 K/day)、時定数10日とすると $T_0\Delta_H = 60 \text{ K}$ 、 $Ro_T = 830$ 。(雲の下の中間的高度はSH吸収小なので Ro_T はより小)
 - 高度70 km は $z \sim 8H$. 仮に $Ro_T = 1000$ の範囲が3スケールハイト分あるとすると、 $\frac{u_{\text{eq}}(z)}{a\Omega} \sim \sqrt{8Ro_T \frac{z}{H}} \sim 155$. $u_{\text{eq}}(z) \sim 290 \text{ m/s}$.

前頁関連参考資料

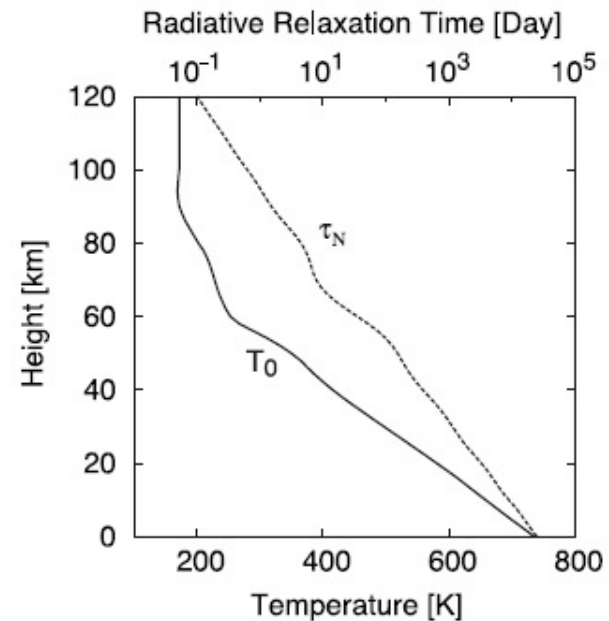
Tomasko et al (1980)
(net downward SH flux)



Takagi & Matsuda (2007)



Takagi & Matsuda (2007)



Wang and Mitchell (2014)

- Rossby-Kelvin不安定（水平結合）について線形安定性解析
 - 変数分離で浅水方程式化：静水圧ブシネスク(分散関係で $1/2H$ ファクターでない)，鉛直波長を $2H$ に固定（ H : スケールハイト。深さ H に半波長が広がるという固定端的発想による）
 - 先行研究である Iga and Matsuda (2005)のほうが包括的：後述
- MV10の高 Ro_T 実験のspin-up時の運動量輸送をこれで解釈した。

基礎：Ripaの定理（浅水系の平行流の安定性）

Ripa の定理 90/04/09（竹広真一）

5

逆に不安定となるための必要条件は

すべての実数 c について

$$(U - c)^2 > gH \text{ あるいは } \frac{U - c}{Q_y} > 0 \quad (12)$$

となる y が領域内に存在することが必要である。

Ripa の定理は $g \rightarrow \infty$ の極限において2次元非発散シア一流における積分定理～Fjørtoft, Rayleigh の定理に対応する。

$g \rightarrow \infty$ では $(U - c)^2 > gH$ が常に成り立たない。安定となるには、全ての实数 c について $\frac{U - c}{Q_y} > 0$ となることが必要である。 c を U の範囲外の値にとるとき、 $U - c$ は定符号である。したがって $\frac{U - c}{Q_y} > 0$ が成り立つには Q_y が領域内のどこかで符号をかえないといけない。すなわち、変曲点が存在することが必要である。これが Rayleigh の変曲点定理である。

変曲点がただ一つしか存在しないとき、 c を変曲点での速度 $U(y_s)$ にとると $\frac{U - U(y_s)}{Q_y}$ は定符号となる。不安定であるにはこの符号が常に正である必要がある。これが Fjørtoft の定理である。æ

http://dennou-h.gfd-dennou.org/arch/lecture/NAO_GFD/notes/ShearInstability/int-th/ripam.pdf

変曲点はfなしの話：

$$Q_y = -U_{yy}$$

基礎：Ripaの定理（浅水系の平行流の安定性）

したがって、基本場 $U(y)$, $H(y)$ が安定であるための十分条件は、

領域内のすべての y について

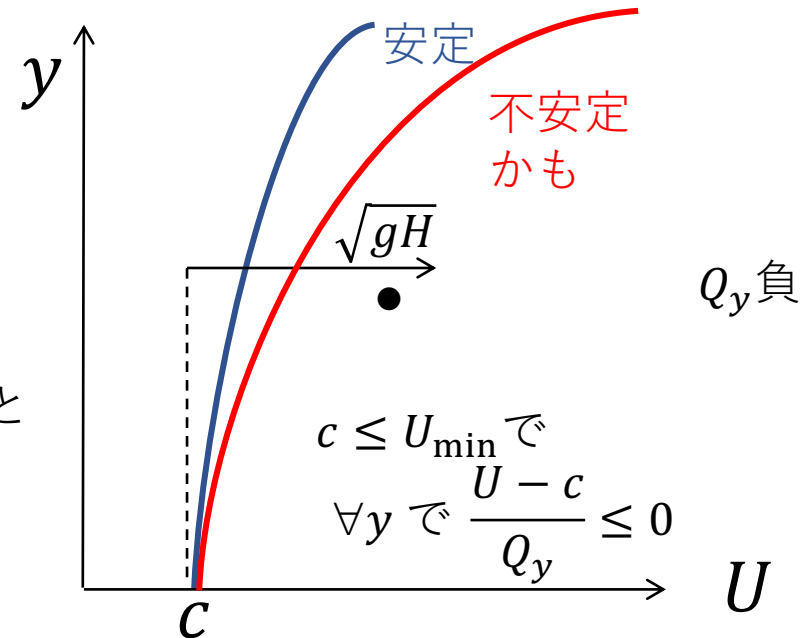
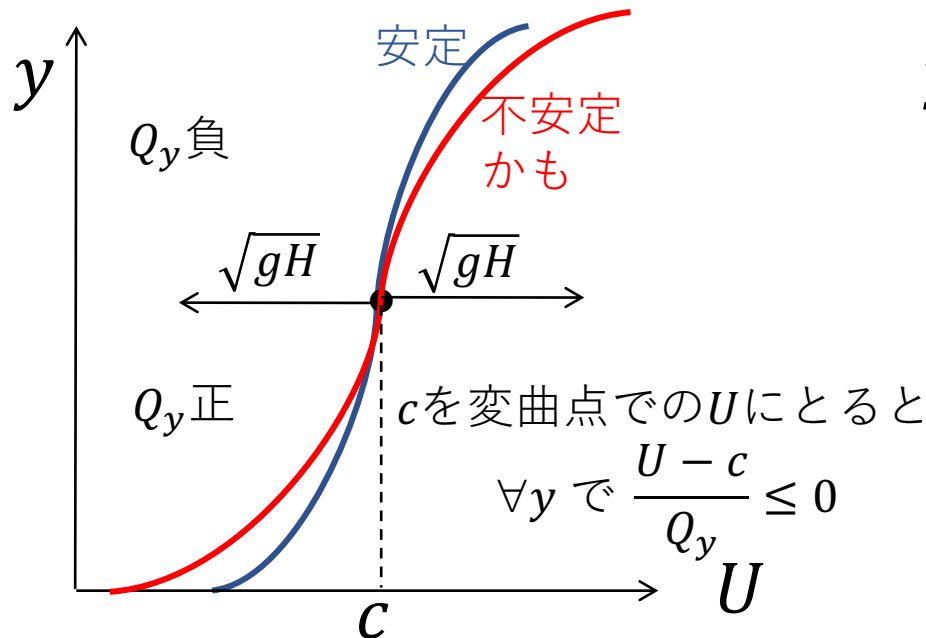
$$(U - c)^2 \leq gH \quad \text{かつ} \quad \frac{U - c}{Q_y} \leq 0 \quad (11)$$

を満たすある c が存在することである

http://dennou-h.gfd-dennou.org/arch/lecture/NAO_GFD/notes/ShearInstability/int-th/ripam.pdf

- 変曲点がある場合：Fjφ rtoft的に安定でもそこに相対的な重力波が臨界 y を持てば不安定になりうる。

- 変曲点がない場合：Rayleigh的に安定でも $U_{\max} - U_{\min} > \sqrt{gH}$ なら（臨界 y をもつ重力波が存在するなら）不安定になりうる。



不安定波動をもつ流れ

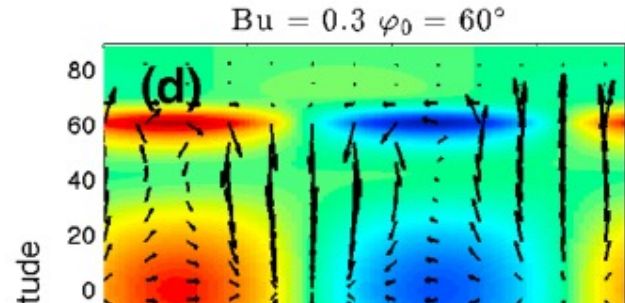
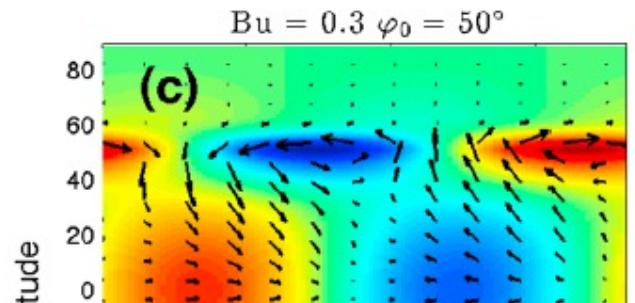
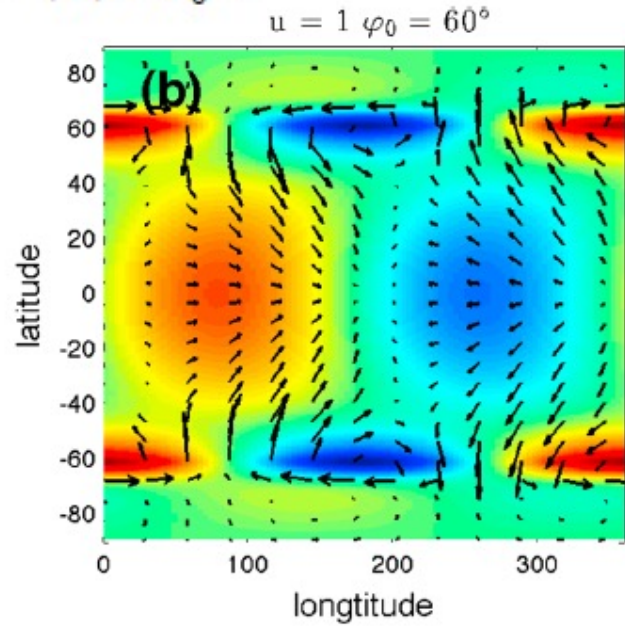
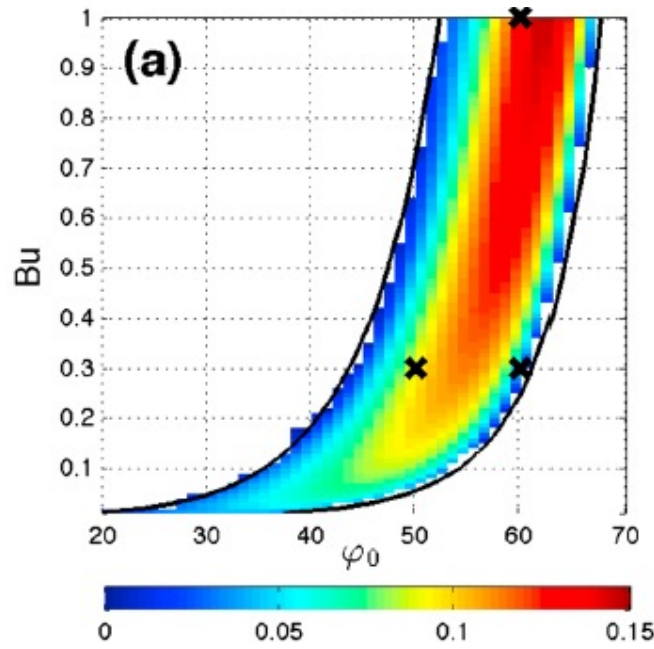
- 保存則を満たしながら擾乱にエネルギーを与えられる（基本場がそれが可能な構造をもつ）。
- 波が結合できる：流れに相対的に逆向きの中立波が近い位相速度をもてると，結合して不安定を引き起こす擾乱が実現しやすい。
 - 非発散順圧流やQGではRossby波のみ存在。流れに相対的に「東向」も「西向」も存在できるため， β 効果に正負両方が必要。
 - 浅水系やプリミティブ方程式系には重力波も存在し，不安定波動のもととなりうる。

Wang and Mitchell (2014)

$$Ro = \frac{U_0}{2\Omega a}, \quad Bu = \left(\frac{NH}{2\Omega a}\right)^2,$$

設定により $m = \frac{\pi}{H}$ なので, $\sqrt{Bu} = \frac{\pi}{2} \left(\frac{c}{\Omega a}\right)$
 ($c \equiv \frac{N}{m}$ は重力波位相速度)

$$\bar{U}(\varphi) = \begin{cases} \frac{\Omega a \sin^2 \varphi}{\cos \varphi} & |\varphi| \leq \varphi_0 \\ \frac{\Omega a \sin^2 \varphi}{\cos \varphi} e^{-\alpha(|\varphi| - \varphi_0)^2} & |\varphi| > \varphi_0 \end{cases}$$



この図で不安定になるところはおそらく、中立Kelvin波の位相角速度より速い角速度をもつ風速部分があり、そこでのRossby波（や連続モード？）とKelvin波が結合できる。

Mitchell & Vallis (2010)

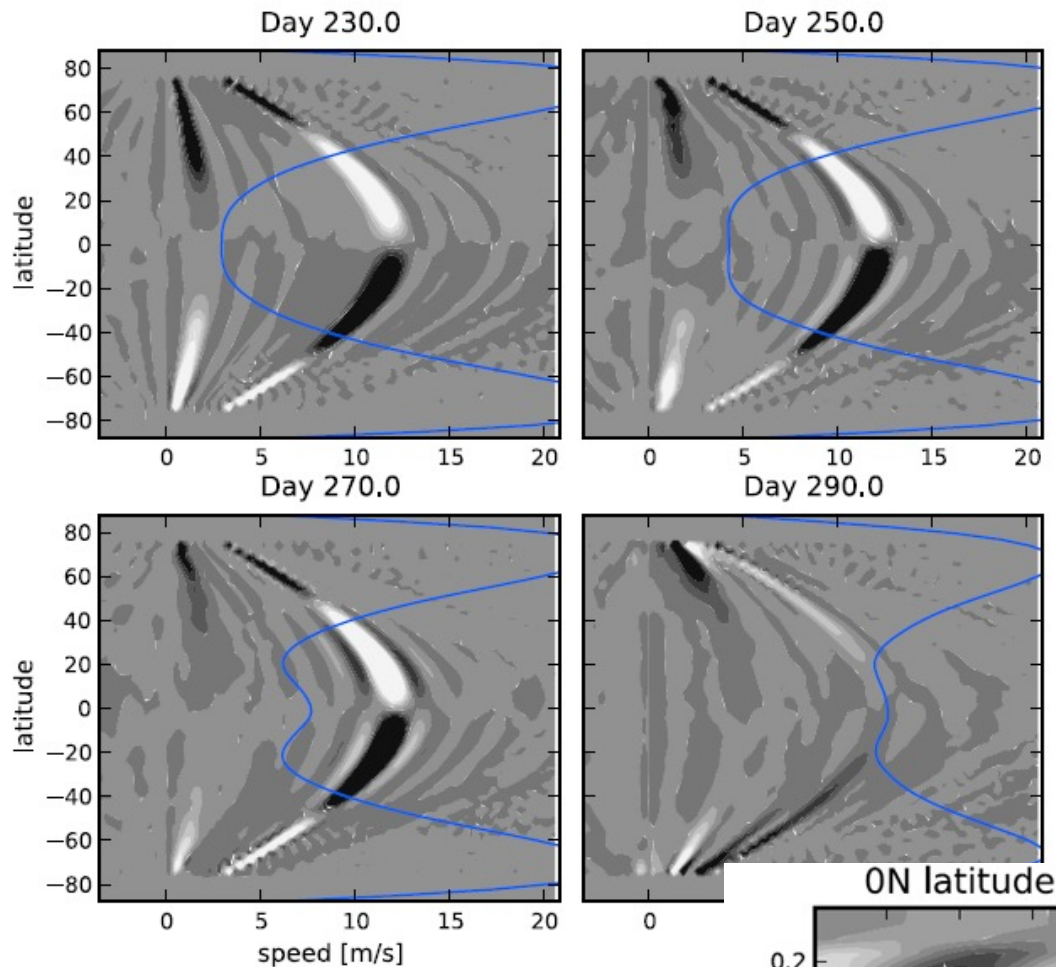
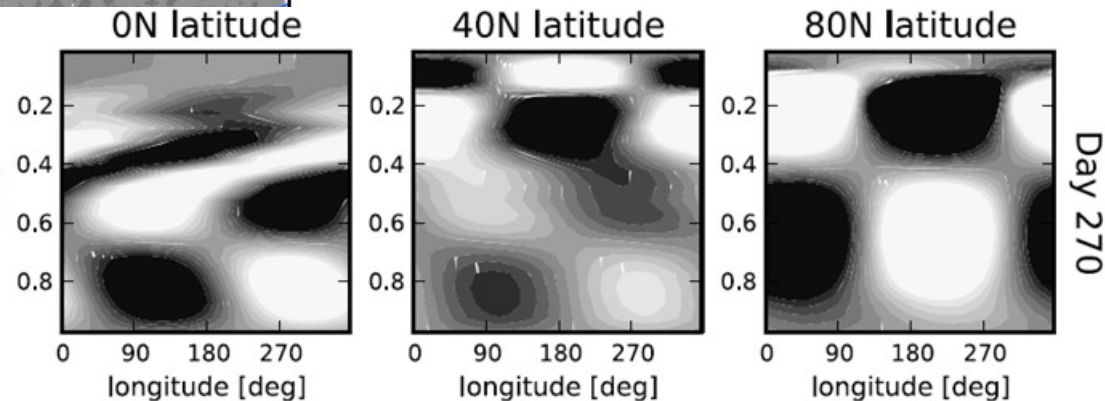


Figure 10. Phase speed-latitude plot of flux cospectra at the 400 hPa level ($s \frac{p}{p_s}$) mean zonal wind (line) for the $Ro_T =$ sequence of 20 day intervals during a spin-up. Dark (light) regions correspond (tive) eddy momentum flux.

流れからみた赤道での位相速度は 10 m/sほど。

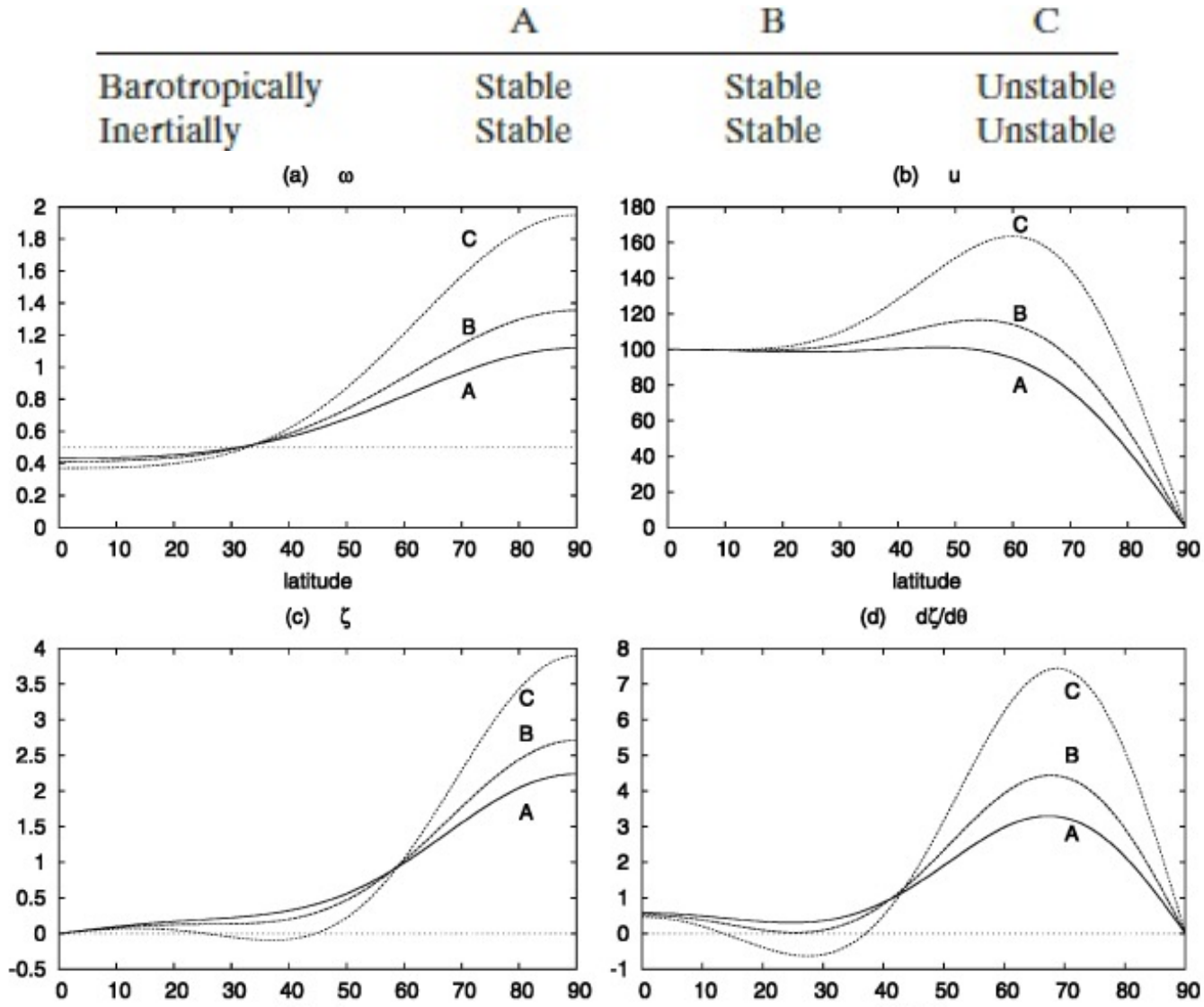
$c = \frac{N}{m}$ で $N = 10^{-2} \text{ s}^{-1}$, とするなら $m = \frac{N}{c}$ は 10^{-3} m^{-1} で鉛直波長は 6 kmほど (WM14の想定よりはかなり短波長)。実際の赤道での鉛直構造とは、下層ではまあまあ合う？

→ Rossby-Kelvin結合波解釈に特に不都合はなさそう。高緯度で鉛直波長が異なるのは浅水系では出せないが。



Iga & Matsuda (2005)

- 球面，浅水系での安定性解析
- 鉛直波長をきめる「等価深度」をちゃんと振る(Lambパラメタ)



Iga & Matsuda (2005)

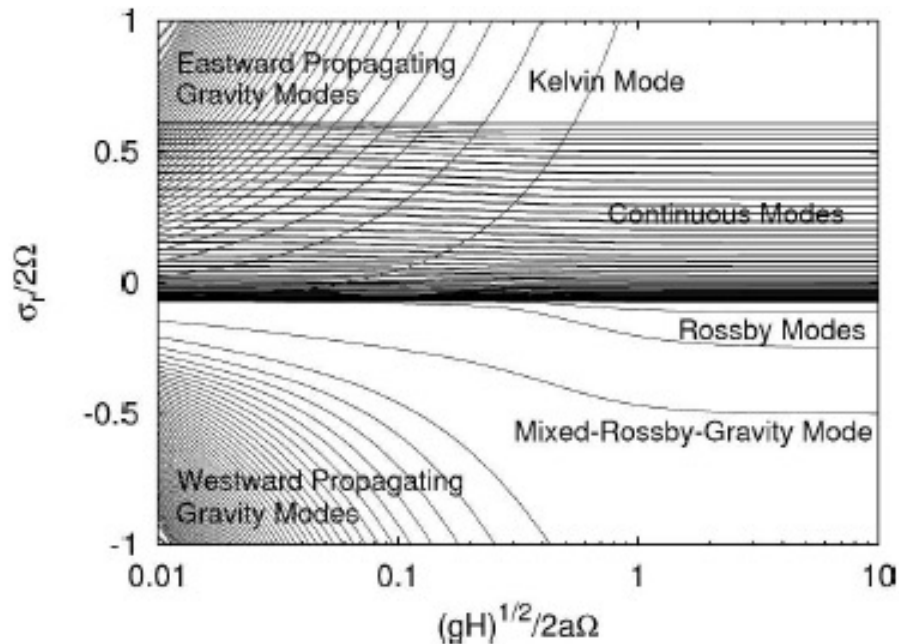


FIG. 3. Eigenfrequencies obtained for wind profile A when $m = 1$. The eigenfrequency ($\sigma_r/2\Omega$) is depicted as a function of an inverse value of the square root of Lamb parameter $[(gH)^{1/2}/2a\Omega]$ after Longuet-Higgins (1968).

some westward propagating gravity modes cross the

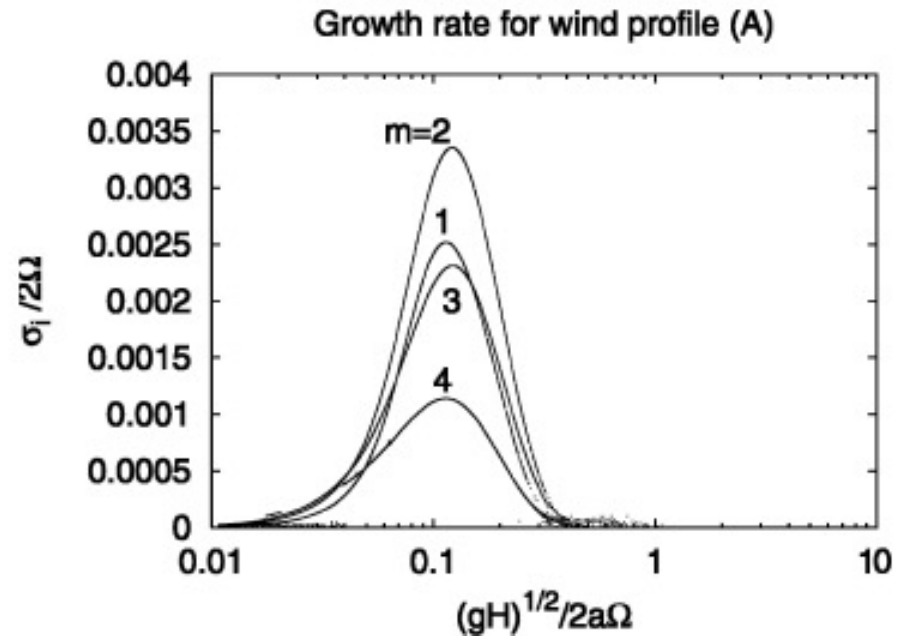


FIG. 4. Growth rates of destabilized Kelvin modes symmetric about the equator for wind profile A.

Iga & Matsuda (2005)

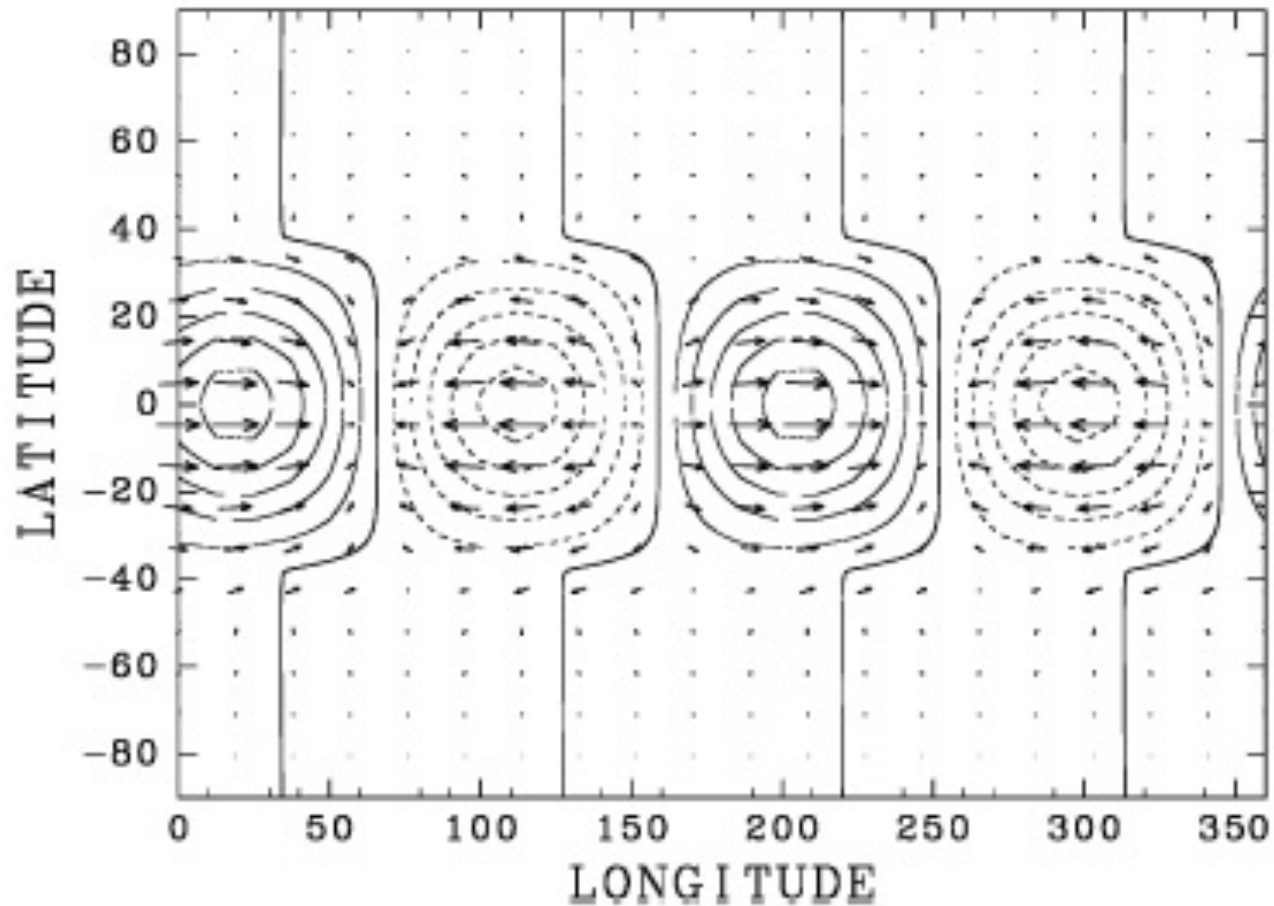


FIG. 5. Height deviation fields with velocity vectors in the mode A2. A dotted contour shows a negative value.

Iga & Matsuda (2005)

2520

JOURNAL OF THE ATMOSPHERIC SCIENCES

VOLUME 62

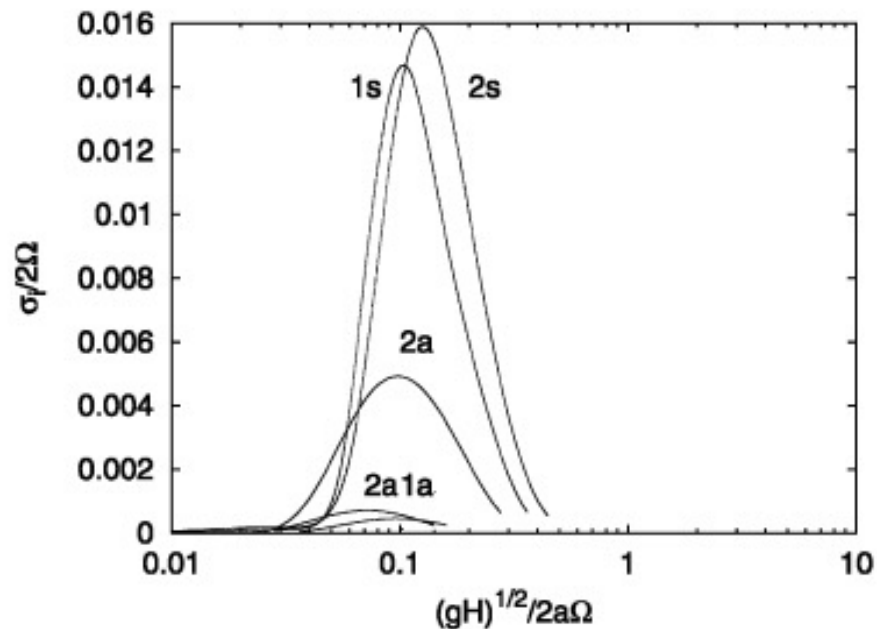


FIG. 8. As in Fig. 4 but for wind profile B, when $m = 1, 2$. The number attached to the curve indicates m , and s and a indicate modes symmetric and antisymmetric about the equator, respectively. The modes 1s and 2s are destabilized Kelvin modes.

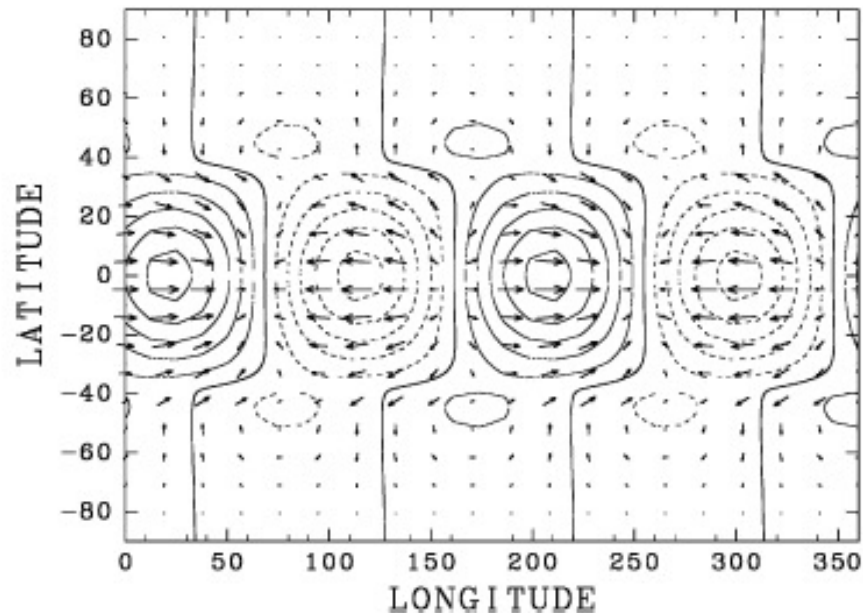


FIG. 9. As in Fig. 5c but for the mode B2.

dinal wavelength decreases to make the approach of

Iga & Matsuda (2005)

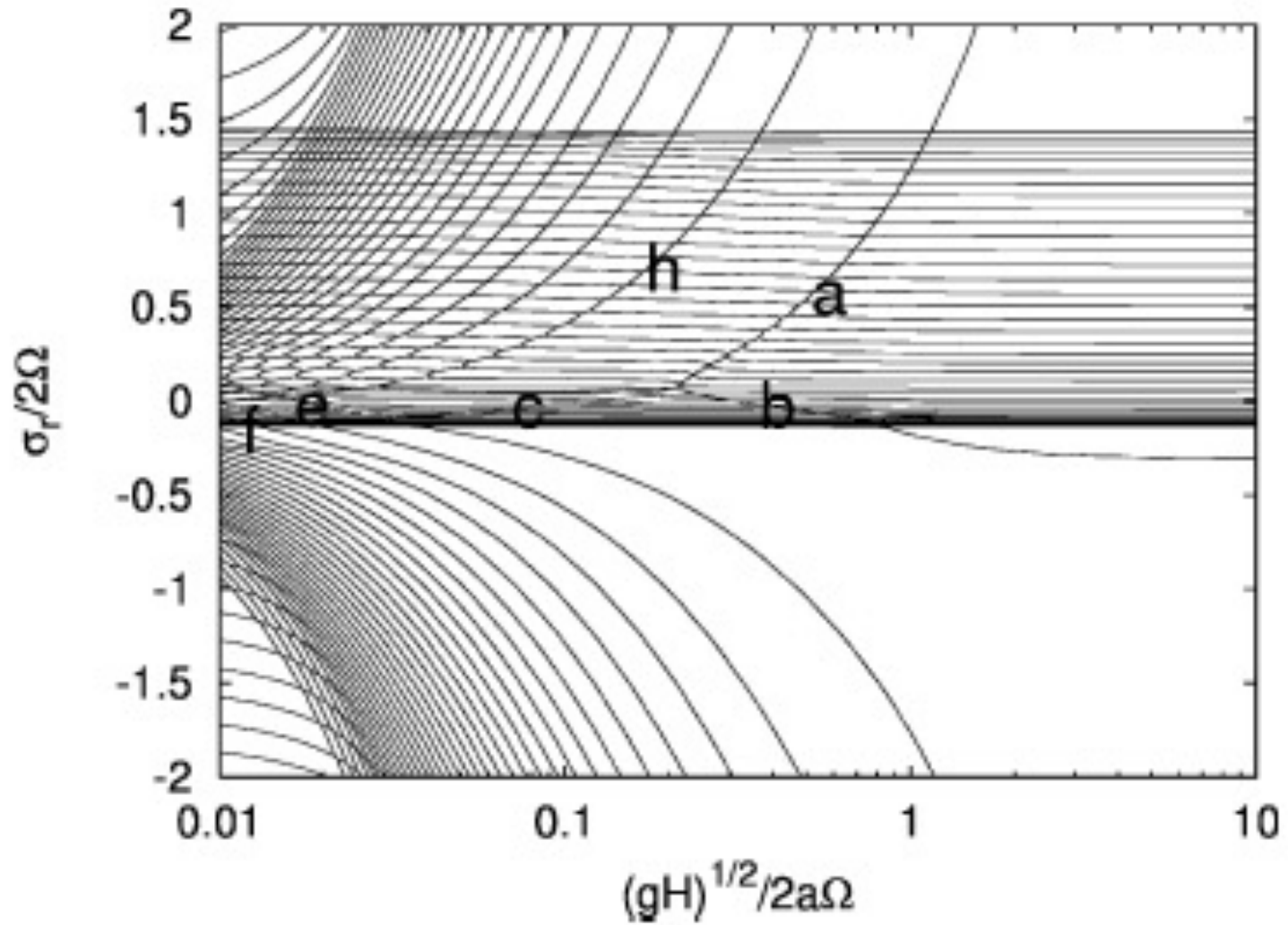


FIG. 14. As in Fig. 3 but for wind profile C. Only the modes symmetric about the equator are shown.

Iga & Matsuda (2005)

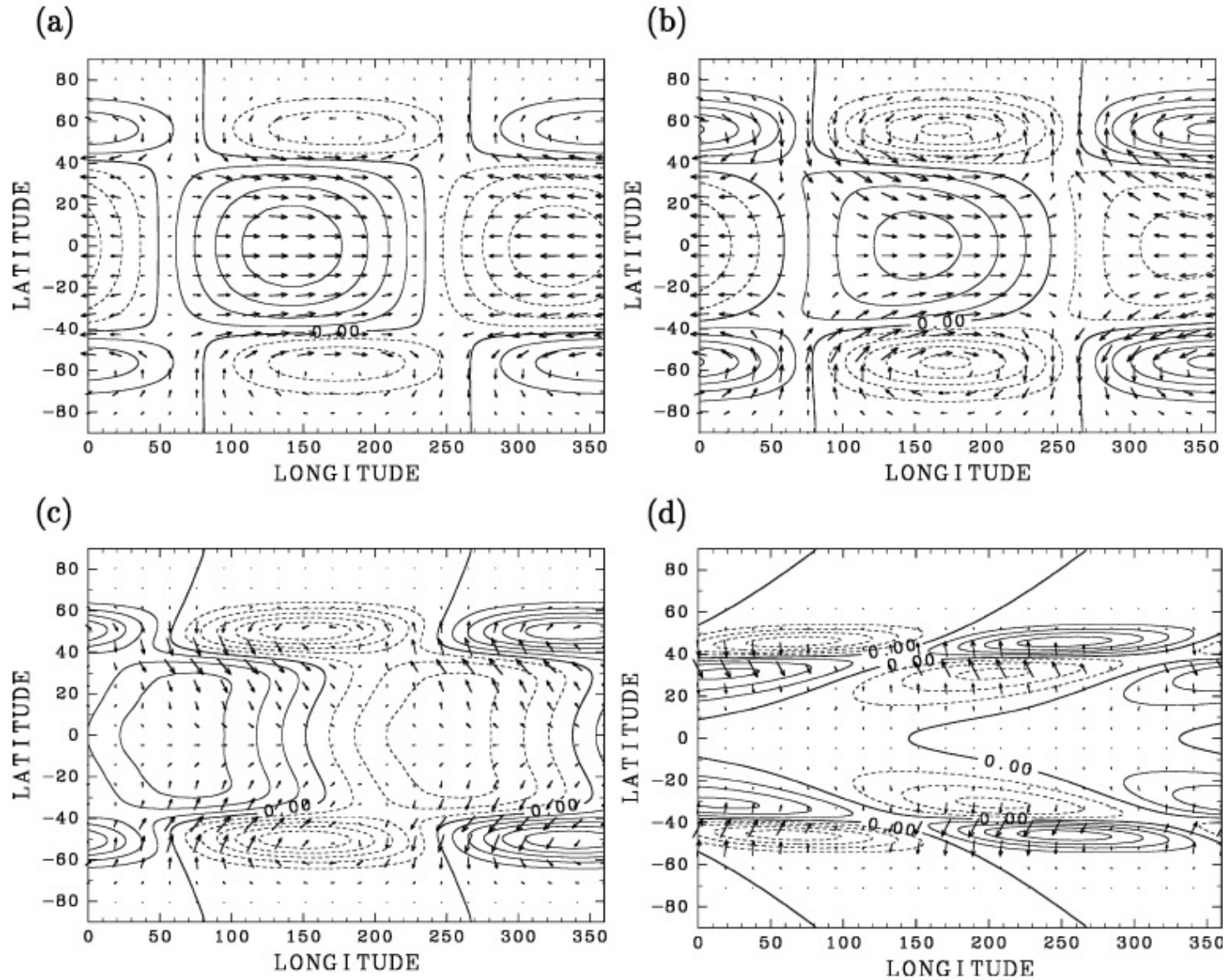


FIG. 16. As in Fig. 5c but for wind profile C: the modes designated by (a) a and (b) b with $\epsilon^{-0.5} = 0.2355$ in Fig. 15a, and the modes designated by c with (c) $\epsilon^{-0.5} = 0.1$ and (d) $\epsilon^{-0.5} = 0.0315$; (c) and (d) are referred to as C-rk1 and C-rk2 in the text, respectively.

番外編：Kashimura et al (2019)は鉛直結合の Rossby-Kelvin波と解釈されているがどうか

Rossby-like wave explained below is large in ZS0. The dominant pressure anomaly has a longitudinal structure of wavenumber one and coherently moves eastward with a rotation period of about 5.8 Earth days (about 62.1 m s^{-1} at this latitude; remember that

←65 km
ぐらい

中略

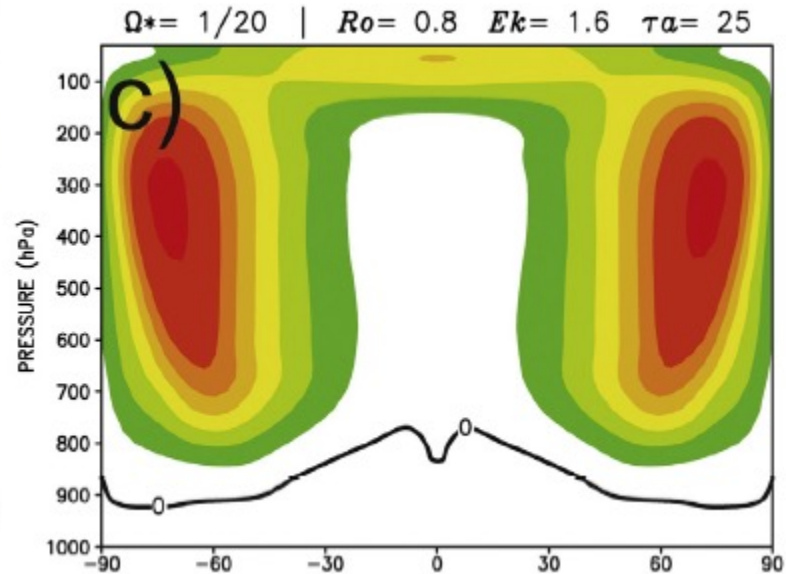
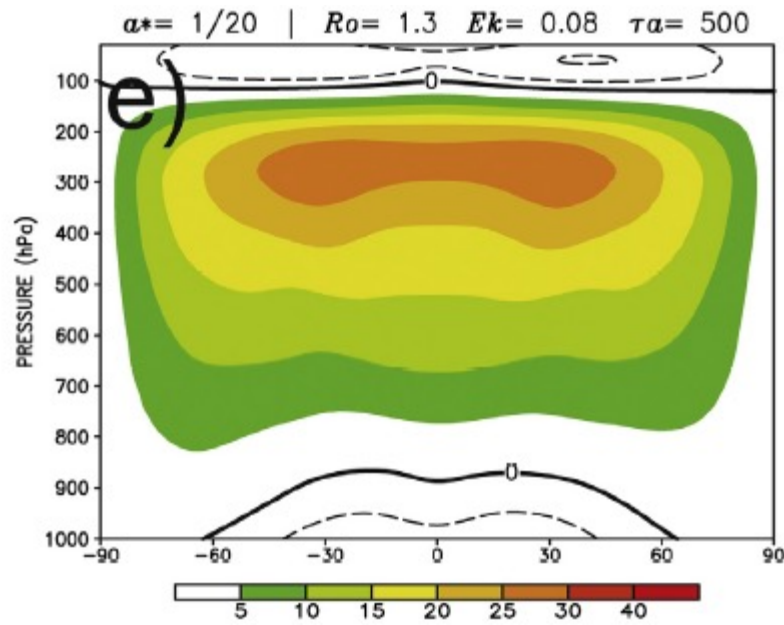
propagates with nearly the same speed as that at 65 km. Now, the rotation period of the mean flow at 55 km height is about 6.8 Earth days (about 53.1 m s^{-1}), which is slower than the disturbance. That is, the dominant pressure anomaly at 55 km

- 高度10 kmの差で10 m/s程度の違い。
- $N \sim 0.01 \text{ s}$ なら鉛直波長が短すぎて結合できないかも。
- AFESの設定では弱安定層があり、 N は一部この1/3以下になる。→ 弱安定層のおかげで鉛直結合可能になったか。
- 位相速度の観点でも、解釈に問題はなさそう。

Dias Pinto & Mitchell (2014) : 他のパラメーターの影響

Experiment	$\Omega (\times 10^5 \text{ s}^{-1})$	$a (\times 10^6 \text{ m})$	τ_0 (days)	τ_f (days)
$\Omega^* = 1$	7.292	6.371	40	1
$a^* = 1/20$	7.292	0.319	40	1
$\Omega^* = 1/20$	0.365	6.371	40	1
$\Omega^* = 1/20$ wkhd	0.365	6.371	800	1
$\Omega^* = 1/20$ mod	0.365	6.371	800	20

- 最初の以外 $Ro_T \sim 8$ は一緒 NC時定数 R摩擦時定数
- $a \rightarrow 1/20$ はSR (左), $\Omega \rightarrow 1/20$ はNC率不変なら非SR (右)。
 ($\tau_0^{-1}\Omega^{-1}$ は前者は0.025, 後者は0.5で自転速度に対してNC率が高い。
 τ_0^{-1} 減の最後2例はSR。)



Mitchell一派の研究の金星への適用性

- 恐らく下層だけが対象になりうる
 - 深い大気は想定外（議論においても，モデル設定も）。
 - 雲層では $\tau_0 < \Omega$ なので $\tau_0^{-1}\Omega^{-1}$ 大。日周期（潮汐）重要。
- 下層への適用性
 - ○: 下層では $\tau_0^{-1}\Omega^{-1}$ 小で，潮汐は重要でない。
 - ○: 下層では Ro_T は数10~1000。実際の Ro は遥かに小
 - ? : 放射はニュートン冷却的でない
- 今後の発展の方向性は？
 - 下層への適用のためN冷却でない（理想化するなら拡散的な）放射を想定する。
 - より広い高度範囲用への拡張法を探る（いろんな考慮が要る？）