回転乱流におけるヘリシティによる速度生成現象とそのモデリング

稲垣　和寛

東京大学生産技術研究所　特任研究員

2019/5/21

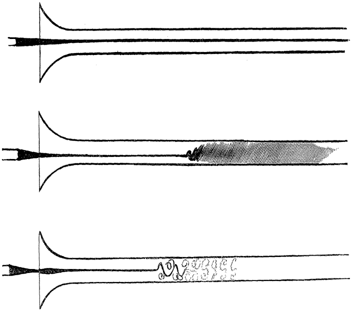
CPS セミナー @ 神戸大学

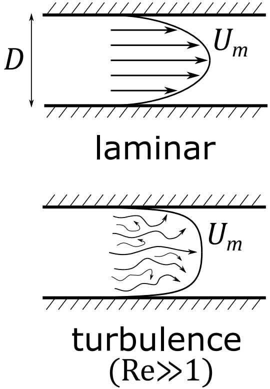
自己紹介

- 名前：稲垣　和寛（いながき　かずひろ）
- 経歴
  2010 年 4 月–2014 年 3 月　大阪大学 理学部 物理学科
  2014 年 4 月–2019 年 3 月　東京大学 理学系研究科 物理学専攻
  （東京大学 生産技術研究所・半場研究室）
  2019 年 4 月–現在　東京大学 生産技術研究所
- 学位：2019 年 3 月　博士（理学）
- 専門：流体物理，乱流モデリング

1. 導入：乱流モデルとは
2. 乱流におけるヘリシティ・回転の効果
3. 速度生成現象
4. ヘリシティと慣性波

円管内流れにおける層流・乱流


*

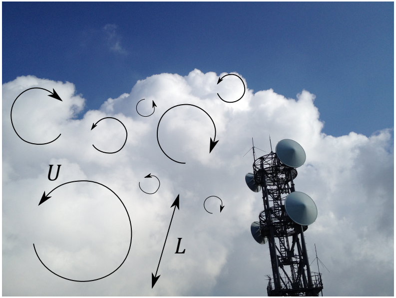


- Reynolds 数 $\mathrm{Re} = U_m D/\nu \gg 1 \to$ 乱流
- 均質化，特徴の消失

---

* O. Reynolds (1883)

乱流計算の困難



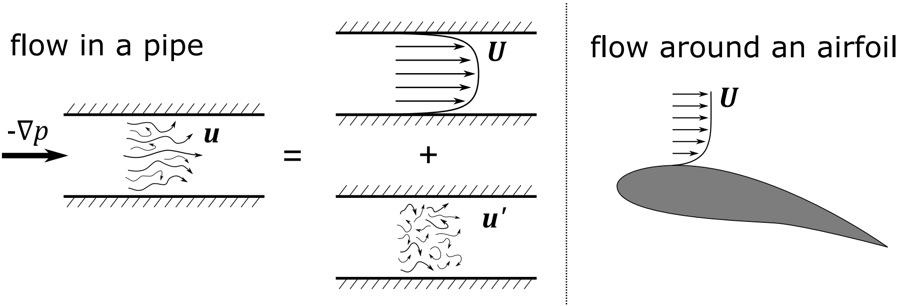
*

- Reynolds 数 $\mathrm{Re} \sim \dfrac{|(\boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{\nabla})\boldsymbol{u}|}{|\nu\nabla^2\boldsymbol{u}|} \sim \dfrac{UL}{\nu} \sim 10^8$
- グリッド数（3 次元）$N^3 \sim \mathrm{Re}^{9/4} \sim 10^{18}$

cf. Ishihara *et al*., PRF (2016)：一様等方乱流 $N^3 = 12288^3 \sim 10^{12}$

* NASA (https://www.nasa.gov/)

乱流と統計性



$\boldsymbol{u}$ 速度，$\boldsymbol{u} = \boldsymbol{U} + \boldsymbol{u}'$，$\boldsymbol{U}$ 平均速度，$\boldsymbol{u}'$ 速度ゆらぎ

- $\boldsymbol{U}$ のみを解く数理モデル
- 現実的な計算コストで乱流のシミュレーションが可能

クロージャー問題

Navier–Stokes 方程式

$$\frac{\partial u_i}{\partial t} = -\frac{\partial}{\partial x_j}(u_i u_j) - \frac{\partial p}{\partial x_i} + \frac{\partial}{\partial x_j}(2\nu s_{ij})$$

u_i：速度，p：圧力，ν：動粘性係数，$s_{ij} = \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{\partial u_i}{\partial x_j} + \dfrac{\partial u_j}{\partial x_i}\right)$

$u_i = U_i + u'_i$，$U_i = \langle u_i \rangle$，etc...

$$\frac{\partial U_i}{\partial t} = -\frac{\partial}{\partial x_j}\left(U_i U_j + \langle u'_i u'_j \rangle\right) - \frac{\partial P}{\partial x_i} + \frac{\partial}{\partial x_j}(2\nu S_{ij})$$

$\langle u'_i u'_j \rangle$：Reynolds 応力，平均速度に対する乱流の効果

クロージャー問題

$$\frac{\partial}{\partial t}\langle u'_i u'_j \rangle = -\frac{\partial}{\partial x_\ell}\langle u'_i u'_j u'_\ell \rangle + \cdots, \quad \frac{\partial}{\partial t}\langle u'_i u'_j u'_\ell \rangle = -\frac{\partial}{\partial x_m}\langle u'_i u'_j u'_\ell u'_m \rangle + \cdots$$

渦粘性近似

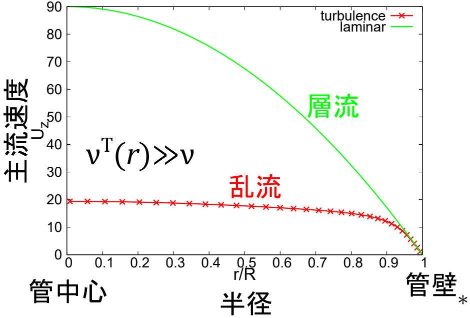
$$R_{ij}(=\langle u_i' u_j' \rangle) = \frac{2}{3}K\delta_{ij} - 2\nu^{\mathrm{T}} S_{ij}$$

$$\frac{\partial U_i}{\partial t} = -\frac{\partial}{\partial x_j}(U_i U_j) - \frac{\partial}{\partial x_i}\left(P + \frac{2}{3}K\right) + \frac{\partial}{\partial x_j}[2(\nu + \nu^{\mathrm{T}})S_{ij}]$$

$K(=\langle u_i' u_i' \rangle/2)$：乱流エネルギー
ν^{T}：渦粘性係数

- $\nu \to \nu + \nu^{\mathrm{T}}$
  乱流による実効粘性摩擦
- ν^{T} の時空間依存性

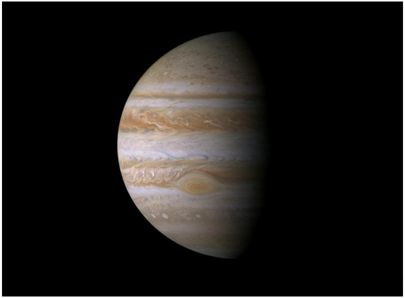
乱流による均質化，特徴の消失



円管内流れにおける軸方向速度分布

* Fukagata and Kasagi (2002) の DNS データ使用

乱流は特徴を消す？


*

†

- 渦粘性と現象が対応しない
- 回転 (自転) の効果
- スーパーセル・竜巻とヘリシティ
  Lilly, JAS (1986), Noda and Niino, JMSJ (2010)

---

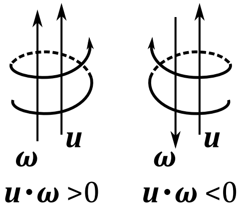
* NASA (https://www.nasa.gov/)

† 気象庁 HP より (http://www.jma.go.jp/jma/kishou/know/tenki_chuui/tenki_chuui_p5.html)

ヘリシティ

ヘリシティ$\boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{\omega}$, $\boldsymbol{\omega} = \boldsymbol{\nabla}\times\boldsymbol{u}$

- 非粘性保存量；
  $$\nu = 0 \to \frac{d}{dt}\int \mathrm{d}\boldsymbol{x}\ \boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{\omega} = 0$$
- 鏡映対称性の破れ



一様乱流における研究

- ヘリシティによるカスケード抑制
  André and Lesieur, JFM (1977)
  $\rightarrow$ 発達乱流ではヘリシティはあまり効かない
  Stepanov *et al*., PRL (2015)
  Linkmann *et al*., JFM (2018)
- 逆カスケード現象
  Kraichnan, PoF (1967)：二次元乱流
  Smith and Waleffe, PoF (1999)：回転による二次元化
  Mininni *et al*., PoF (2009)：強回転の必要性
  Biferale *et al*., PRL (2012)：単一ヘリシティ乱流

ヘリシティ，回転ともに強い条件が必要

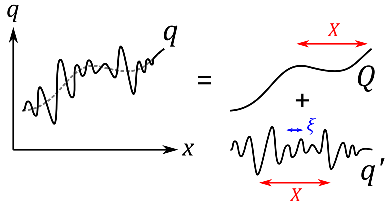
非一様乱流の理論解析 (TSDIA)

Yoshizawa, PoF (1984): Two-scale direct-interaction approximation

$$\boldsymbol{\xi} = \boldsymbol{x}, \quad \boldsymbol{X} = \delta \boldsymbol{x}, \quad \tau = t, \quad T = \delta t$$

$$\frac{\partial}{\partial x_i} = \frac{\partial}{\partial \xi_i} + \delta \frac{\partial}{\partial X_i}, \quad \frac{\partial}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial \tau} + \delta \frac{\partial}{\partial T}$$

$$\boldsymbol{u} = \boldsymbol{U}(\boldsymbol{X}; T) + \boldsymbol{u}'(\boldsymbol{\xi}, \boldsymbol{X}; \tau, T)$$



パラメータ展開 $q' = (\boldsymbol{u}', p')$

$$q' = \sum_{n,m=0}^{\infty} \delta^n |\Omega^{\mathrm{F}}|^m q^{(nm)}$$

$\boldsymbol{\xi}$ 場に関する一様性，最低次場 $(\boldsymbol{u}^{(00)})$ の等方，鏡映非対称性を仮定

$$\left\langle \tilde{u}_i^{(00)}(\boldsymbol{k}, \boldsymbol{X}) \tilde{u}_j^{(00)}(\boldsymbol{k}', \boldsymbol{X}) \right\rangle = \left[M_{ij}(\boldsymbol{k}) \frac{E^{\mathrm{B}}(k, \boldsymbol{X})}{4\pi k^2} - \frac{i}{2} \epsilon_{ij\ell} \frac{k_\ell}{k^2} \frac{E^{H\mathrm{B}}(k, \boldsymbol{X})}{4\pi k^2} \right] \delta(\boldsymbol{k} + \boldsymbol{k}')$$

$M_{ij}(\boldsymbol{k}) = \delta_{ij} - k_i k_j / k^2$, $K^{(00)} = \int \mathrm{d}\boldsymbol{k} E^{\mathrm{B}} / (4\pi k^2)$, $H^{(00)} = \int \mathrm{d}\boldsymbol{k} E^{H\mathrm{B}} / (4\pi k^2)$

非等方，非一様，回転の効果を摂動的に取り入れる

TSDIA の手続き

$$
\begin{aligned}
&\frac{\partial}{\partial \tau}\tilde{u}_i^{(00)}(\boldsymbol{k},\boldsymbol{X}) + \nu k^2 \tilde{u}_i^{(00)}(\boldsymbol{k},\boldsymbol{X}) \\
&+ iM_{iab}(\boldsymbol{k})\int \mathrm{d}\boldsymbol{p}\int \mathrm{d}\boldsymbol{q}\,\delta(\boldsymbol{k}-\boldsymbol{p}-\boldsymbol{q})\tilde{u}_a^{(00)}(\boldsymbol{p},\boldsymbol{X})\tilde{u}_b^{(00)}(\boldsymbol{q},\boldsymbol{X}) = 0, \\
&\frac{\partial}{\partial \tau}\tilde{G}_{ij}(\boldsymbol{k},\boldsymbol{k}',\tau,\tau') + \nu k^2 \tilde{G}_{ij}(\boldsymbol{k},\boldsymbol{k}',\tau,\tau') \\
&+ 2iM_{iab}(\boldsymbol{k})\int \mathrm{d}\boldsymbol{p}\int \mathrm{d}\boldsymbol{q}\,\delta(\boldsymbol{k}-\boldsymbol{p}-\boldsymbol{q})\tilde{u}_a^{(00)}(\boldsymbol{p},\boldsymbol{X})\tilde{G}_{bj}(\boldsymbol{q},\boldsymbol{k}',\tau,\tau') \\
&= M_{ij}(\boldsymbol{k})\delta(\boldsymbol{k}-\boldsymbol{k}')\delta(\tau-\tau'), \\
&\frac{\partial}{\partial \tau}\tilde{u}_i^{(01)}(\boldsymbol{k},\boldsymbol{X}) + \nu k^2 \tilde{u}_i^{(01)}(\boldsymbol{k},\boldsymbol{X}) \\
&+ 2iM_{iab}(\boldsymbol{k})\int \mathrm{d}\boldsymbol{p}\int \mathrm{d}\boldsymbol{q}\,\delta(\boldsymbol{k}-\boldsymbol{p}-\boldsymbol{q})\tilde{u}_a^{(00)}(\boldsymbol{p},\boldsymbol{X})\tilde{u}_b^{(01)}(\boldsymbol{q},\boldsymbol{X}) \\
&= 2M_{ia}(\boldsymbol{k})\epsilon_{abc}\tilde{u}_b^{(00)}(\boldsymbol{k},\boldsymbol{X})\Omega_c^{\mathrm{F}}/|\Omega^{\mathrm{F}}|
\end{aligned}
$$

$$
M_{iab}(\boldsymbol{k}) = [k_a M_{ib}(\boldsymbol{k}) + k_b M_{ia}(\boldsymbol{k})]/2
$$

$$
\to \tilde{u}_i^{(01)}(\boldsymbol{k},\boldsymbol{X}) = \int_{-\infty}^{\tau}\mathrm{d}\tau'\int \mathrm{d}\boldsymbol{k}'\tilde{G}_{ij}(\boldsymbol{k},\boldsymbol{k}',\tau,\tau')M_{ja}(\boldsymbol{k}')\epsilon_{abc}\tilde{u}_b^{(00)}(\boldsymbol{k}',\boldsymbol{X})\Omega_c^{\mathrm{F}}/|\Omega^{\mathrm{F}}|
$$

ヘリシティの効果を取り入れた乱流モデル

$R_{ij} = \langle u_i^{(00)} u_j^{(00)} \rangle + \langle u_i^{(01)} u_j^{(00)} \rangle + \cdots,\ O(\delta|\Omega^{\mathrm{F}}|)$ までの解析

$$R_{ij} = \frac{2}{3} K \delta_{ij} - 2\nu^{\mathrm{T}} S_{ij} + \left(\gamma_j 2\Omega_i^{\mathrm{F}} + \gamma_i 2\Omega_j^{\mathrm{F}} - \frac{2}{3} \gamma_\ell 2\Omega_\ell^{\mathrm{F}} \delta_{ij} \right),$$

$$\nu^{\mathrm{T}} = \frac{7}{15} \int_0^\infty \mathrm{d}k \int_{-\infty}^{\tau} \mathrm{d}\tau'\, G(k,\tau,\tau') E^{\mathrm{B}}(k,\tau,\tau'),$$

$$\gamma_i = \frac{1}{30} \int_0^\infty \mathrm{d}k\, k^{-2} \int_{-\infty}^{\tau} \mathrm{d}\tau'\, G(k,\tau,\tau') \delta \frac{\partial E^{H\mathrm{B}}}{\partial X_i}(k,\tau,\tau')$$

$$\langle \tilde{G}_{ij}(\boldsymbol{k}, \boldsymbol{k}', \tau, \tau') \rangle = M_{ij}(\boldsymbol{k}) G(k,\tau,\tau') \delta(\boldsymbol{k} - \boldsymbol{k}')$$

$$\Rightarrow R_{ij} = \frac{2}{3} K \delta_{ij} - 2\nu^{\mathrm{T}} S_{ij} + \eta^{\mathrm{T}} \left(\frac{\partial H}{\partial x_j} \Omega_i^{\mathrm{A}} + \frac{\partial H}{\partial x_i} \Omega_j^{\mathrm{A}} - \frac{2}{3} \frac{\partial H}{\partial x_\ell} \Omega_\ell^{\mathrm{A}} \delta_{ij} \right)$$

$$\boldsymbol{\Omega}^{\mathrm{A}} = \boldsymbol{\nabla} \times \boldsymbol{U} + 2\boldsymbol{\Omega}^{\mathrm{F}}$$

- 乱流のヘリシティ $H (= \langle \boldsymbol{u}' \cdot \boldsymbol{\omega}' \rangle)$ の空間勾配が重要

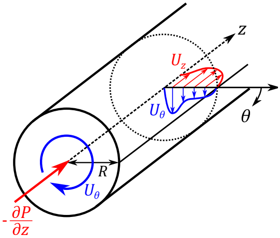
ヘリシティモデル

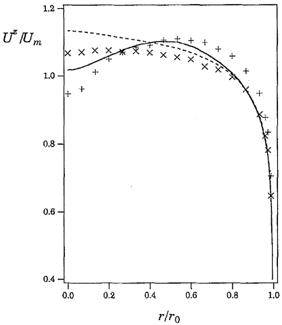
Yokoi and Yoshizawa, PoF (1993)：円管内旋回乱流へのモデル適用

$$R_{ij} = \frac{2}{3}K\delta_{ij} - 2\nu^{\mathrm{T}} S_{ij} + \eta^{\mathrm{T}} \left(\frac{\partial H}{\partial x_j}\Omega_i^{\mathrm{A}} + \frac{\partial H}{\partial x_i}\Omega_j^{\mathrm{A}} - \frac{2}{3}\frac{\partial H}{\partial x_\ell}\Omega_\ell^{\mathrm{A}}\delta_{ij} \right)$$

軸付近に強い旋回

＋印：上流の実験値
(モデルの初期値)
下流 ($z = 26.6R$)
× 印：実験値
破線：渦粘性
実線：ヘリシティ





- 渦粘性効果に対抗，主流速度の凹みの維持を再現

Reynolds 応力輸送とヘリシティの関係？

$$\frac{\partial R_{ij}}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_\ell}(U_\ell R_{ij}) = P_{ij} - \varepsilon_{ij} + \Phi_{ij} + \Pi_{ij} + T_{ij} + D_{ij} + Co_{ij},$$

$$P_{ij} = -R_{i\ell}\frac{\partial U_j}{\partial x_\ell} - R_{j\ell}\frac{\partial U_i}{\partial x_\ell}, \quad \varepsilon_{ij} = 2\nu \left\langle \frac{\partial u'_i}{\partial x_\ell}\frac{\partial u'_j}{\partial x_\ell} \right\rangle,$$

$$\Phi_{ij} = 2\left\langle p' s'_{ij} \right\rangle, \quad \Pi_{ij} = -\frac{\partial}{\partial x_j}\left\langle u'_i p' \right\rangle - \frac{\partial}{\partial x_i}\left\langle u'_j p' \right\rangle,$$

$$T_{ij} = -\frac{\partial}{\partial x_\ell}\left\langle u'_i u'_j u'_\ell \right\rangle, \quad D_{ij} = 2\nu \nabla^2 R_{ij},$$

$$Co_{ij} = 2(\epsilon_{im\ell} R_{jm} + \epsilon_{jm\ell} R_{im})\Omega^{\mathrm{F}}_\ell$$

$$P_{ij} = -\frac{4}{3}K S_{ij} + \cdots \;\to\; R_{ij} - \frac{2}{3}K\delta_{ij} \sim \tau P_{ij} = -2\nu^{\mathrm{T}} S_{ij}, \quad \nu^{\mathrm{T}} \sim \tau K$$

Mellor and Yamada, JAS (1974)：R_{ij} の輸送方程式 (↑) をモデル化

- ヘリシティの効果はどこから？

ヘリシティモデルの特徴：平均速度の無いケース

$$R_{ij} = \frac{2}{3}K\delta_{ij} - 2\nu^{\mathrm{T}} S_{ij} + \eta^{\mathrm{T}} \left(\frac{\partial H}{\partial x_j}\Omega_i^{\mathrm{A}} + \frac{\partial H}{\partial x_i}\Omega_j^{\mathrm{A}} - \frac{2}{3}\frac{\partial H}{\partial x_\ell}\Omega_\ell^{\mathrm{A}}\delta_{ij} \right)$$

$U_i = 0$, $\Omega_i^{\mathrm{F}} \neq 0$, $\boldsymbol{\nabla} H \neq 0$ のとき

$$R_{ij} - \frac{2}{3}K\delta_{ij} = 2\eta^{\mathrm{T}} \left(\frac{\partial H}{\partial x_j}\Omega_i^{\mathrm{F}} + \frac{\partial H}{\partial x_i}\Omega_j^{\mathrm{F}} - \frac{2}{3}\frac{\partial H}{\partial x_\ell}\Omega_\ell^{\mathrm{F}}\delta_{ij} \right) \neq 0.$$

○平均速度生成

$$\frac{\partial U_i}{\partial t} = -\frac{\partial}{\partial x_j}\left[2\eta^{\mathrm{T}} \left(\frac{\partial H}{\partial x_j}\Omega_i^{\mathrm{F}} + \frac{\partial H}{\partial x_i}\Omega_j^{\mathrm{F}} - \frac{2}{3}\frac{\partial H}{\partial x_\ell}\Omega_\ell^{\mathrm{F}}\delta_{ij} \right) \right] - \frac{\partial P}{\partial x_i} \neq 0.$$

- $U_i = 0 \to U_i \neq 0$

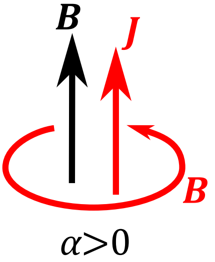
渦ダイナモ

∘ α ダイナモ [電磁流体力学 (MHD)]*

$$\frac{\partial \boldsymbol{B}}{\partial t} = \boldsymbol{\nabla} \times \langle \boldsymbol{u}' \times \boldsymbol{b}' \rangle + \cdots$$

$$\langle \boldsymbol{u}' \times \boldsymbol{b}' \rangle = \alpha \boldsymbol{B} - \beta \boldsymbol{\nabla} \times \boldsymbol{B} + \cdots$$

$\alpha = -\tau H$，定常解：$\langle \boldsymbol{u}' \times \boldsymbol{b}' \rangle = 0$
$\Leftrightarrow \boldsymbol{\nabla} \times \boldsymbol{B} = \boldsymbol{J} = (\alpha/\beta)\boldsymbol{B}$

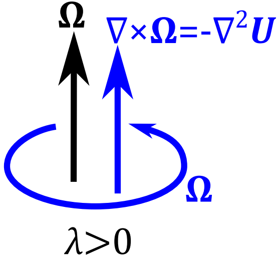


∘ 渦ダイナモ

$$\frac{\partial \boldsymbol{\Omega}}{\partial t} = \boldsymbol{\nabla} \times \langle \boldsymbol{u}' \times \boldsymbol{\omega}' \rangle + \cdots$$

$$\langle \boldsymbol{u}' \times \boldsymbol{\omega}' \rangle = \lambda \boldsymbol{\Omega} - \nu^{\mathrm{T}} \boldsymbol{\nabla} \times \boldsymbol{\Omega} + \cdots$$

$\lambda = -\boldsymbol{\nabla} \cdot (\eta^{\mathrm{T}} \boldsymbol{\nabla} H)$，定常解：$\langle \boldsymbol{u}' \times \boldsymbol{\omega}' \rangle = 0$
$\Leftrightarrow \boldsymbol{\nabla} \times \boldsymbol{\Omega} = -\nabla^2 \boldsymbol{U} = (\lambda/\nu^{\mathrm{T}})\boldsymbol{\Omega}$

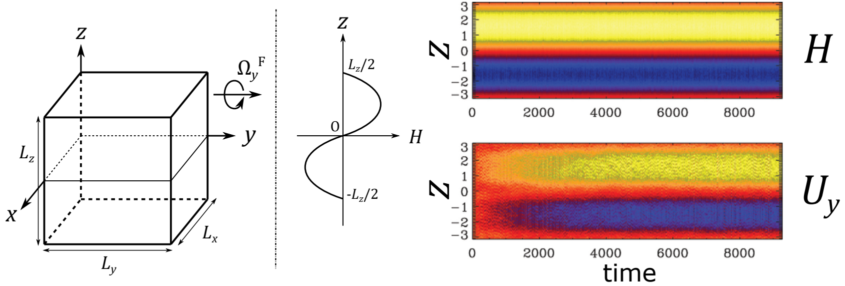


* Moffatt (Cambridge, 1978), Krause and Rädler (Oxford, 1980)

平均速度生成と乱流ヘリシティ

Yokoi and Brandenburg, PRE (2016)

$U_i(t=0)=0$，外力で乱流ヘリシティ $H(=\langle \boldsymbol{u}' \cdot \boldsymbol{\omega}' \rangle)$ を与える



$$\boldsymbol{\Omega}^{\mathrm{F}} = (0, \Omega^{\mathrm{F}}, 0),\ H(z) \propto \sin z$$

- Reynolds 応力 (乱流) による平均速度 $U_y(\parallel \Omega_y^{\mathrm{F}})$ の生成
- ヘリシティモデルの予想と対応
- 乱流ヘリシティが Reynolds 応力を作るメカニズムは？

平均速度生成の数値計算

Large eddy simulation (LES)

$$\frac{\partial \overline{u}_i}{\partial t} = -\frac{\partial}{\partial x_j}\overline{u}_i\overline{u}_j - \frac{\partial \overline{p}}{\partial x_i} + \frac{\partial}{\partial x_j}\left(2\nu^{\mathrm{sgs}}\overline{s}_{ij}\right) + 2\epsilon_{ij\ell}\overline{u}_j\Omega_\ell^{\mathrm{F}} + C^{\mathrm{ex}}\overline{f}_i$$

Smagorinsky model：

$\nu^{\mathrm{sgs}} = (C_{\mathrm{S}}\overline{\Delta})^2\sqrt{2\overline{s}_{ij}\overline{s}_{ij}}$

$\overline{\Delta} = (\Delta x\Delta y\Delta z)^{1/3},\ C_{\mathrm{S}} = 0.19$

$\overline{q}$: grid-scale の変数

周期境界条件

$N_x \times N_y \times N_z = 128 \times 256 \times 128$

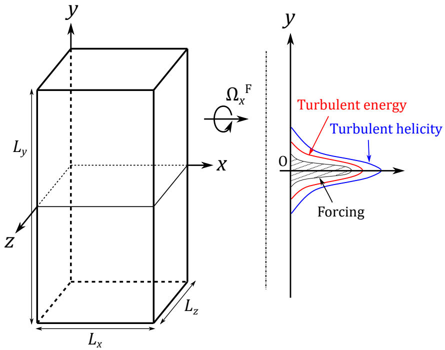
$L_x \times L_y \times L_z = 2\pi \times 4\pi \times 2\pi$

二次精度中心差分

Adams–Bashforth 法

$\langle \overline{u}_i \rangle_{\mathrm{S}}(t=0) = 0,\ \langle \overline{f}_i \rangle_{\mathrm{S}}(t) = 0$

cf. Inagaki *et al*., PRF (2017)



$\boldsymbol{\Omega}^{\mathrm{F}} = (\Omega^{\mathrm{F}}, 0, 0)$

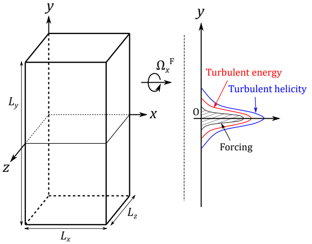
規格化：$\langle \overline{u}_i'\overline{u}_i' \rangle_{\mathrm{S}}/2 = 1$

$\tau^{\mathrm{turb}} = K^{\mathrm{GS}}/\varepsilon^{\mathrm{SGS}}(y=0) \sim 0.5$

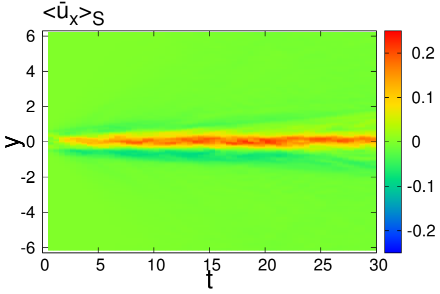
∘ Ω^{F} と H^{GS} 注入率がパラメータ

平均速度生成と回転，ヘリシティ

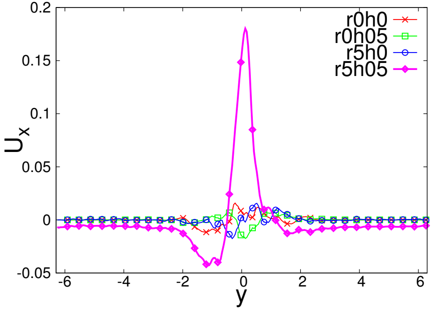
run	回転	ヘリシティ注入
r0h0	×	×
r0h05	×	◯
r5h0	◯	×
r5h05	◯	◯



Yokoi & Brandenburg (2016) と整合的



run r5h05 における回転軸方向平均速度の時間発展



$20 \leq t \leq 30$ で時間平均した回転軸方向平均速度

平均速度生成・維持と Reynolds 応力

定常状態，$R_{xy} = \langle \overline{u}'_x \overline{u}'_y \rangle - 2\langle \nu^{\rm sgs} \overline{s}_{xy} \rangle$

$$\frac{\partial U_x}{\partial t} = -\frac{\partial R_{xy}}{\partial y} = 0$$

境界では速度ゆらぎはないので，$R_{xy} = 0$ が解

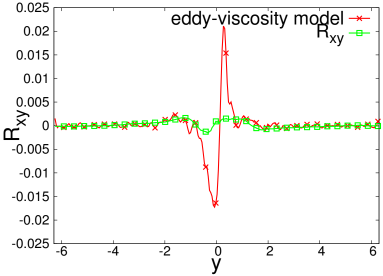
渦粘性近似：$R_{xy} = -\nu^{\rm T} \dfrac{\partial U_x}{\partial y}$

$\nu^{\rm T} = C_\nu \dfrac{(K^{\rm GS})^2}{\varepsilon^{\rm SGS}}$，$C_\nu = 0.09$

解析解を満たすためには

$$R_{xy} = -\nu^{\rm T} \frac{\partial U_x}{\partial y} + \underline{N_{xy}}$$

N_{xy} は $y = 0$ 付近で負の勾配
平均速度生成のソース



run r5h05 における R_{xy} の数値解と渦粘性近似

Reynolds 応力の輸送方程式

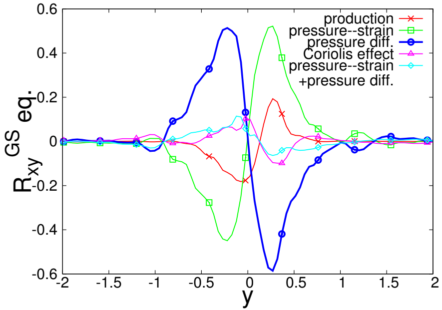
$$\frac{\partial U_x}{\partial t} = \underline{-\frac{\partial R^{\mathrm{GS}}_{xy}}{\partial y}} + \frac{\partial}{\partial y}\left\langle \nu^{\mathrm{sgs}}\overline{s}_{xy}\right\rangle$$

$$\frac{\partial R^{\mathrm{GS}}_{xy}}{\partial t} = \underline{-R^{\mathrm{GS}}_{yy}\frac{\partial U_x}{\partial y}} \underline{+2\left\langle \overline{s}'_{xy}\overline{p}'\right\rangle} \underline{-\frac{\partial}{\partial y}\left\langle \overline{p}'\overline{u}'_x\right\rangle} \underline{+2R^{\mathrm{GS}}_{xz}\Omega^F}$$

$R^{\mathrm{GS}}_{ij} = \langle \overline{u}'_i\overline{u}'_j\rangle$

- $y = 0$ 付近で正の勾配を持つ項
  $\Rightarrow$ 平均速度を均す寄与 (渦粘性)
- $y = 0$ 付近で負の勾配を持つ項
  $\Rightarrow$ 平均速度を作る寄与

○ 圧力拡散項に注目



run r5h05 における R^{GS}_{xy} の輸送方程式の収支

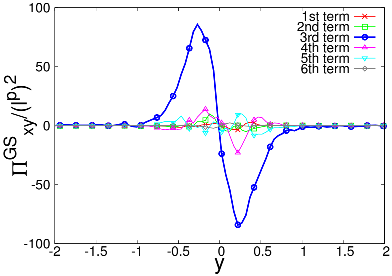
圧力拡散項と乱流ヘリシティの関係

圧力の Poisson 方程式の近似 $\nabla^2 \overline{p}' \simeq -(\ell^{\mathrm{p}})^{-2}\,\overline{p}'$， $\Pi_{xy}^{\mathrm{GS}} = -\dfrac{\partial}{\partial y}\left\langle \overline{u}'_x \overline{p}' \right\rangle$

$$\Rightarrow -\frac{\partial}{\partial y}\left\langle \overline{u}'_x \overline{p}' \right\rangle = (\ell^{\mathrm{p}})^2 \frac{\partial}{\partial y}\left[-2\left\langle \overline{u}'_x \overline{s}'_{ij} \right\rangle S_{ij} + \left\langle \overline{u}'_x \overline{\omega}'_i \right\rangle \Omega_i \underline{+ \left\langle \overline{u}'_x \overline{\omega}'_x \right\rangle 2\Omega^{\mathrm{F}}} \right.$$
$$\left. - \left\langle \overline{u}'_x \overline{s}'_{ij} \overline{s}'_{ij} \right\rangle + \frac{1}{2}\left\langle \overline{u}'_x \overline{\omega}'_i \overline{\omega}'_i \right\rangle + \left\langle \overline{u}'_x \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j}\left(2\nu^{\mathrm{sgs}} \overline{s}_{ij}\right) \right\rangle \right]$$

$$-\frac{\partial}{\partial y}\left\langle \overline{u}'_x \overline{p}' \right\rangle \simeq \frac{\partial}{\partial y}\left[(\ell^{\mathrm{p}})^2 \underline{\left\langle \overline{u}'_x \overline{\omega}'_x \right\rangle} 2\Omega^{\mathrm{F}} \right]$$
$$\simeq \frac{\partial}{\partial y}\left[\frac{1}{3}(\ell^{\mathrm{p}})^2 \underline{H^{\mathrm{GS}}} 2\Omega^{\mathrm{F}} \right]$$

$H^{\mathrm{GS}} = \left\langle \overline{u}'_i \overline{\omega}'_i \right\rangle$,
$\left\langle \overline{u}'_x \overline{\omega}'_x \right\rangle = \left\langle \overline{u}'_y \overline{\omega}'_y \right\rangle = \left\langle \overline{u}'_z \overline{\omega}'_z \right\rangle$



run r5h05 における圧力拡散項の近似評価

乱流ヘリシティの効果を取り入れたモデルの導出

圧力拡散項のモデルを TSDIA で解析的に導出

$$\Pi_{ij} = -\frac{\partial}{\partial x_j}\left\langle u_i' p' \right\rangle + (i \leftrightarrow j) = C_{PDH}\left[\frac{\partial}{\partial x_j}\left(\frac{K^3}{\varepsilon^2} H \Omega_i^{\mathrm{A}}\right) + (i \leftrightarrow j)\right]$$

R_{ij} の輸送方程式におけるソースとシンクの平衡解

$$[A_{ij}]_{\mathrm{D}} = A_{ij} - \frac{1}{3} A_{\ell\ell}\delta_{ij}, \quad B_{ij} = [R_{ij}]_{\mathrm{D}}, \quad 2\left\langle p' s_{ij}' \right\rangle = -C_{\mathrm{S1}}\frac{\varepsilon}{K} B_{ij}$$

$$\frac{\partial B_{ij}}{\partial t} = -C_{\mathrm{S1}}\frac{\varepsilon}{K} B_{ij} - \frac{4}{3} K S_{ij} + [\Pi_{ij}]_{\mathrm{D}} = 0$$

$$\Leftrightarrow \quad R_{ij} = \frac{2}{3} K \delta_{ij} - 2\nu^{\mathrm{T}} S_{ij} + \tau^{\mathrm{T}}\left[\frac{\partial}{\partial x_j}\left(\frac{K^3}{\varepsilon^2} H \Omega_i^{\mathrm{A}}\right) + (i \leftrightarrow j)\right]_{\mathrm{D}}$$

ヘリシティモデルと対応

3 節のまとめ

- ヘリシティモデルは非一様な乱流ヘリシティ分布と回転による速度生成 (渦ダイナモ) を予言
- 本研究では LES を用いて速度生成現象を再現
- 圧力拡散項が乱流ヘリシティと密接に関係
- 圧力拡散項の寄与からヘリシティモデルを導出

参考文献

1. N. Yokoi and A. Yoshizawa, *Phys. Fluids A* **5**, 464 (1993).
2. N. Yokoi and A. Brandenburg, *Phys. Rev. E* **93**, 033125 (2016).
3. K. Inagaki, N. Yokoi, and F. Hamba, *Phys. Rev. Fluids* **2**, 114605 (2017).

ヘリシティによる乱流エネルギー拡散

圧力拡散とヘリシティの関係

$$\Pi_{ij} = -\frac{\partial}{\partial x_j}\left\langle u'_i p' \right\rangle + (i \leftrightarrow j) = \frac{\partial}{\partial x_j}\left[(\ell^{\mathrm{p}})^2 H \Omega_i^{\mathrm{A}} + (i \leftrightarrow j) \right]$$

乱流エネルギーの輸送方程式 (回転座標系)

$$\frac{\partial K}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_\ell}(U_\ell K) = P^K - \varepsilon + \Pi + T + D^K$$

$$P^K = -R_{ij} S_{ij}, \quad \varepsilon = \nu \left\langle \frac{\partial u'_i}{\partial x_j} \frac{\partial u'_i}{\partial x_j} \right\rangle, \quad \Pi = \Pi_{ii}/2 = -\frac{\partial}{\partial x_i}\left\langle u'_i p' \right\rangle,$$

$$T = -\frac{\partial}{\partial x_i}\left\langle u'_i \frac{1}{2} u'_j u'_j \right\rangle, \quad D^K = \nu \frac{\partial^2 K}{\partial x_j \partial x_j}, \quad \underline{Co_{ii} = 0}$$

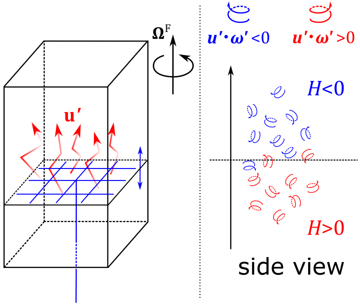
ヘリシティによるエネルギーの拡散

$$\Pi = \frac{\partial}{\partial x_i}\left[(\ell^{\mathrm{p}})^2 H \Omega_i^{\mathrm{A}} \right]$$

回転系振動格子乱流における乱れの拡散

○ 回転系振動格子乱流

- Dickinson and Long, PoF (1978)
  乱流領域の幅 d
  回転なし：$d \propto t^{1/2}$
- Dickinson and Long, JFM (1983)
  回転あり：$d \propto t$
  $\rightarrow$ 勾配拡散と異なる物理描像
- Ranjan and Davidson, JFM (2014)
  線形波動の慣性波による説明



- 負，正のヘリシティが振動格子の上，下にそれぞれ分布
- 乱流ヘリシティを用いたモデリングの有効性
  Inagaki and Hamba, PRF (2018)

慣性波とヘリシティの関係

慣性波とヘリシティ[cf. Moffatt, JFM (1970), Davidson (Oxford, 2004)]

回転系，線形非粘性のとき

$$\frac{\partial \omega_i}{\partial t} = 2\Omega_j^{\mathrm{F}} \frac{\partial u_i}{\partial x_j}, \quad \frac{\partial^2}{\partial t^2} \nabla^2 u_i = \left(2\Omega_j^{\mathrm{F}} \frac{\partial}{\partial x_j} \right)^2 u_i$$

波動解 $u_i = \tilde{u}_i \exp[\mathrm{i}(k_j x_j - \varpi t)]$

$$\varpi = \pm \frac{2 k_i \Omega_i^{\mathrm{F}}}{k}, \quad C_i^{\mathrm{g}} = \frac{\partial \varpi}{\partial k_i} = \pm \frac{1}{k} M_{ij}(\boldsymbol{k}) 2\Omega_j^{\mathrm{F}}$$

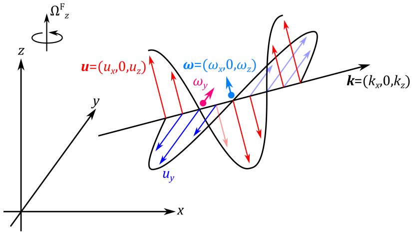
ϖ：周波数，$\boldsymbol{C}^{\mathrm{g}}$：群速度，$M_{ij}(\boldsymbol{k}) = \delta_{ij} - k_i k_j / k^2$

$\tilde{\omega}_i = \mp k \tilde{u}_i$，$\underline{\tilde{u}_i \tilde{\omega}_i^* = \mp k |\tilde{u}_i|^2}$

○ 速いモード $\boldsymbol{k} \simeq \boldsymbol{k}_\perp$

$\to C_i^{\mathrm{g}} = \pm 2\Omega_i^{\mathrm{F}} / k$

- 負（正）のヘリシティが，回転軸正（負）方向の群速度に対応



速度圧力相関と慣性波の群速度の対応

- 速度圧力相関 (圧力によるエネルギーフラックス)

$$\nabla^2 p^\Omega = 2\omega_i \Omega_i^{\mathrm{F}}, \ \left\langle u_i' p^{\Omega\prime} \right\rangle = -(\ell^{\mathrm{p}})^2 H 2\Omega_i^{\mathrm{F}}$$

  - 負（正）の乱流ヘリシティ H が回転軸正（負）のフラックスに対応

- 慣性波の群速度，速いモード $\boldsymbol{k} \simeq \boldsymbol{k}_\perp$

$$\tilde{u}_i \tilde{\omega}_i^* = \mp k |\tilde{u}_i|^2, \ C_i^{\mathrm{g}} = \pm \frac{1}{k} 2\Omega_i^{\mathrm{F}}$$

  - 負（正）のヘリシティが，回転軸正（負）方向の群速度に対応

<u>速度圧力相関が慣性波の群速度と対応</u>

速度圧力相関と慣性波の群速度の解析的な関係

一様等方で鏡映非対称な乱流場

$$\left\langle \tilde{u}_i'(\boldsymbol{k})\tilde{u}_j'^*(\boldsymbol{k})\right\rangle = M_{ij}(\boldsymbol{k})\frac{E(k)}{4\pi k^2} - \frac{i}{2}\epsilon_{ij\ell}\frac{k_\ell}{k^2}\frac{E^H(k)}{4\pi k^2}$$

$K = \int \mathrm{d}\boldsymbol{k} E/(4\pi k^2),\quad H = \int \mathrm{d}\boldsymbol{k} E^H/(4\pi k^2)$

$$\left\langle u_i' p^{\Omega\prime}\right\rangle = -\int \mathrm{d}\boldsymbol{k}\frac{1}{2k}\frac{E^H(k)}{4\pi k^2}\frac{1}{k}M_{ij}(\boldsymbol{k})2\Omega_j^{\mathrm{F}}$$

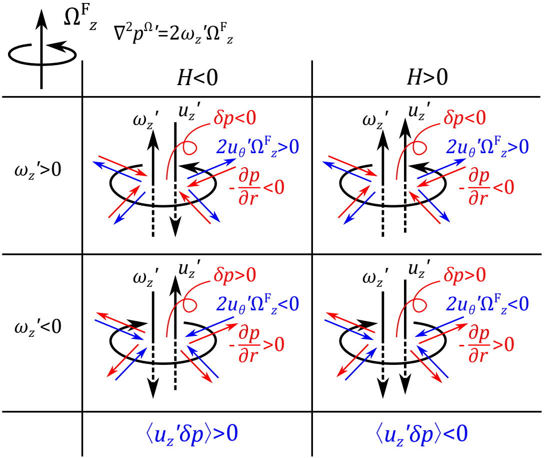
線形非粘性解と慣性波の群速度

$$\tilde{u}_i'\tilde{\omega}_i'^* = \mp k|\tilde{u}_i'|^2 \Leftrightarrow \frac{E^H(k)}{2k} = \mp E(k),\quad C_i^{\mathrm{g}} = \pm\frac{1}{k}M_{ij}(\boldsymbol{k})2\Omega_j^{\mathrm{F}}$$

$$\Rightarrow \left\langle u_i' p^{\Omega\prime}\right\rangle = \int \mathrm{d}\boldsymbol{k}\,\frac{E(k)}{4\pi k^2}C_i^{\mathrm{g}}$$

→慣性波の群速度によるエネルギーのフラックス

直観的な理解



$$\frac{\partial u_r'}{\partial t} = 2u_\theta'\Omega^{F}_{z} + \cdots$$

$$\frac{\partial u_z'}{\partial t} = -\frac{\partial p'}{\partial z} + \cdots$$

Coriolis 力による δu_r 駆動

→ 非圧縮条件を満たす δu_z の向きから δp の符号決定

→ $\langle u_z'\delta p\rangle \propto -H$

速度生成との関係

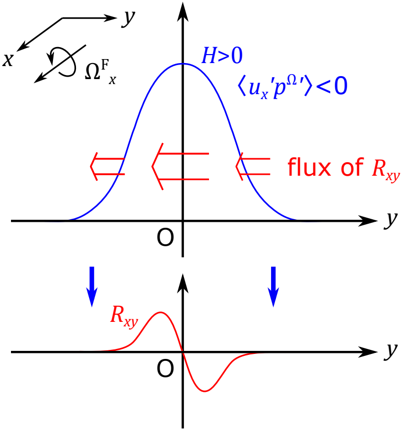
$$\frac{\partial R_{ij}}{\partial t} = -\frac{\partial}{\partial x_\ell}\left(\langle u_i' p'\rangle \delta_{j\ell} + \langle u_j' p'\rangle \delta_{i\ell}\right) + \cdots$$

$$\frac{\partial R_{xy}}{\partial t} = -\frac{\partial}{\partial y}\langle u_x' p'\rangle + \cdots$$

$$\langle u_x' p'\rangle = -(\ell^{\mathrm{p}})^2 H \Omega_x^{\mathrm{F}}$$

$\langle u_x' p'\rangle$ は R_{xy} の y 方向フラックス

$$\frac{\partial U_x}{\partial t} = -\frac{\partial R_{xy}}{\partial y}$$



4 節のまとめ

- 速度圧力相関は乱流のエネルギーフラックスを表す
- 乱流ヘリシティを用いた速度圧力相関のモデルは回転軸方向のエネルギーフラックスを記述
- 乱流ヘリシティを用いた速度圧力相関のモデルは慣性波の群速度に対応
- 速度生成現象は速度圧力相関が Reynolds 応力のフラックスとして機能することで起こった

参考文献

1. A. Ranjan and P. Davidson, *J. Fluid Mech.* **756**, 448 (2014).
2. K. Inagaki and F. Hamba, *Phys. Rev. Fluids* **3**, 124601 (2018).
3. K. Inagaki, PhD. thesis, The University of Tokyo (2019).

まとめと結論

- 乱流ヘリシティが Reynolds 応力の輸送に及ぼす効果について，数値計算と理論解析を用いて調べた
- 圧力拡散項が乱流ヘリシティを用いてモデル化できることを提示し，この効果から速度生成現象を説明できることを示した
- 乱流ヘリシティを用いて記述した速度圧力相関のモデルが，慣性波の群速度と対応していることを示した
- 速度生成現象に関して，乱流ヘリシティと回転による Reynolds 応力のフラックスに基づく物理的解釈を与えた

展望や興味

◦ Duarte *et al*., MNRAS (2016)
圧縮性 MHD による球殻乱流におけるヘリシティ分布

- α ダイナモは周知
- 速度への効果は？
  - スーパーローテーション？

cf. Yoshizawa *et al*., GAFD (2013)
渦粘性を抑える効果，ヘリシティ

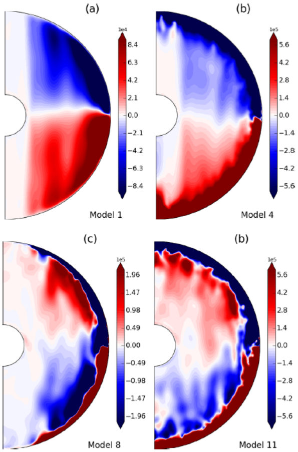


Figure 5. Azimuthally averaged contour plots of kinetic helicity. The top row displays the helicity pattern described in Section 2.1 for models 1 (a) and 4 (b) of Table 1. The bottom row shows two examples of the regime described in Section 2.2 for cases 8 (c) and 11 (d) of the same table.