



STEシミュレーション研究会

2017年9月6日(水) - 8日(金) 神戸大学統合研究拠点・惑星科学研究センター

振動型生成項を含む双曲型釣合則 に対する数値解法

三好 隆博

広島大学大学院理学研究科

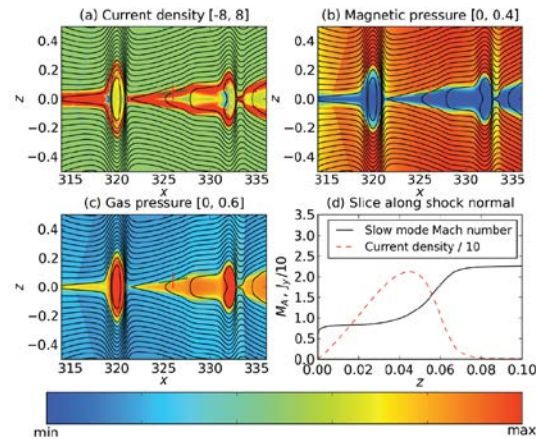
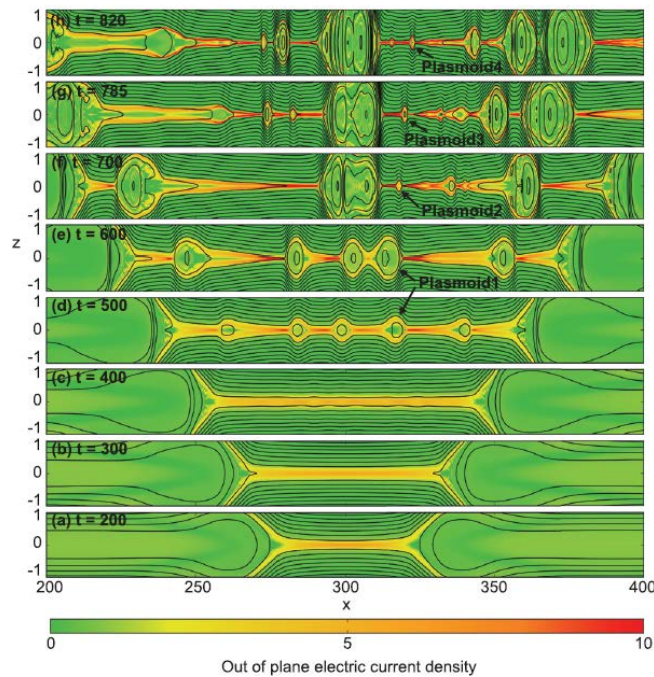
共同研究者：

簗島 敬 海洋研究開発機構

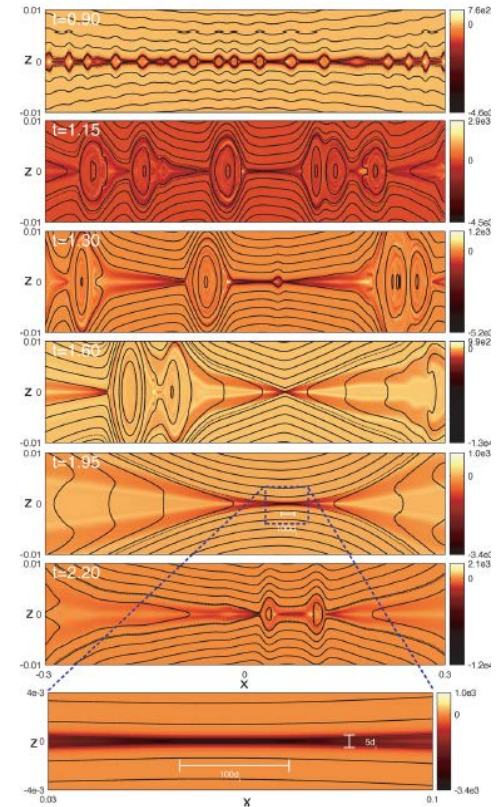
松本 洋介 千葉大学



□ MHD乱流と非MHD効果



large-scale, high-res.,
high-S resistive MHD
[Shibayama+, 2015]



Hall MHD plasmoids
[Huang+, 2011]

■ High-S MHDにおける微細化

■ イオン効果による大規模構造変化

□ 重イオン効果 (多成分プラズマ)



目的

- 流体モデルによるプラズママルチスケールシミュレーション実現のため、完全二流体（多流体）方程式に対する高次精度衝撃波捕獲法を開発する。
- 特に本研究では、二流体方程式を簡易化した線形双曲型釣合則に対する数値解法の基礎的な調査・検討を行う。



完全二流体方程式

□ イオン流体方程式

$$\begin{cases} \frac{\partial n_i}{\partial t} + \nabla \cdot (n_i \mathbf{u}_i) = 0 \\ \frac{\partial n_i \mathbf{u}_i}{\partial t} + \nabla \cdot (n_i \mathbf{u}_i \mathbf{u}_i + p_i \mathbf{I}) = \frac{n_i}{d_i} (\mathbf{E} + \mathbf{u}_i \times \mathbf{B}) \\ \frac{\partial \varepsilon_i}{\partial t} + \nabla \cdot ((\varepsilon_i + p_i) \mathbf{u}_i) = n_i \mathbf{u}_i \cdot \mathbf{E} \end{cases} \quad p_i = (\gamma - 1) \left(\varepsilon_i - \frac{1}{2} n_i u_i^2 \right)$$

□ 電子流体方程式

$$\begin{cases} \frac{\partial n_e}{\partial t} + \nabla \cdot (n_e \mathbf{u}_e) = 0 \\ \frac{\partial n_e \mathbf{u}_e}{\partial t} + \nabla \cdot (n_e \mathbf{u}_e \mathbf{u}_e + M p_e \mathbf{I}) = -\frac{M n_e}{d_i} (\mathbf{E} + \mathbf{u}_e \times \mathbf{B}) \\ \frac{\partial \varepsilon_e}{\partial t} + \nabla \cdot ((\varepsilon_e + p_e) \mathbf{u}_e) = n_e \mathbf{u}_e \cdot \mathbf{E} \end{cases} \quad M = \frac{m_i}{m_e} \quad p_e = (\gamma - 1) \left(\varepsilon_e - \frac{1}{2M} n_e u_e^2 \right)$$



完全二流体方程式

□ マクスウェル方程式

$$\begin{cases} \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} = c^2 \left[\nabla \times \mathbf{B} - \frac{1}{d_i} (n_i \mathbf{u}_i - n_e \mathbf{u}_e) \right] \\ \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = -\nabla \times \mathbf{E} \end{cases}$$

■ 物理量の規格化

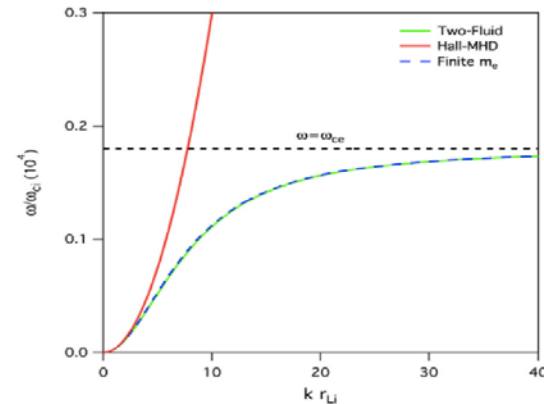
$$u_0 = c_a \Rightarrow d_i \leftarrow l_i / L_0, c \leftarrow c / c_a = \omega_{pi} / \omega_{ci}$$

$$u_0 = c_s \Rightarrow d_i \leftarrow r_{ci} / L_0, c \leftarrow c / c_s$$

■ $c \rightarrow \infty$: 拡張MHD方程式

\Rightarrow 不可的な楕円型方程式

■ $c \rightarrow \infty, M \rightarrow \infty$: Hall-MHD方程式



[Srinivasan+, 2011]



完全二流体方程式

□ 保存形式

$$\frac{\partial U}{\partial t} + \nabla \cdot \mathbf{F} = \mathbf{S}(U), \quad U = (n_i, \mathbf{p}_i, \varepsilon_i, n_e, \mathbf{p}_e, \varepsilon_e, \mathbf{B}, \mathbf{E})^T$$

■ 双曲型保存則の非同次方程式

⇒ 双曲型釣合則

■ 振動型の生成項

$$\mathbf{A}' \equiv \frac{\partial \mathbf{S}}{\partial U}, \quad A'_{kl} r'_l = \lambda'_k r'_k$$

\mathbf{A}' は交代行列（歪対称行列）のため、
非零の固有値 λ'_k は純虚数



完全二流体方程式の数値解法

□ 研究開発項目

- 双曲型保存則に対する高次精度衝撃波捕獲法
 - 衝撃波捕獲法 (FVS法, Roe法, HLL型法, etc.)
 - 高次精度解法 (MUSCL, WENO, WCNS, etc.)
 - 磁場・電場に関するガウスの法則の処理
- 時定数の短い生成項に対する時間積分法
 - 陽解法
 - 陰解法
 - 半陰解法
 - Implicit-Explicit Runge-Kutta法 (IMEX法)



完全二流体方程式

□ 保存則項と生成項に演算子分離

■ 双曲型保存則

$$\frac{\partial \mathbf{U}}{\partial t} + \nabla \cdot \mathbf{F} = 0$$

$$\mathbf{U} = (n_i, \mathbf{p}_i, \varepsilon_i, n_e, \mathbf{p}_e, \varepsilon_e, \mathbf{B}, \mathbf{E})^T$$

■ 振動型生成項 (1次同次関数)

$$\frac{\partial \mathbf{U}'}{\partial t} = \mathbf{S}(\mathbf{U}') = \mathbf{A}' \mathbf{U}', \quad \mathbf{A}' \equiv \frac{\partial \mathbf{S}}{\partial \mathbf{U}'}$$

$$\mathbf{U}' = (\mathbf{p}_i, \mathbf{p}_e, \mathbf{E})^T$$

$$\mathbf{S} = d_i^{-1} (n_i \mathbf{E} + \mathbf{p}_i \times \mathbf{B}, -M (n_e \mathbf{E} + \mathbf{p}_e \times \mathbf{B}), -c^2 (\mathbf{p}_i - \mathbf{p}_e))^T$$



線形双曲型釣合則

□ 振動型生成項を含む線形双曲型釣合則

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} + a \frac{\partial u}{\partial x} = -\omega v \\ \frac{\partial v}{\partial x} + a \frac{\partial v}{\partial x} = \omega u \end{cases}$$

$$\iff \frac{\partial}{\partial t} \mathbf{u} + \frac{\partial}{\partial x} (a\mathbf{u}) = (0, 0, \omega) \times \mathbf{u}$$

静磁場中の線形移流方程式

■ 完全二流体方程式の簡易モデル方程式



線形双曲型釣合則

□ 振動型生成項を含む線形双曲型釣合則

$$\frac{\partial}{\partial t} U + A \frac{\partial}{\partial x} U = A' U$$

$$U = \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}, A = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & a \end{pmatrix}, A' = \begin{pmatrix} 0 & -\omega \\ \omega & 0 \end{pmatrix}$$

■ 固有値・固有ベクトル

$$AR = R\Lambda, \Lambda = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & a \end{pmatrix}, R = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$A'R' = R'\Lambda', \Lambda' = \begin{pmatrix} -i\omega & 0 \\ 0 & i\omega \end{pmatrix}, R' = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ i & -i \end{pmatrix}$$

■ 一般解

$$\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \omega t & -\sin \omega t \\ \sin \omega t & \cos \omega t \end{pmatrix} \begin{pmatrix} F(x - at) \\ G(x - at) \end{pmatrix}$$



数値解法

□ 高次精度解法

- WENO5 (またはWENO3) [Jiang+, 1999]

□ 時間積分法

- SSP RK法 [Gottlieb+, 2001]

- SSP3

- PIRK法 [Codero-Carrion+, 2016]

- PIRK3a

- IMEX法 [Pareschi+, 2005]

- IMEX-SSP3(4,3,3)

- IMEX-SSP3(3,3,2)



数値実験

□ パラメータ

$$a = 1.0 \quad \omega = \frac{2\pi}{0.01} \quad x \in [0,1] \quad N = 50, 100, 150, 200$$

□ 初期条件

$$\begin{cases} u(t = 0, x) = \exp \left[- \left(\frac{x - 0.5}{0.1} \right)^2 \right] \\ v(t = 0, x) = 0 \end{cases}$$

□ 時間刻み

$$\Delta t = \min(\Delta t_{adv.}, \Delta t_{osc.})$$

$$\Delta t_{adv.} = \frac{\Delta x}{a} \times C \quad \Delta t_{osc.} = \frac{2\pi}{\omega} \times C_1$$

$$C = 0.5$$

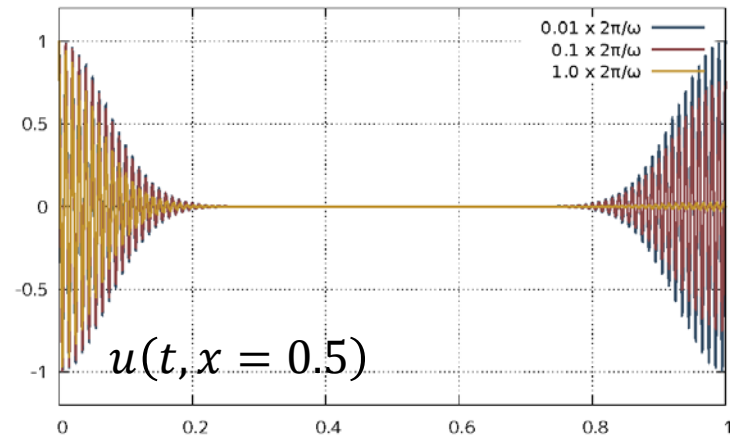
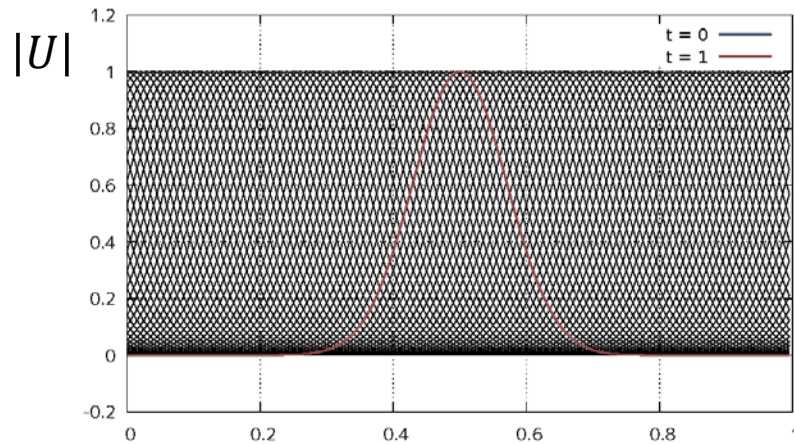
$$C_1 = 0.01, 0.1, 1.0$$



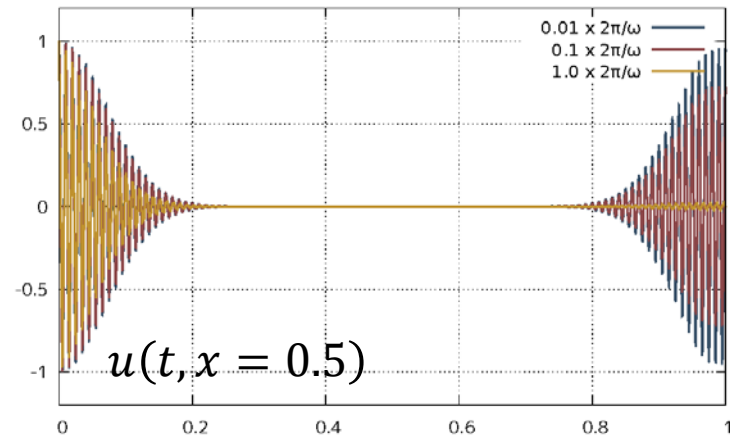
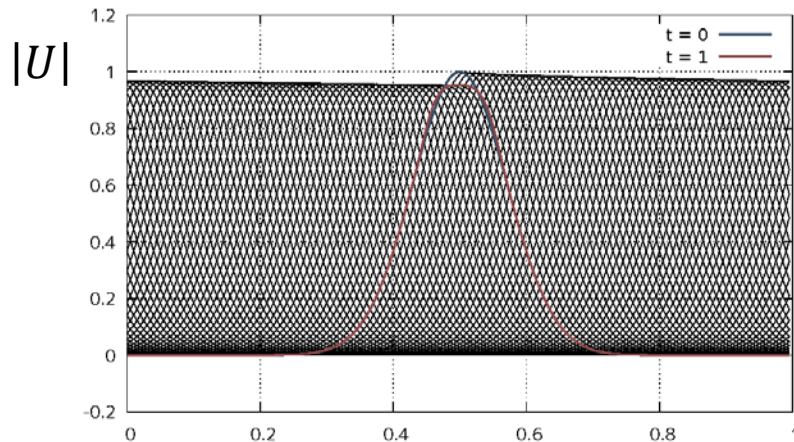
数値実験

□ 数値流束の依存性 (IMEX-SSP3(4,3,3), $N = 200$)

WENO5



WENO3

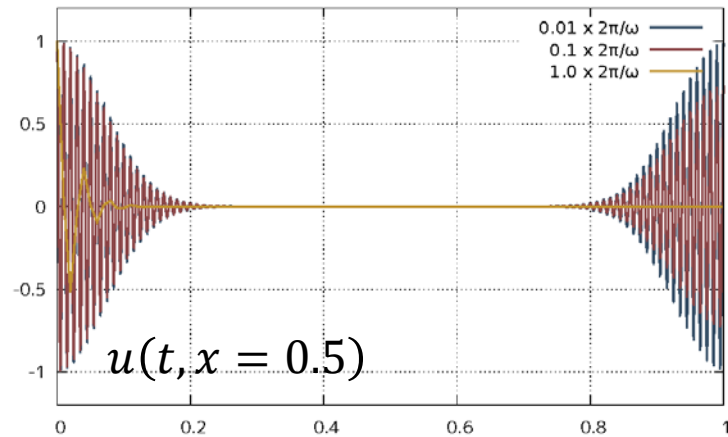
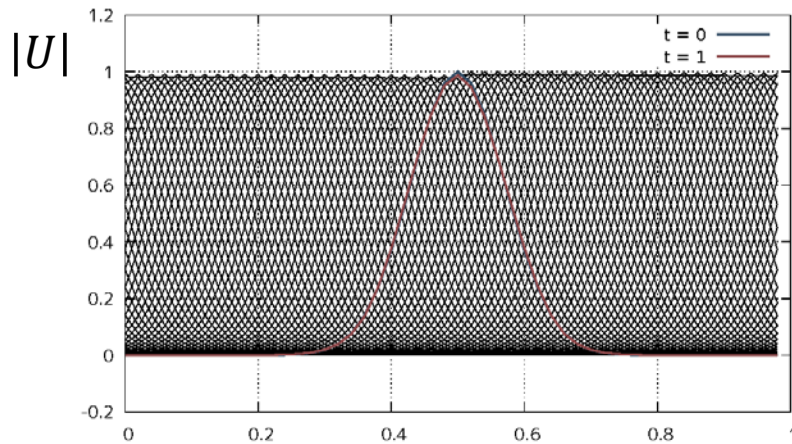




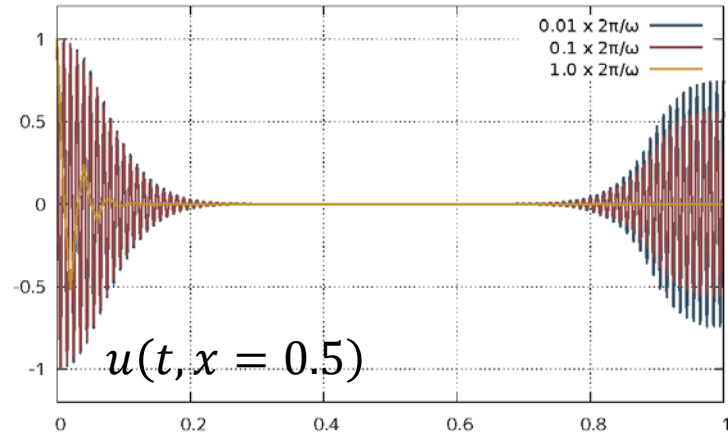
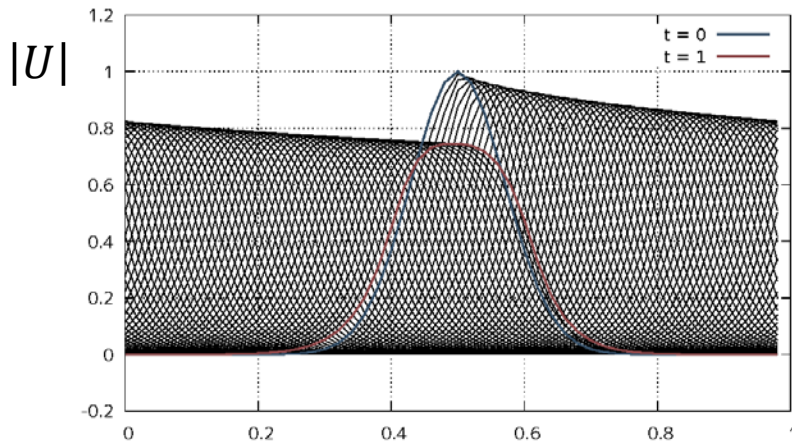
数値実験

□ 数値流束の依存性 (IMEX-SSP3(4,3,3), $N = 50$)

WENO5



WENO3

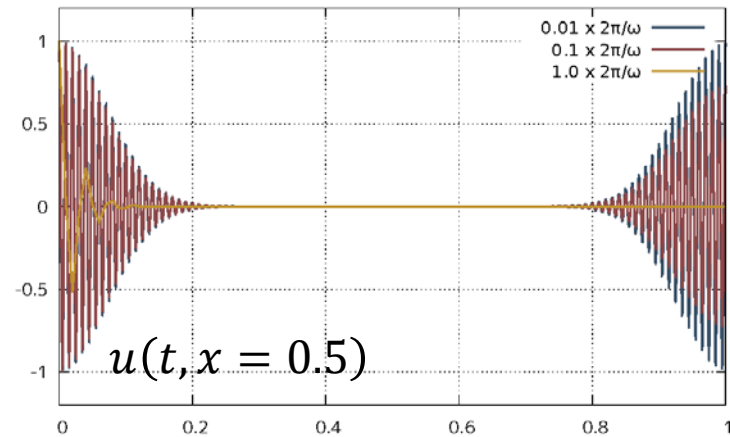
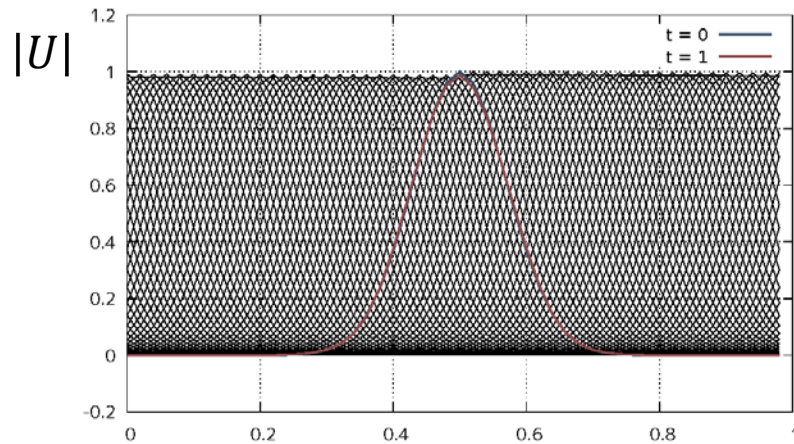




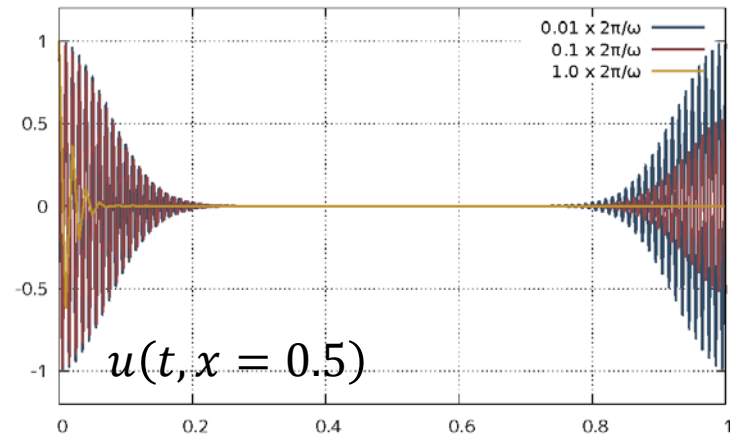
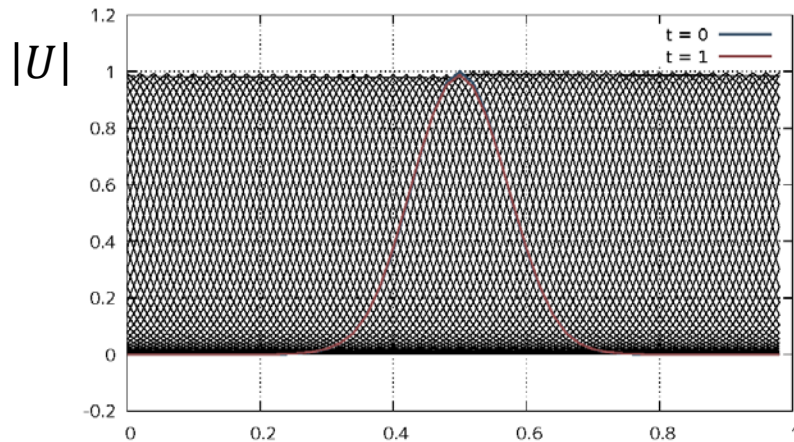
数値実験

□ 時間積分の依存性 ($C_1 = 0.01$, $N = 50$)

IMEX-SSP3(4,3,3)



IMEX-SSP3(3,3,2)

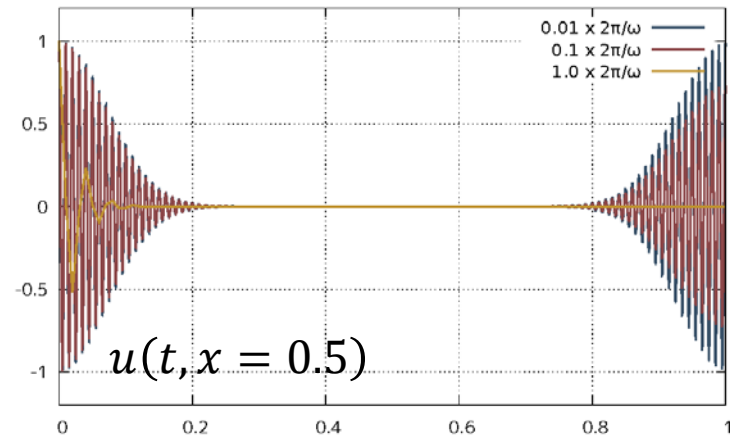
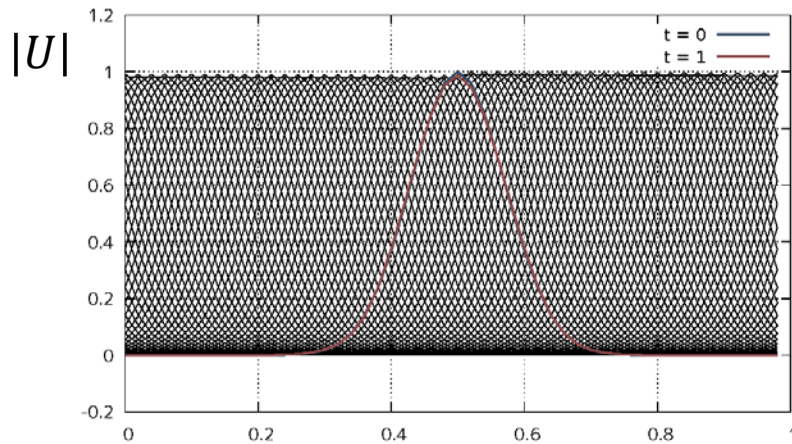




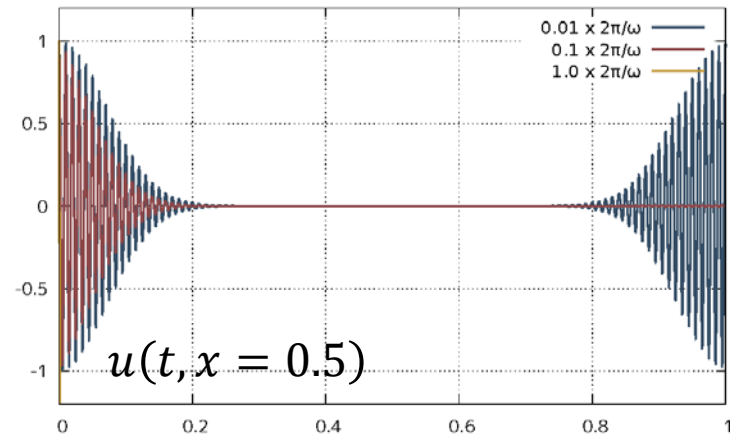
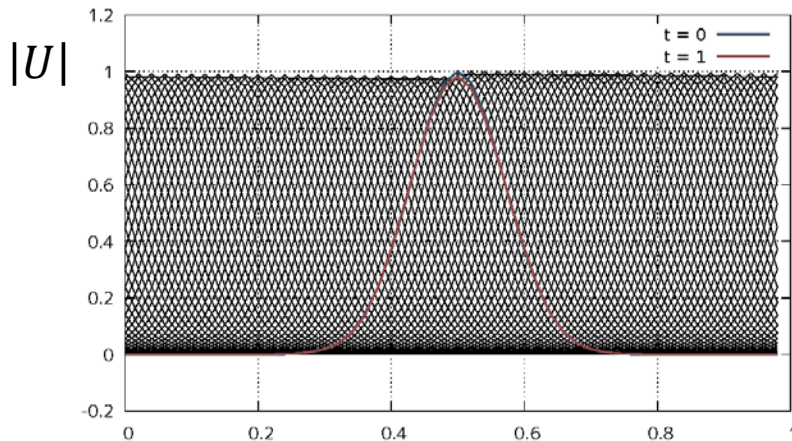
数値実験

□ 時間積分の依存性 ($C_1 = 0.01, N = 50$)

IMEX-SSP3(4,3,3)



SSP3

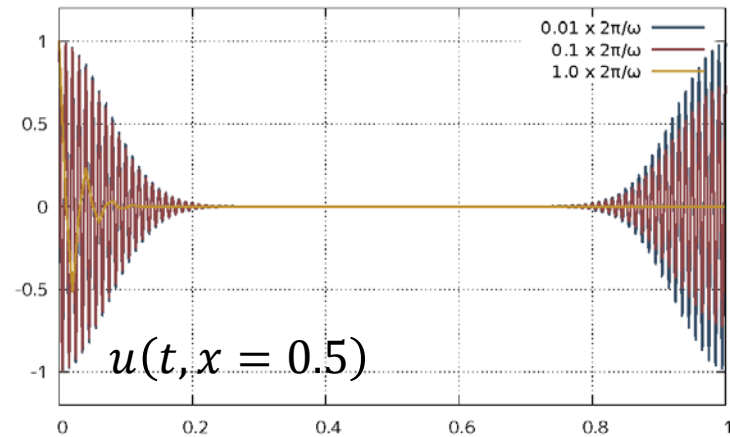
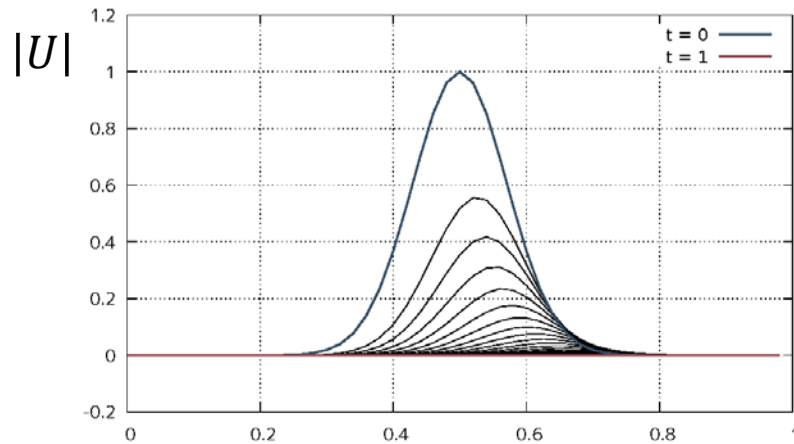




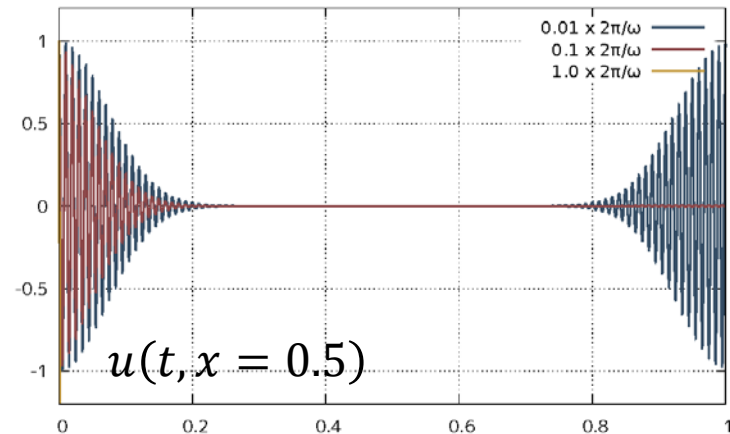
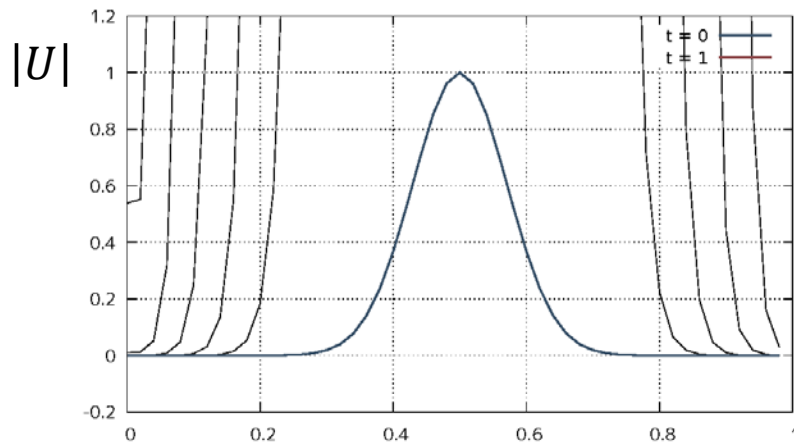
数値実験

□ 時間積分の依存性 ($C_1 = 1.0, N = 50$)

IMEX-SSP3(4,3,3)



SSP3

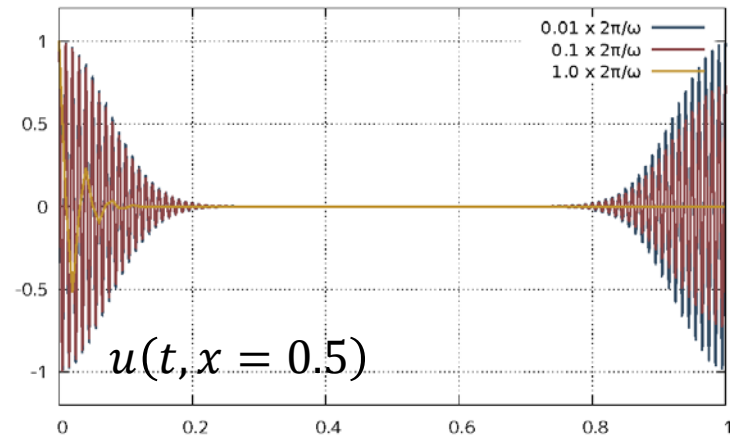
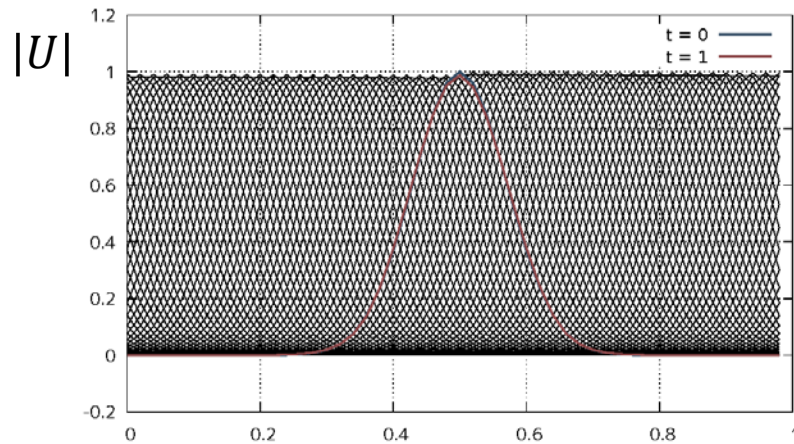




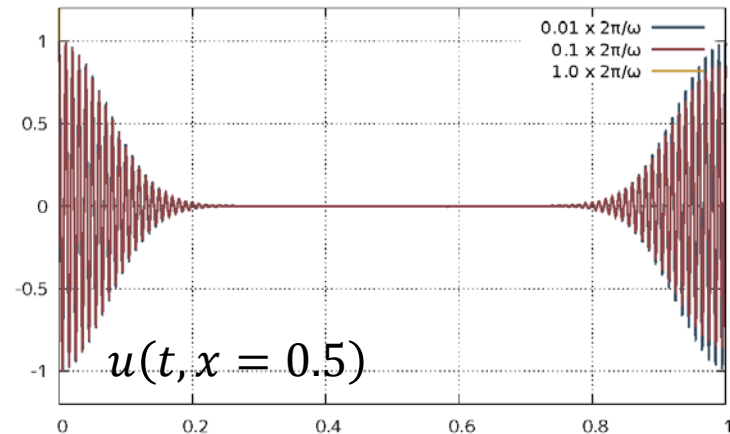
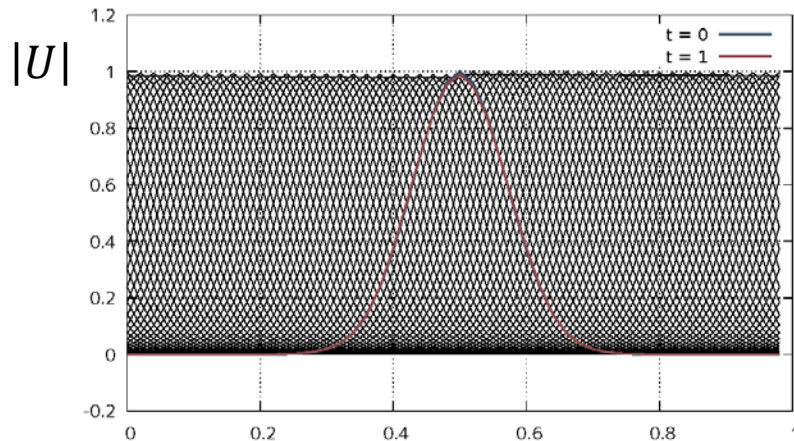
数値実験

□ 時間積分の依存性 ($C_1 = 0.01$, $N = 50$)

IMEX-SSP3(4,3,3)



PIRK3a

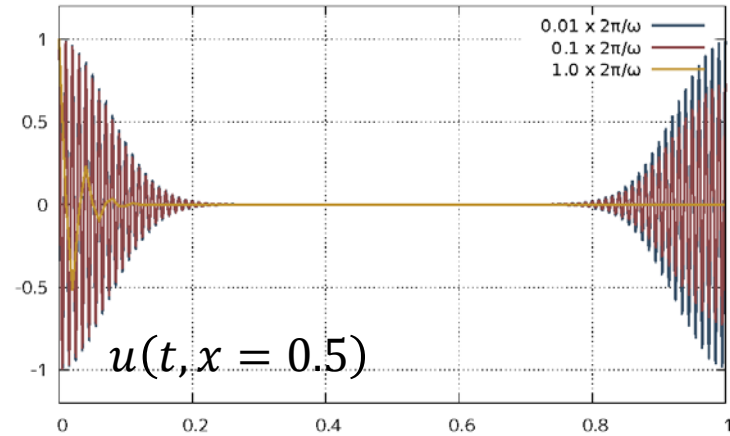
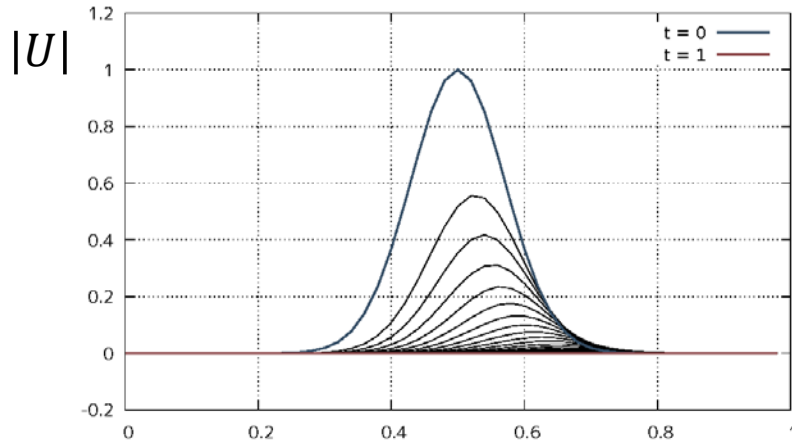




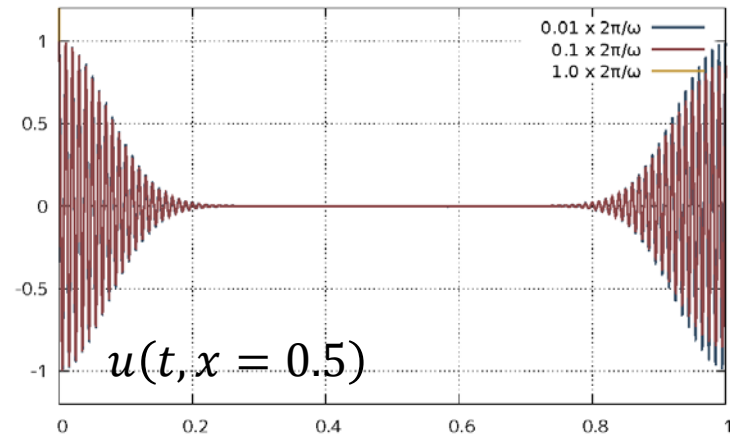
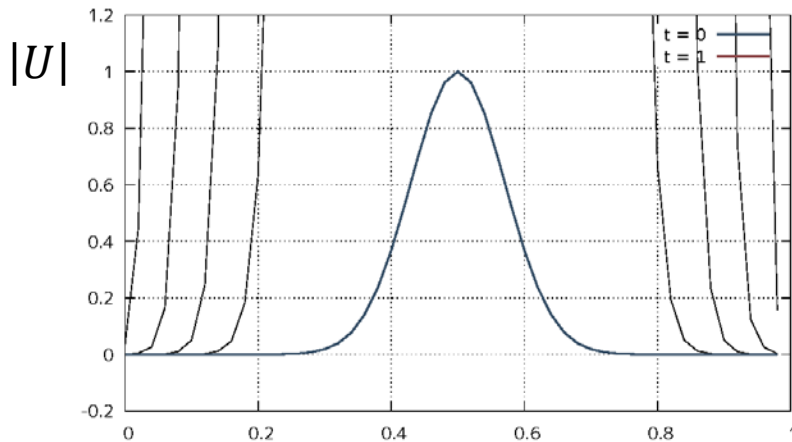
数値実験

□ 時間積分の依存性 ($C_1 = 1.0, N = 50$)

IMEX-SSP3(4,3,3)



PIRK3a

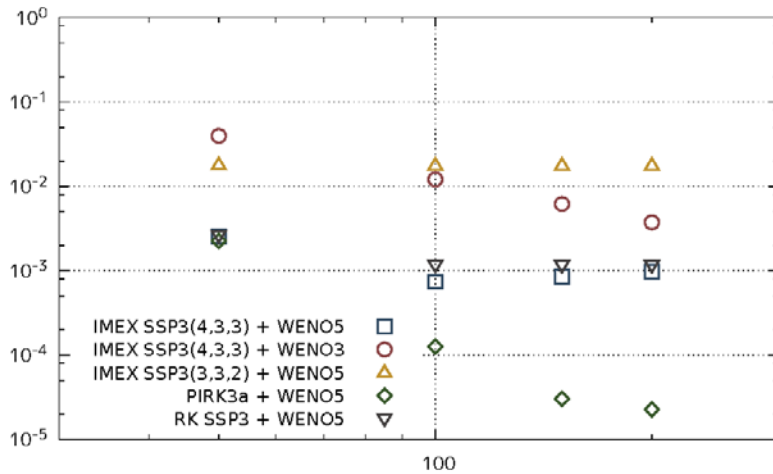




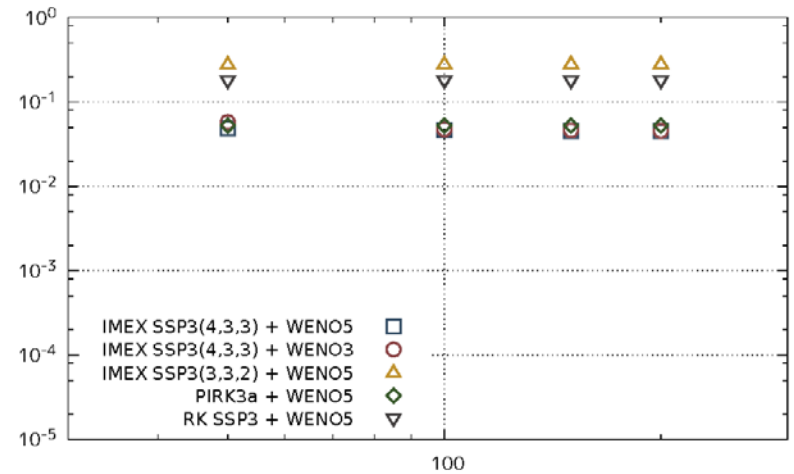
数値実験

誤差評価

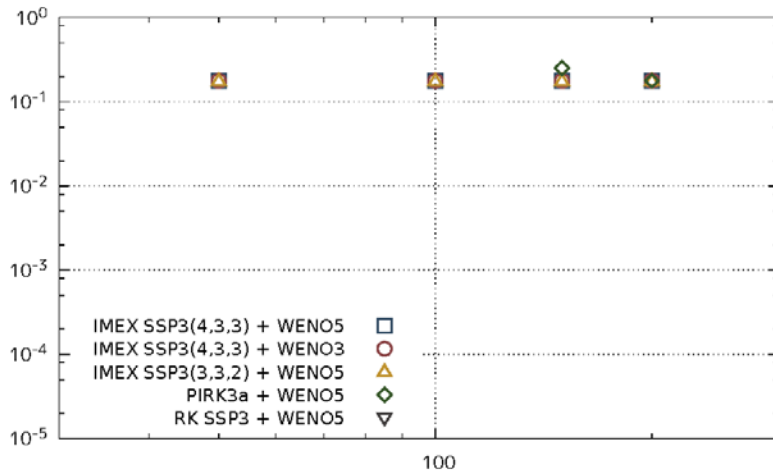
$C_1 = 0.01$



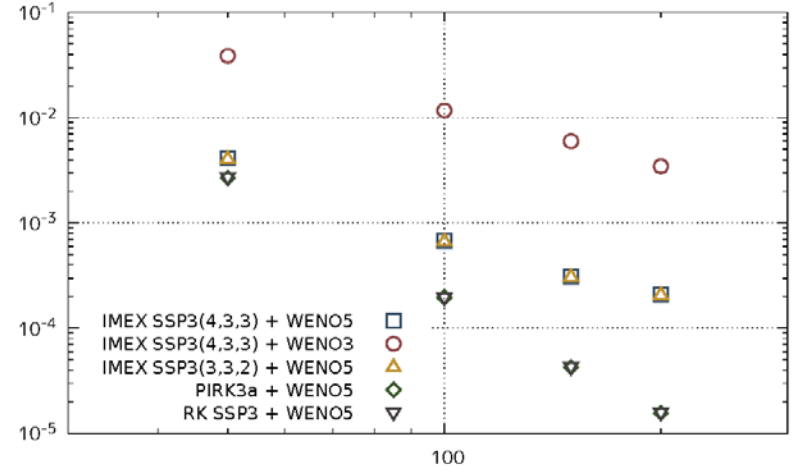
$C_1 = 0.1$



$C_1 = 1.0$



$\omega = 0.0$





まとめ

- 振動型の生成項を持つ双曲型釣合則の高次精度衝撃波捕獲法について比較数値実験を行った。

空間微分: WENO5

時間積分: SSP3, PIRK3a, IMEX-SSP3(4,3,3), (3,3,2)

- 誤差は空間微分法と時間積分法に強く依存
- 移流方程式については、PIRK3a = SSP3, IMEX-SSP3(4,3,3), IMEX-SSP3(3,3,2)の順に高精度
- 時間刻みが大きいとき、SSP3, PIRK3aは不安定
- 時間刻みが大きいとき、IMEX-SSP3は減衰
高周波成分を正確に解くことは目的ではない