



このたびは北海道支部創立60周年
での記念講演、
ありがとうございました。
林さん曰く
「怪しい気象学をやりたい」
したがって、今日は
「怪しい気象学の話」
をします（が、私はいつも怪しいわ
けではありません）



位相幾何学を用いた 温帯低気圧追跡法

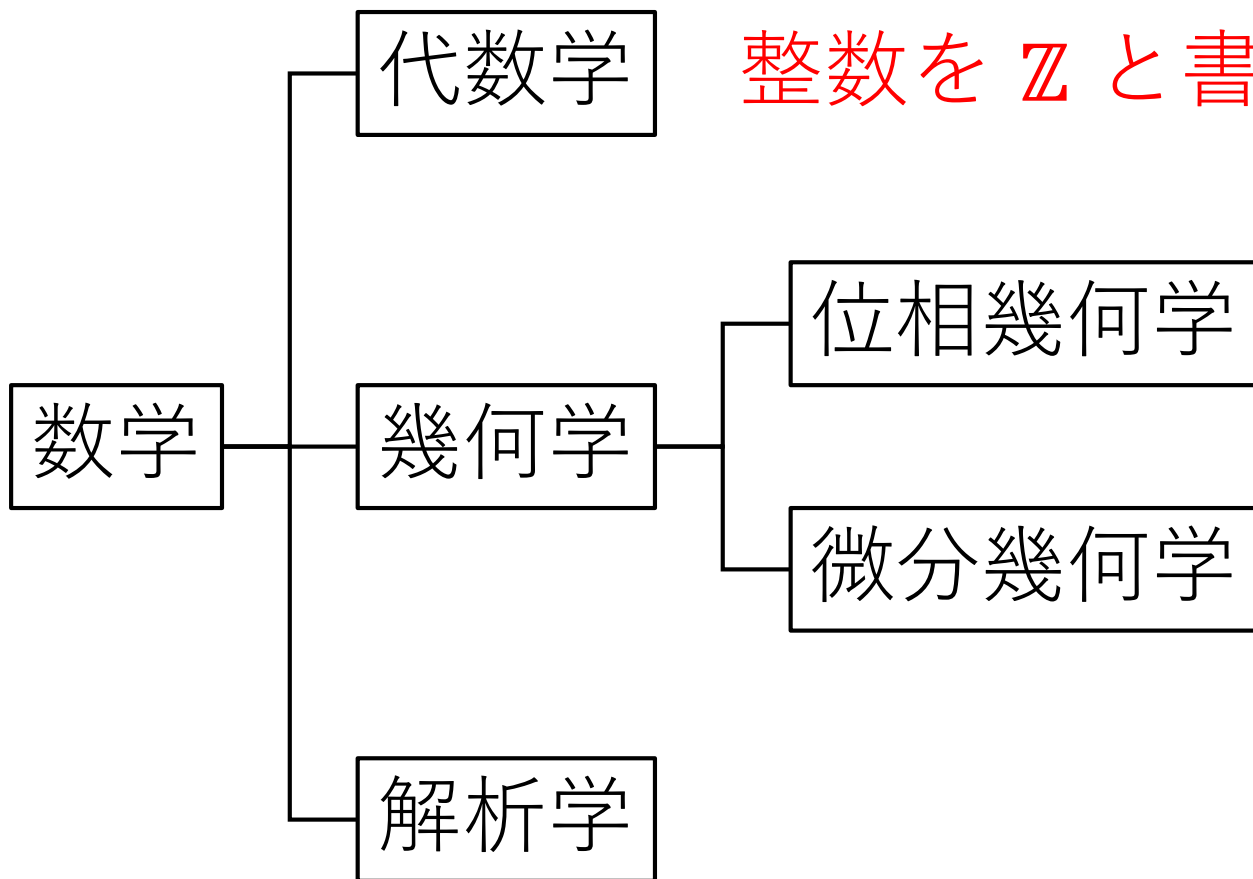
稲津 將・加藤颯人・勝山祐太（北海道大学）
平岡裕章・大林一平（東北大学）

目次

1. 位相幾何学入門
2. パーシステント・ホモロジー (PH) とその表現
3. 低気圧トラッキングの歴史
4. 位相幾何学を用いた低気圧トラッキング

1. 位相幾何学入門

位相幾何学 (= トポロジー) とは？

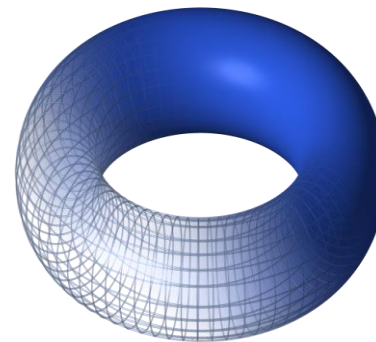


整数を \mathbb{Z} と書きます



幾何不変量
(穴1つ)

<http://haradonuts.jp/menu.html>



局所座標系
(~ベクトル解析)

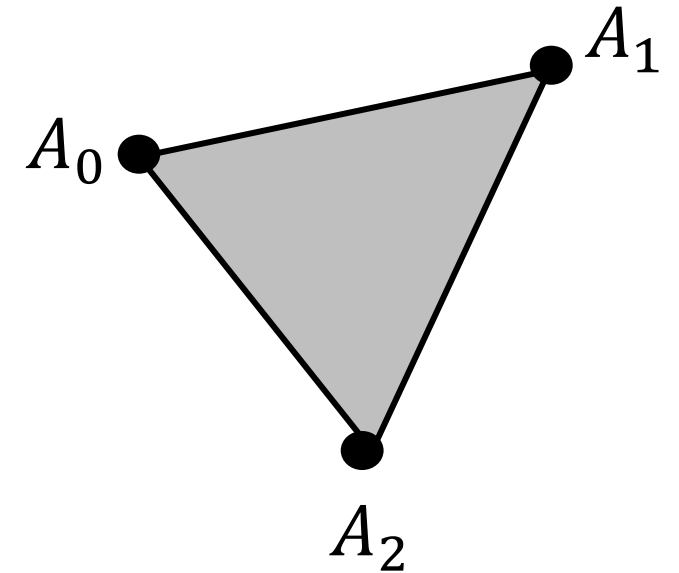
<https://upload.wikimedia.org/wikipedia/commons/1/17/Torus.png>

図形の部品（単体）とその集合（単体複体）

単体(simplex)は図形の部品

- 頂点（0 単体） $|A_0|, |A_1|, |A_2|$
- 辺（1 単体） $|A_0A_1|, |A_1A_2|, |A_2A_0|$
- 三角形の面（2 単体） $|A_0A_1A_2|$

$|*|$ は単体を表わす記号（絶対値ではない）



単体複体(simplicial complex)はこれら部品を束ねたもの

$$K = \{|A_0|, |A_1|, |A_2|, |A_0A_1|, |A_1A_2|, |A_2A_0|, |A_0A_1A_2|\}$$

向き付け単体

- ベクトルで考えれば辺は向き付け可能

$$\langle A_0A_1 \rangle = -\langle A_1A_0 \rangle$$

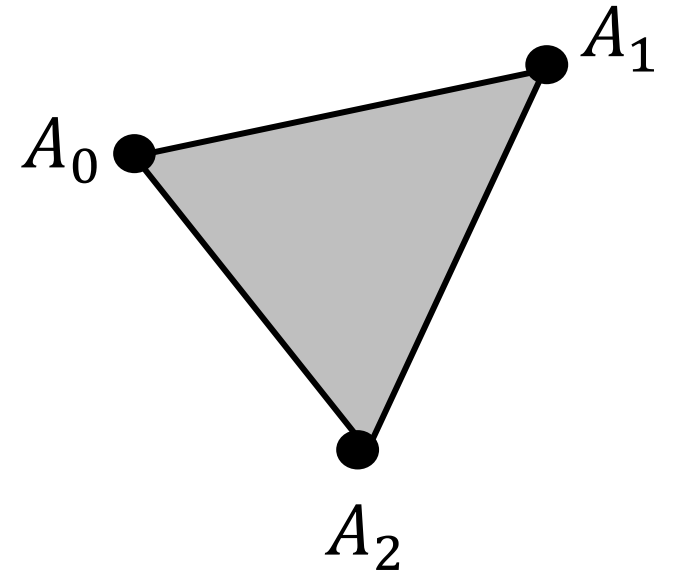
- 回転方向を考えれば面も向き付け可能

$$\langle A_0A_1A_2 \rangle = -\langle A_0A_2A_1 \rangle$$

- 置換群の符号により **すべての単体は向き付け可能**

$$\langle A_{\sigma(0)}A_{\sigma(1)}A_{\sigma(2)} \rangle = \text{sgn } \sigma \langle A_0A_1A_2 \rangle$$

$\langle * \rangle$ は向き付け単体を表わす記号



鎖群(chain group)

鎖群とは向き付け n 単体の自由加群

- 単体複体 K に対する **0 鎖群** (頂点の足し算)

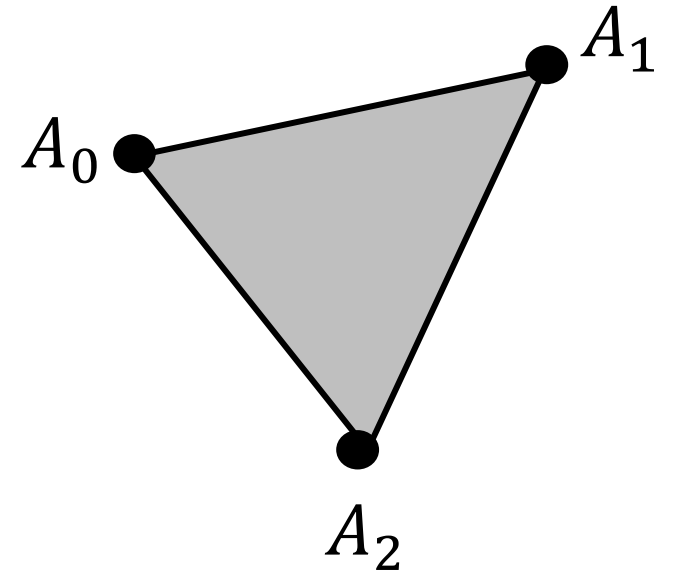
$$C_0(K) = n_0\langle A_0 \rangle + n_1\langle A_1 \rangle + n_2\langle A_2 \rangle$$

- 単体複体 K に対する **1 鎖群** (辺の足し算)

$$C_1(K) = m_0\langle A_1A_2 \rangle + m_1\langle A_2A_0 \rangle + m_2\langle A_0A_1 \rangle$$

- 単体複体 K に対する **2 鎖群** (面の足し算)

$$C_2(K) = l\langle A_0A_1A_2 \rangle$$



境界作用素 (boundary operator)

境界作用素 ∂_n とは n 鎖群から $n - 1$ 鎖群への写像

- 境界作用素 ∂_1 の演算法 (辺 \rightarrow 頂点)

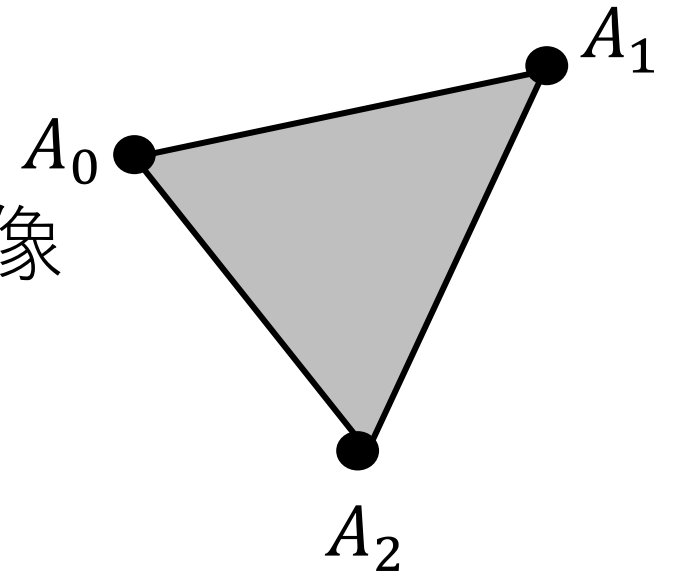
$$\partial_1 \langle A_1 A_2 \rangle = \langle A_2 \rangle - \langle A_1 \rangle$$

- 境界作用素 ∂_2 の演算法 (面 \rightarrow 辺)

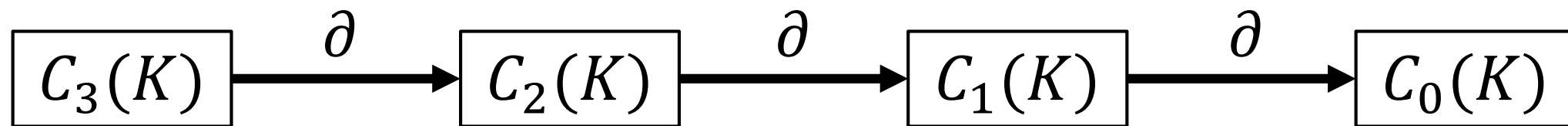
$$\begin{aligned} \partial_2 \langle A_0 A_1 A_2 \rangle &= \langle A_1 A_2 \rangle - \langle A_0 A_2 \rangle + \langle A_0 A_1 \rangle \\ &= \langle A_1 A_2 \rangle + \langle A_2 A_0 \rangle + \langle A_0 A_1 \rangle \end{aligned}$$

境界作用素の性質 $\partial^2 = 0$ (境界の境界はない)

$$\begin{aligned} \partial_1 \partial_2 \langle A_0 A_1 A_2 \rangle &= \partial_1 \langle A_1 A_2 \rangle - \partial_1 \langle A_0 A_2 \rangle + \partial_1 \langle A_0 A_1 \rangle \\ &= \langle A_2 \rangle - \langle A_1 \rangle - \langle A_2 \rangle + \langle A_0 \rangle + \langle A_1 \rangle - \langle A_0 \rangle = 0 \end{aligned}$$



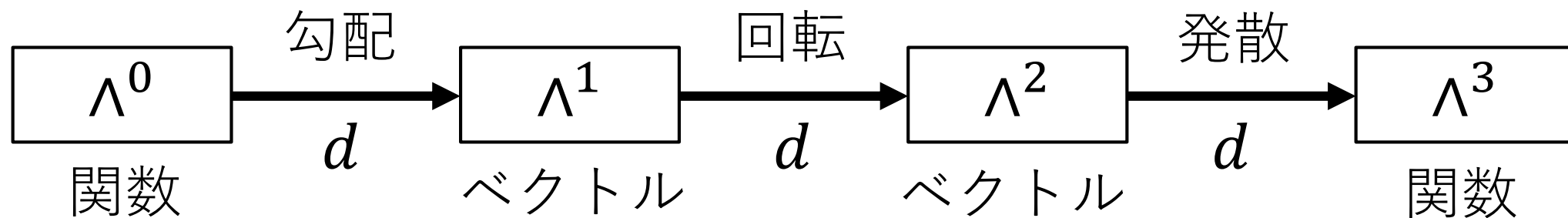
(余談) 境界作用素と外微分作用素の双対関係



グリーンンの定理

(ガウス発散定理 + ストークスの定理)

$$\int_{\Omega} d\omega = \int_{\partial\Omega} \omega$$



ホモロジー群(homology group)

- 輪体 $Z_n = \ker \partial_n C_n(K)$

境界作用素に対し鎖群が 0 となる境界がない図形

- 境界輪体 $B_n = \text{im } \partial_{n+1} C_{n+1}(K)$

1次元高いすべての単体の境界

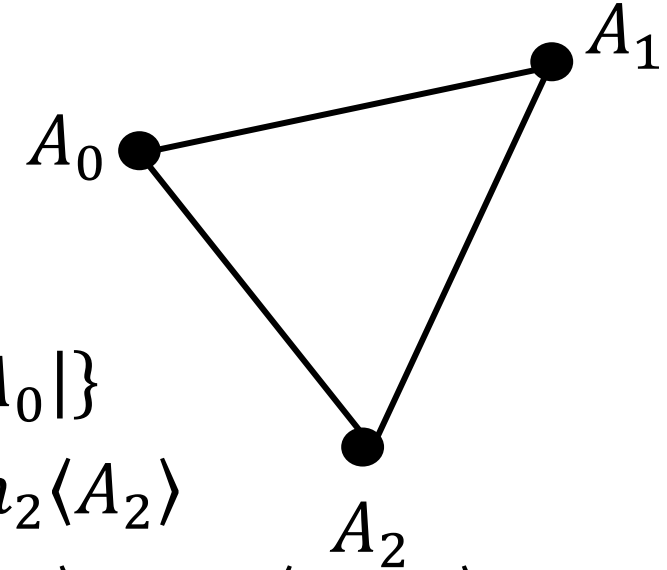
- ホモロジー群は輪体と境界輪体の剰余群

$$H_n = Z_n / B_n$$

- ベッチ数はホモロジー群の次元

$$\beta_n = \dim H_n$$

具体例 (穴の空いた三角形)



- 単体複体(simplicial complex)は

$$K = \{|A_0|, |A_1|, |A_2|, |A_0A_1|, |A_1A_2|, |A_2A_0|\}$$

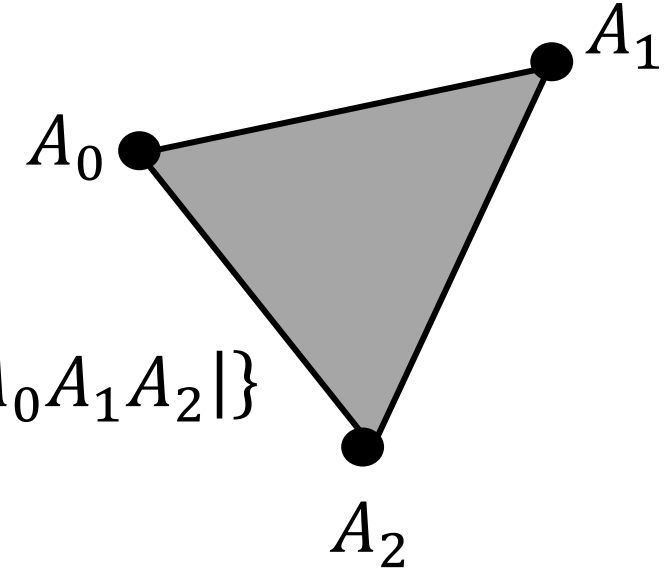
- 単体複体 K に対する 0 鎖群 $C_0(K) = n_0\langle A_0 \rangle + n_1\langle A_1 \rangle + n_2\langle A_2 \rangle$
- 単体複体 K に対する 1 鎖群 $C_1(K) = m_0\langle A_1A_2 \rangle + m_1\langle A_2A_0 \rangle + m_2\langle A_0A_1 \rangle$
 $\partial_1 C_1(K) = (m_1 - m_2)\langle A_0 \rangle + (m_2 - m_0)\langle A_1 \rangle + (m_0 - m_1)\langle A_2 \rangle$
- 輪体は $\partial_1 C_1(K)$ が 0 となる集合、つまり $m_0 = m_1 = m_2$ の場合

$$Z_1(K) = m_0(\langle A_1A_2 \rangle + \langle A_2A_0 \rangle + \langle A_0A_1 \rangle) \simeq \mathbb{Z}$$

同様に $\partial_0 C_0(K) = 0$ より $Z_0(K) \simeq \mathbb{Z}^3$

- 境界輪体は $C_2(K) = 0$ より $B_1(K) = 0$ 、 $\partial_1 C_1(K)$ は $m_0 = m_1 = m_2$ 以外の場合に像があるので $B_0(K) \simeq \mathbb{Z}^2$
- 1 次ホモロジー群 $H_1(K) = Z_1(K)/B_1(K) \simeq \mathbb{Z}$
- 0 次ホモロジー群 $H_0(K) = Z_0(K)/B_0(K) \simeq \mathbb{Z}$

具体例 (穴の空いた三角形)



- 単体複体(simplicial complex)は

$$K = \{|A_0|, |A_1|, |A_2|, |A_0A_1|, |A_1A_2|, |A_2A_0|, |A_0A_1A_2|\}$$

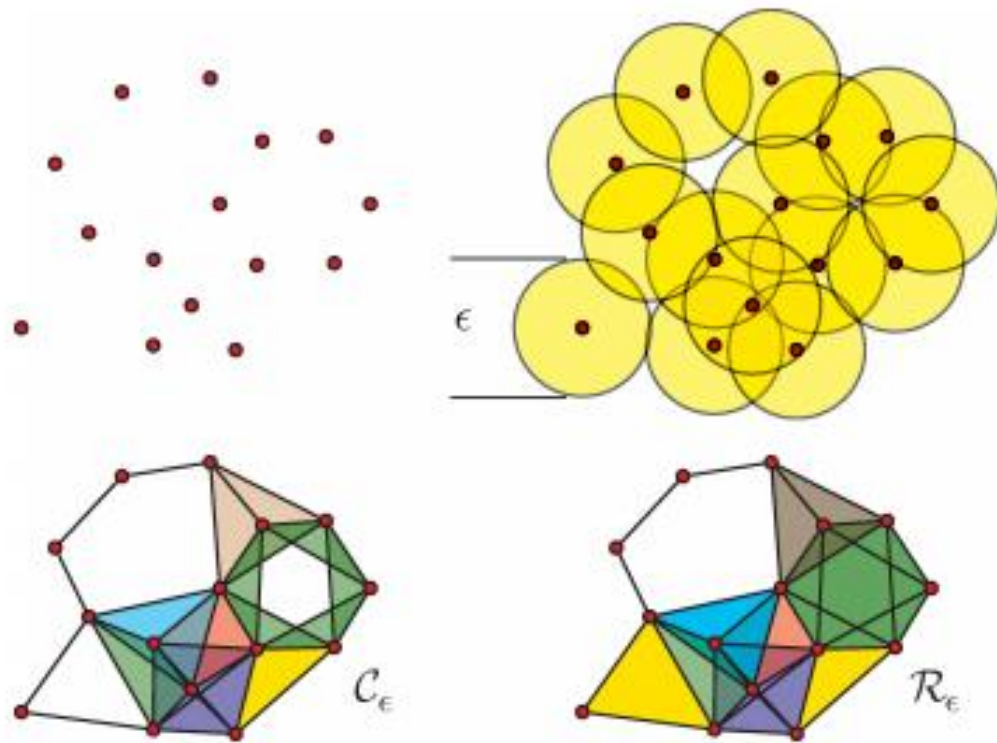
| 意味 | n | 輪体 Z_n | 境界輪体 B_n | ホモロジー群 H_n | ベッチ数 β_n |
|------|-----|----------------|----------------|--------------|----------------|
| 穴 | 1 | \mathbb{Z} | \mathbb{Z} | $\{0\}$ | 0 |
| 連結成分 | 0 | \mathbb{Z}^3 | \mathbb{Z}^2 | \mathbb{Z} | 1 |

2. パーシステント・ホモロジー (PH)とその表現

パーシステント・ホモロジー

データの幾何学的な特徴を捉える手法

- 2次元格子情報に対し、山谷の構造を把握する
- 散布図に対し、分布の特徴を把握する



レベルセット PH

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| 3 | 2 | 1 | 0 | 0 |
| 5 | 3 | 1 | 0 | 2 |
| 4 | 2 | 1 | 4 | 4 |
| 0 | 0 | 2 | 3 | 0 |
| 3 | 3 | 2 | 1 | 0 |

$$l \geq 5, \beta_0 = 1$$

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| 3 | 2 | 1 | 0 | 0 |
| 5 | 3 | 1 | 0 | 2 |
| 4 | 2 | 1 | 4 | 4 |
| 0 | 0 | 2 | 3 | 0 |
| 3 | 3 | 2 | 1 | 0 |

$$l \geq 4, \beta_0 = 2$$

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| 3 | 2 | 1 | 0 | 0 |
| 5 | 3 | 1 | 0 | 2 |
| 4 | 2 | 1 | 4 | 4 |
| 0 | 0 | 2 | 3 | 0 |
| 3 | 3 | 2 | 1 | 0 |

$$l \geq 3, \beta_0 = 3$$

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| 3 | 2 | 1 | 0 | 0 |
| 5 | 3 | 1 | 0 | 2 |
| 4 | 2 | 1 | 4 | 4 |
| 0 | 0 | 2 | 3 | 0 |
| 3 | 3 | 2 | 1 | 0 |

$$l \geq 2, \beta_0 = 2$$

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| 3 | 2 | 1 | 0 | 0 |
| 5 | 3 | 1 | 0 | 2 |
| 4 | 1 | 1 | 4 | 4 |
| 0 | 0 | 2 | 3 | 0 |
| 3 | 3 | 2 | 1 | 0 |

$$l \geq 1, \beta_0 = 1$$

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| 3 | 2 | 1 | 0 | 0 |
| 5 | 3 | 1 | 0 | 2 |
| 4 | 1 | 1 | 4 | 4 |
| 0 | 0 | 2 | 3 | 0 |
| 3 | 3 | 2 | 1 | 0 |

$$l \geq 0, \beta_0 = 1$$

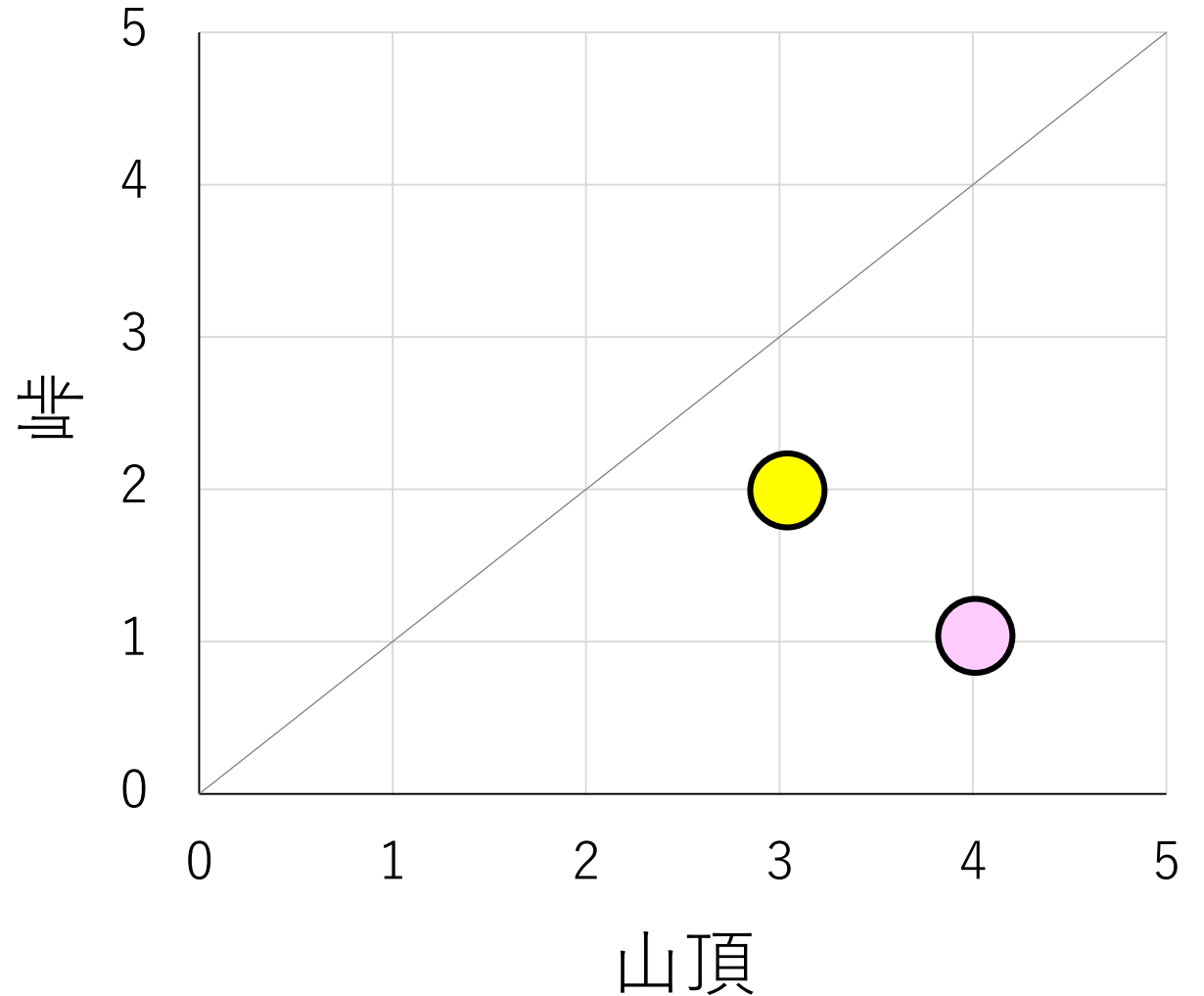
| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| 3 | 2 | 1 | 0 | 0 |
| 5 | 3 | 1 | 0 | 2 |
| 4 | 1 | 1 | 4 | 4 |
| 0 | 0 | 2 | 3 | 0 |
| 3 | 3 | 2 | 1 | 0 |



パーシステント図 (山頂と峠を表わす)

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| 3 | 2 | 1 | 0 | 0 |
| 5 | 3 | 1 | 0 | 2 |
| 4 | 2 | 1 | 4 | 4 |
| 0 | 0 | 2 | 3 | 0 |
| 3 | 3 | 2 | 1 | 0 |

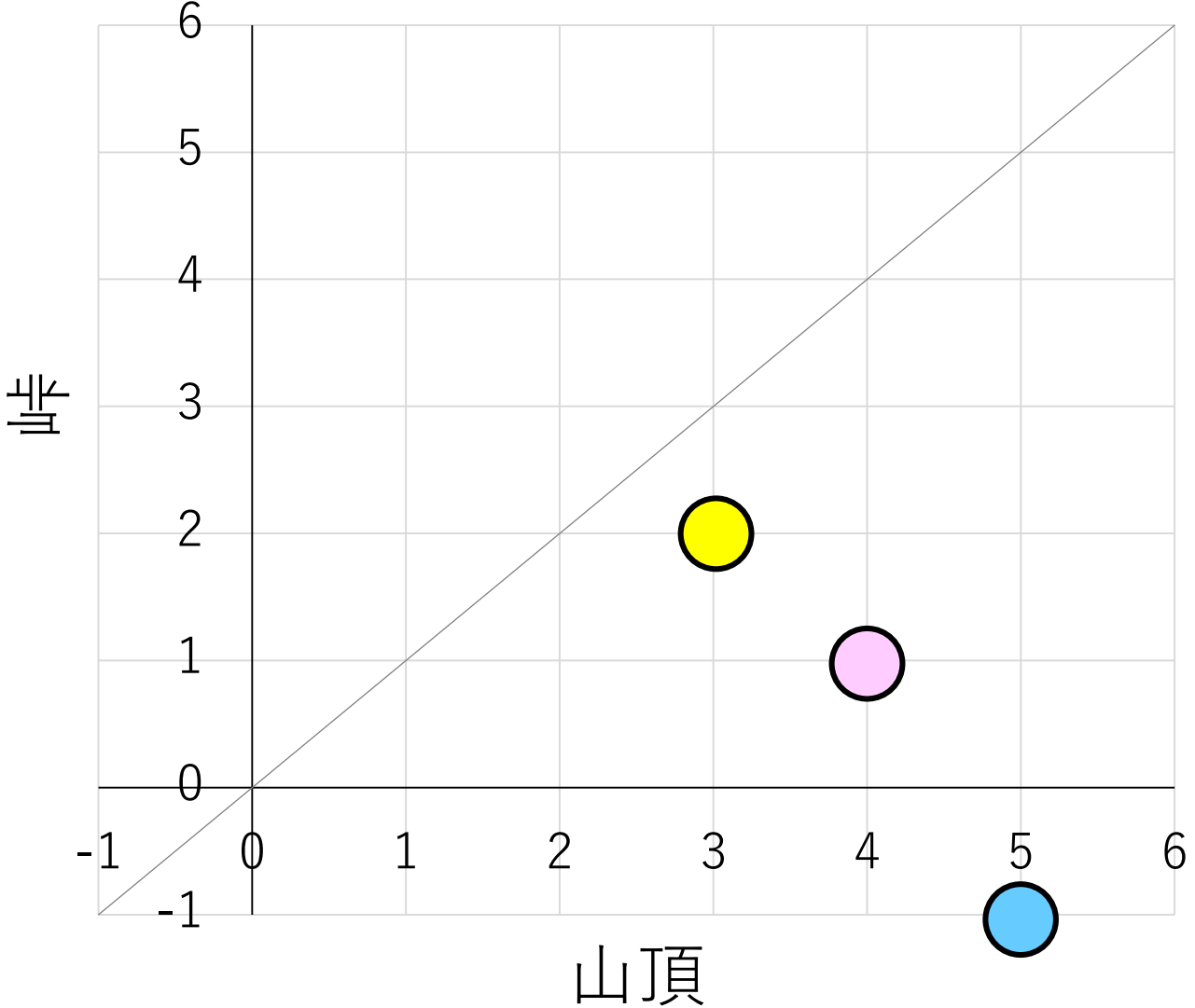
- 5 を山頂にもつ連結領域の峠は存在しない。
- $Y=X$ から遠いほど、頑健な連結領域である (山がはっきりしている)。



ちょっとした工夫

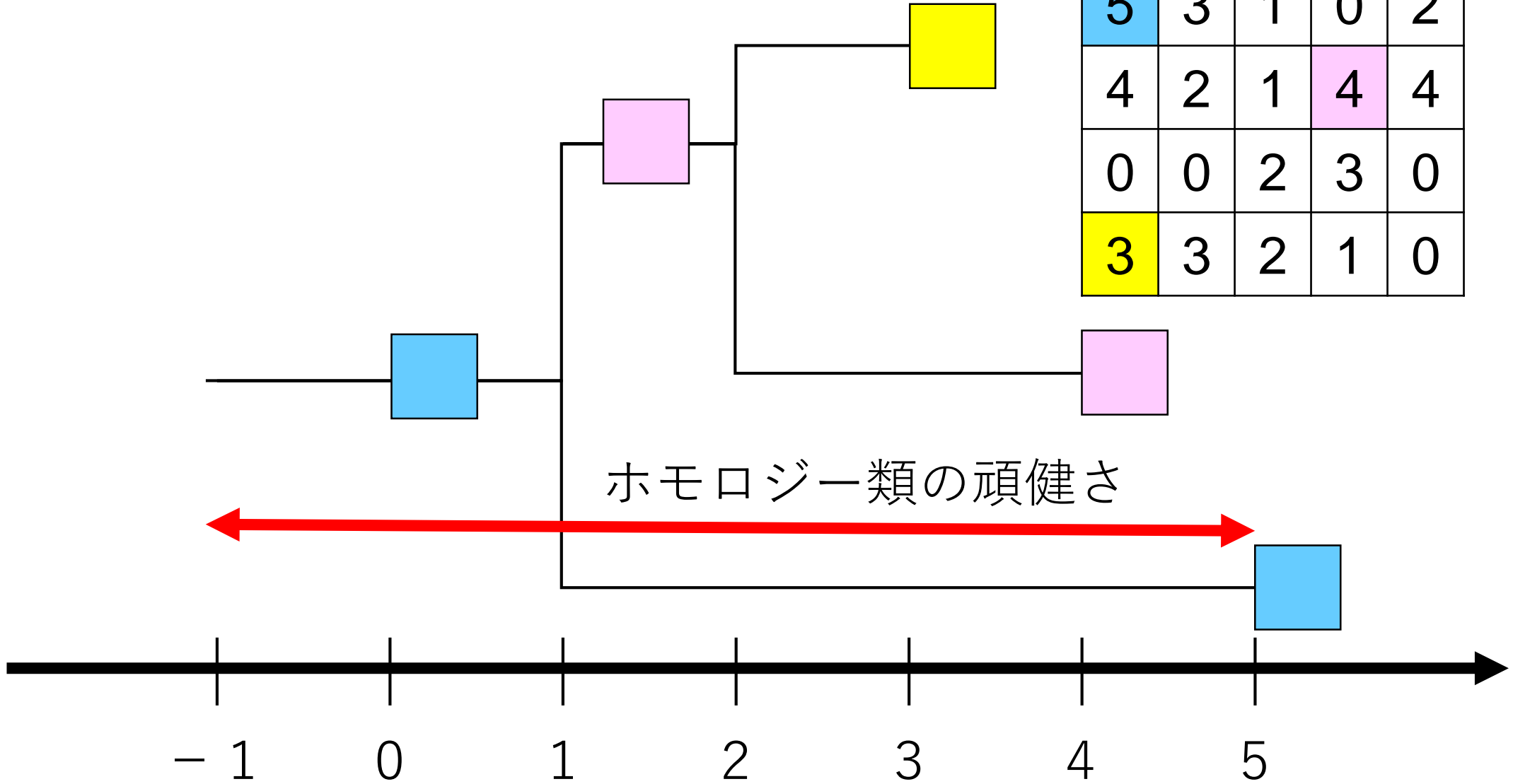
| | | | | | | | | |
|---|----|----|----|----|----|----|----|---|
| 6 | 6 | 6 | 6 | 6 | 6 | 6 | 6 | 6 |
| 6 | -1 | -1 | -1 | -1 | -1 | -1 | -1 | 6 |
| 6 | -1 | 3 | 2 | 1 | 0 | 0 | -1 | 6 |
| 6 | -1 | 5 | 3 | 1 | 0 | 2 | -1 | 6 |
| 6 | -1 | 4 | 2 | 1 | 4 | 4 | -1 | 6 |
| 6 | -1 | 0 | 0 | 2 | 3 | 0 | -1 | 6 |
| 6 | -1 | 3 | 3 | 2 | 1 | 0 | -1 | 6 |
| 6 | -1 | -1 | -1 | -1 | -1 | -1 | -1 | 6 |
| 6 | 6 | 6 | 6 | 6 | 6 | 6 | 6 | 6 |

5を山頂にもつ連結領域の峠を強引に作り出す。



系統樹による表現

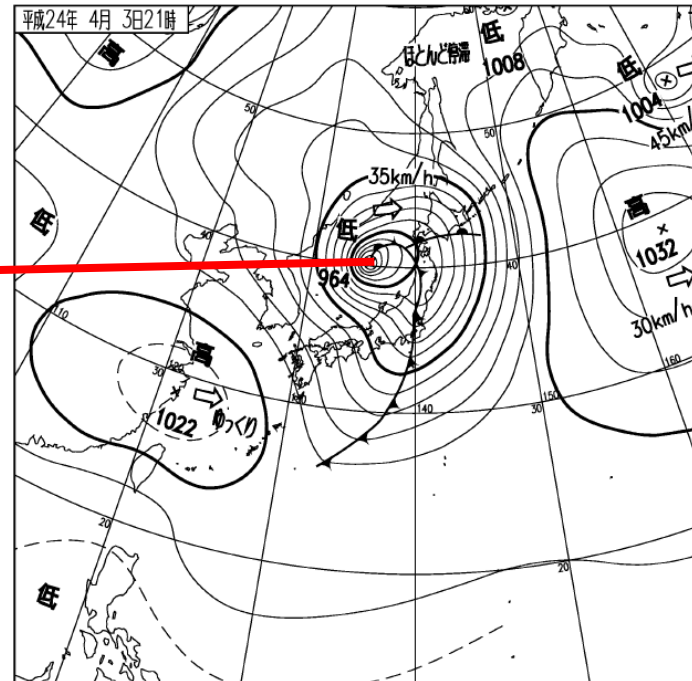
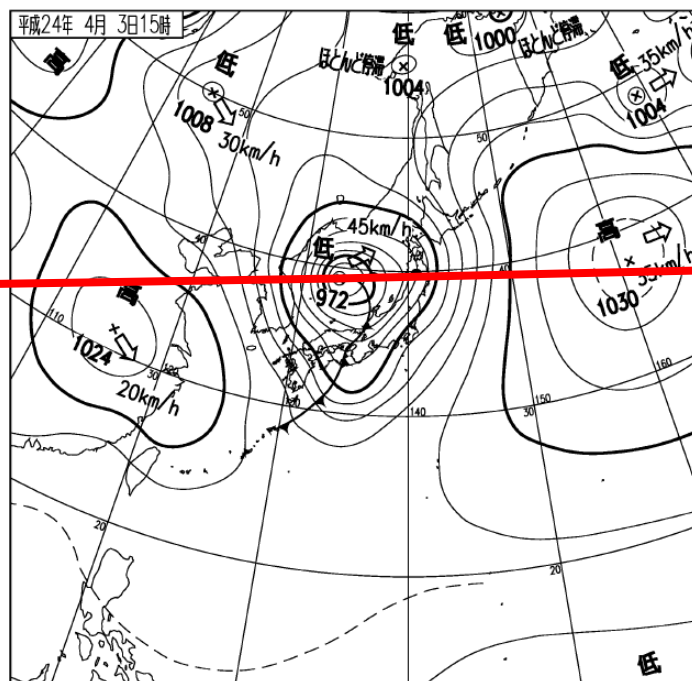
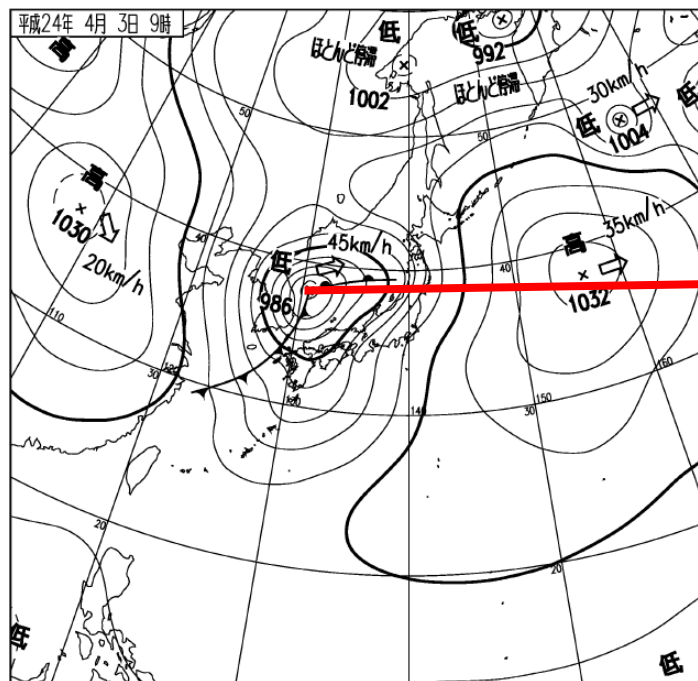
| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| 3 | 2 | 1 | 0 | 0 |
| 5 | 3 | 1 | 0 | 2 |
| 4 | 2 | 1 | 4 | 4 |
| 0 | 0 | 2 | 3 | 0 |
| 3 | 3 | 2 | 1 | 0 |



-1 0 1 2 3 4 5

3. 低気圧トラッキングの歴史

「天気図あそび」

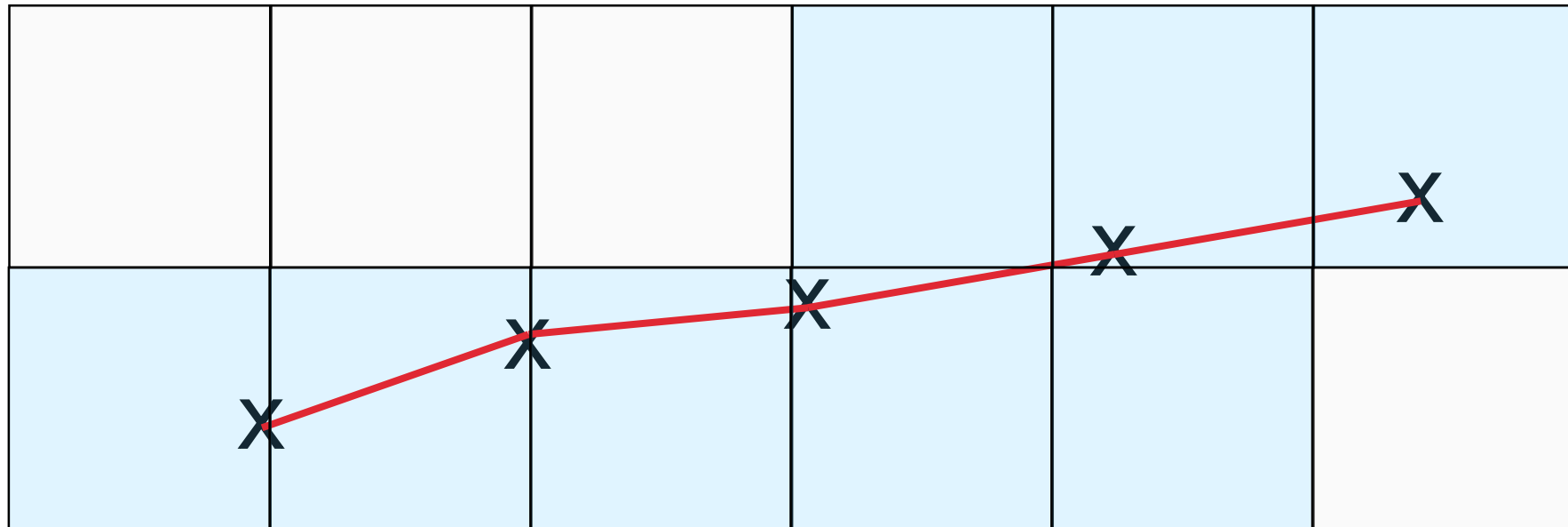


低気圧をつないでみよう！

自動的トラッキング手法

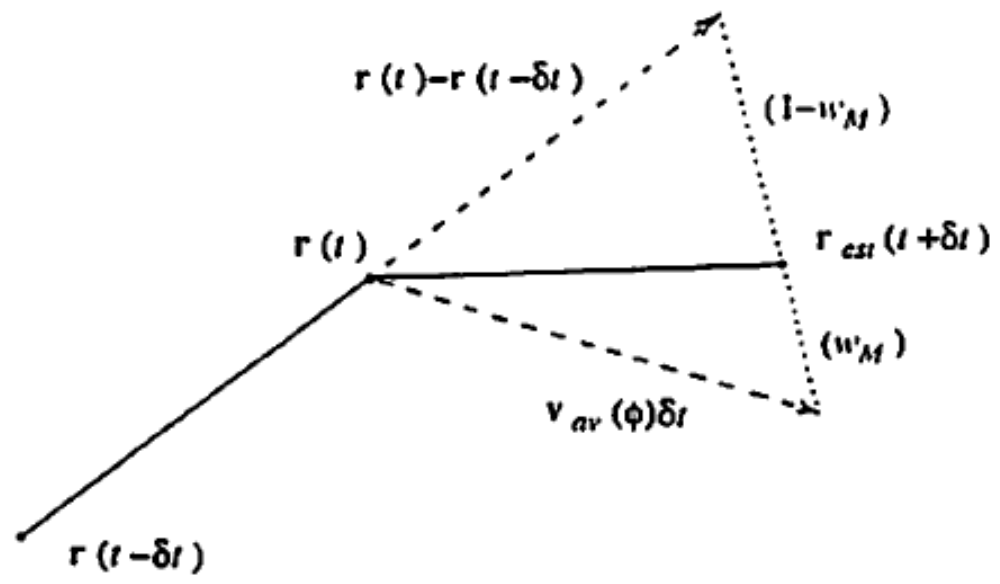
1. 前処理
2. 各天気図で低気圧中心を同定 (cyclone identification)
3. 連続する天気図の低気圧中心を連結 (cyclone tracking)
4. 低気圧軌跡の束を定量化

Ulbrich et al. (2009)

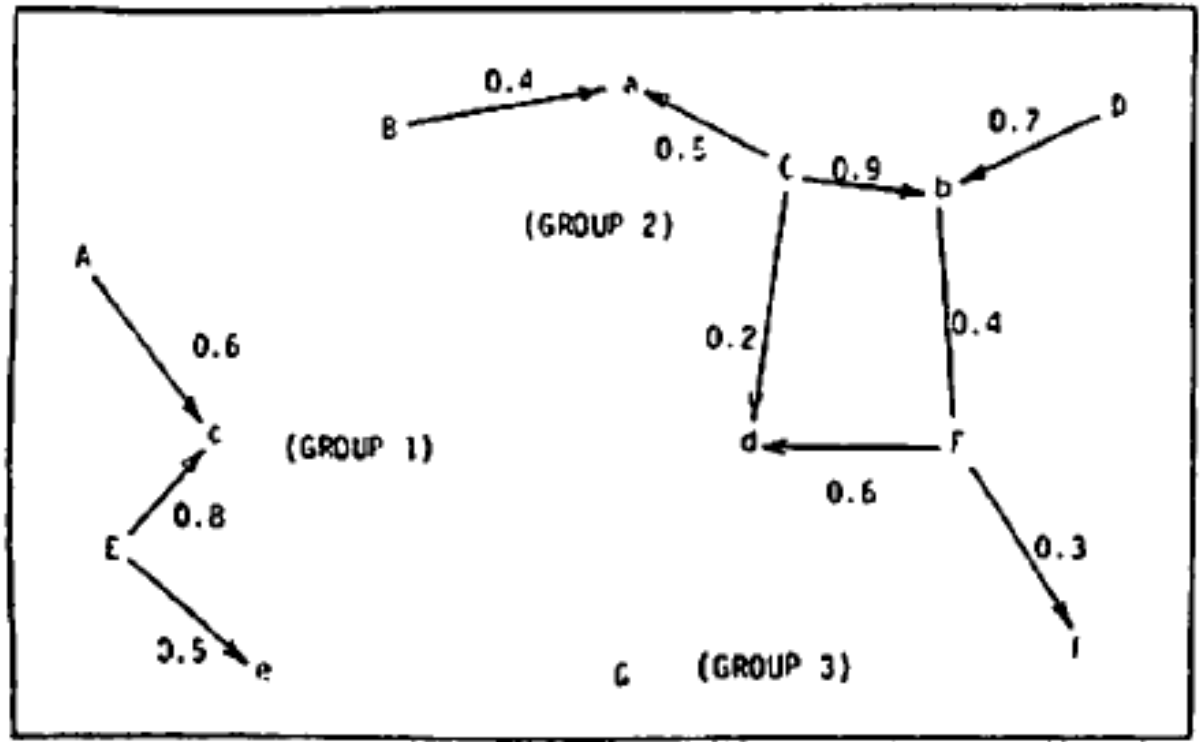


連続する天気図の低気圧中心を連結

等速直線運動と平均運動で中心点を推定し、実際を中心点と比較して、もっともありうる結合を行う。



Murray and Simmons (1991)

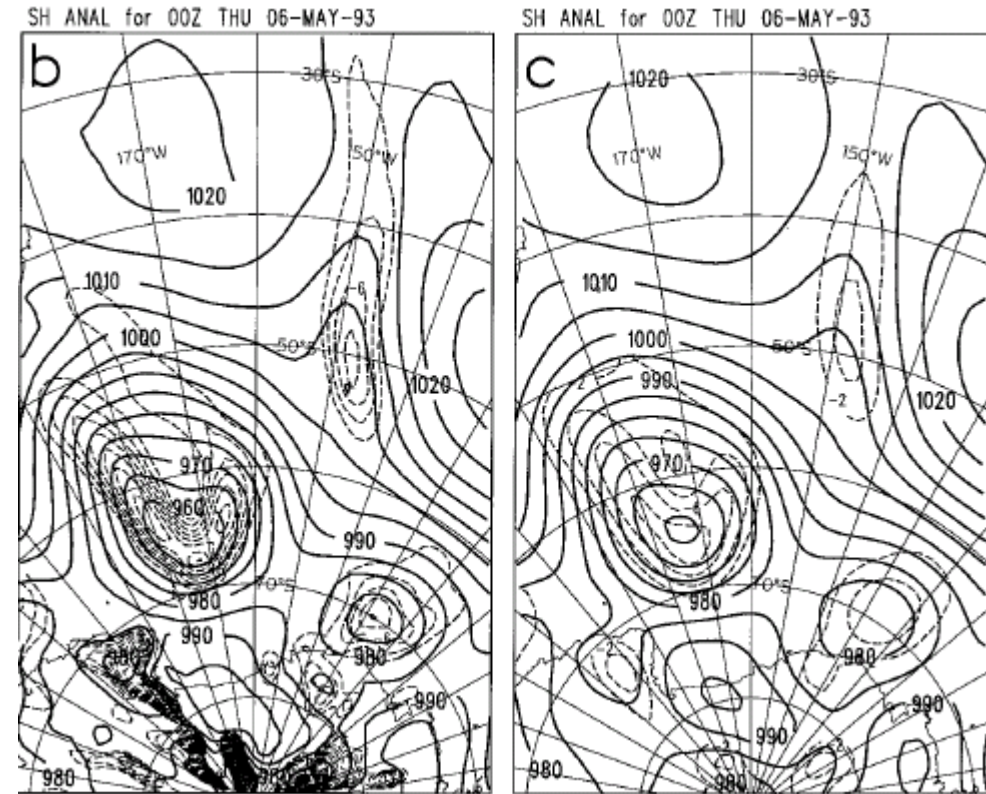


トラッキングにより得られる諸量

- 低気圧トラック密度
- 低気圧生成密度・消滅密度
- 平均移動速度、平均寿命
- 平均強度、平均成長率

従来型トラッキングの問題点

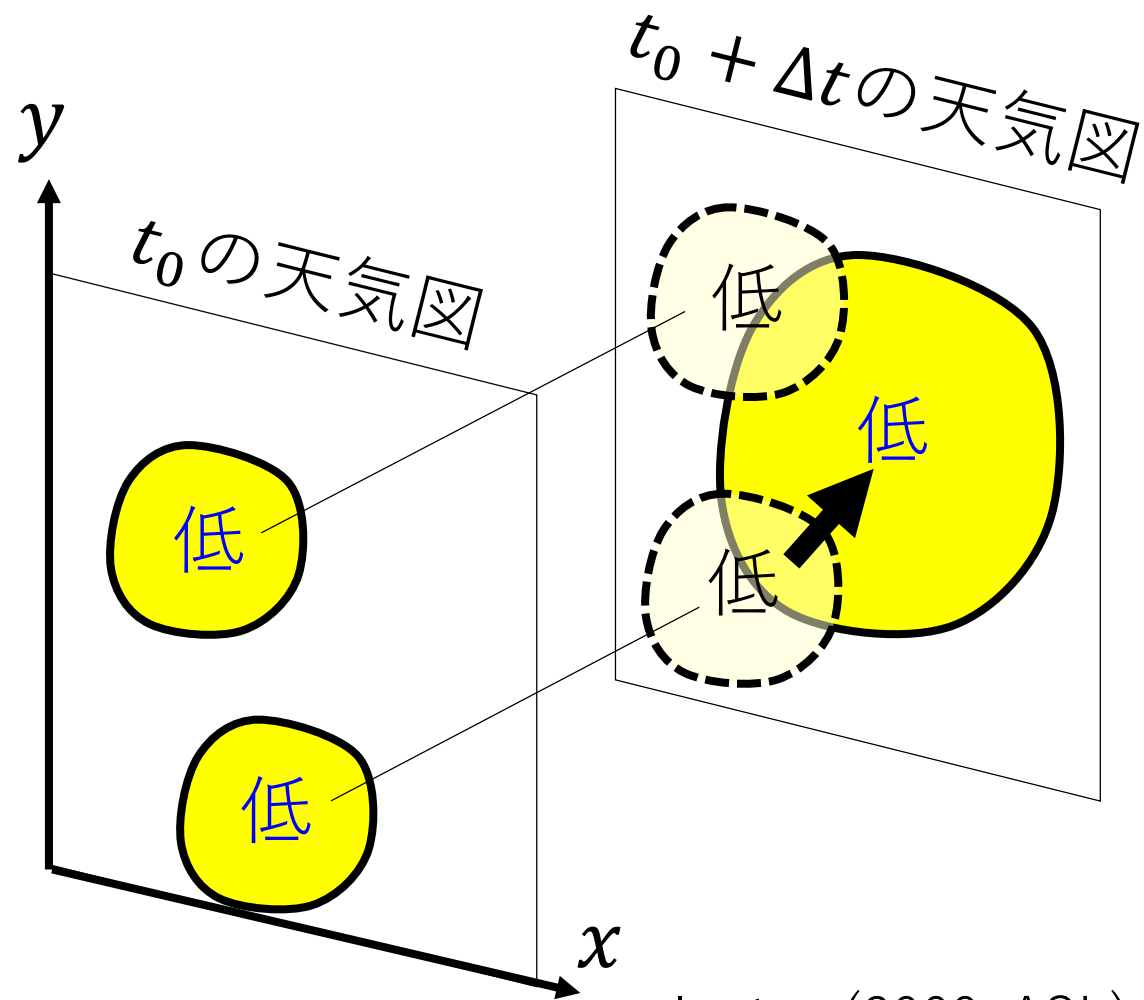
- 解像度バイアスの補正が必要である
- ad hocなパラメーターを含む
- 併合や分裂の評価が難しい
- 渦の幾何形状がわからない



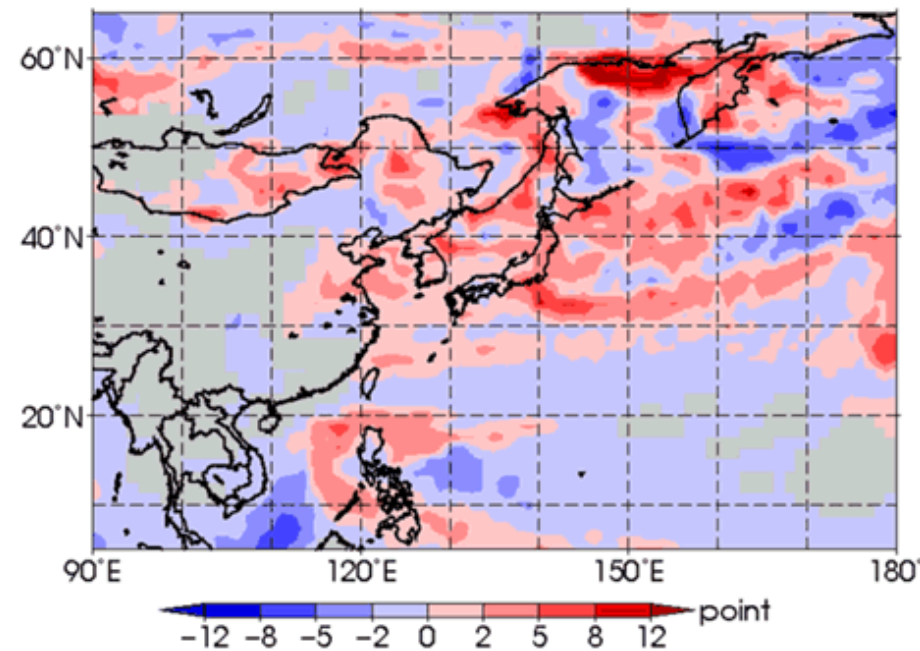
Sinclair (1997)

隣接閉領域追跡法 (NEAT)

- 併合や分離を評価できる
- 幾何形状を同定できる



(気象庁分析ツールに提供)



(国際相互比較プロジェクトに出品)

Inatsu (2009, ASL), Inatsu et al. (2013, JC), Satake et al. (2013, MWR)
Neu et al. (2012, BAMS), Ulbrich et al. (2013, MZ)

<http://recca-hokkaido.sci.hokudai.ac.jp/~inaz/neat/>

```
=====!  
| NEAT1.0 (Neighbor Enclosed Area Tracking Algorithm)  
|   Publication: Inatsu (2009, ASL)  
|   Copyright   : Masaru Inatsu (Hokkaido University)  
|   History     : 12 Nov 2009 Masaru Inatsu  
|=====!
```

```
module qtreenp
```

```
  use qstrutnp, only: qtype
```

```
  implicit none  
  private
```

```
  public:: create_qtreenp  
  public:: build_qtreenp  
  public:: assign_qtreenp  
  public:: decode_qtreenp
```

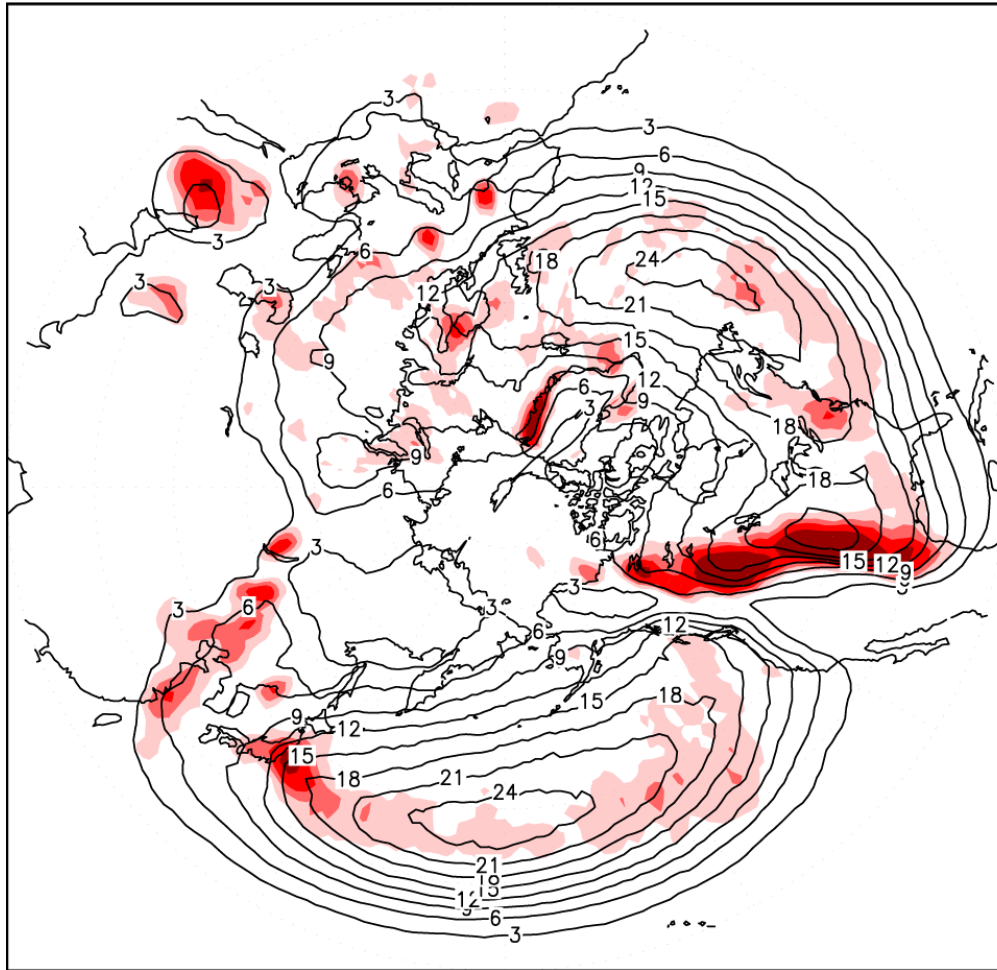
```
contains
```

```
!-----!  
  recursive subroutine create_qtreenp ( qdata, idata, level )  
    implicit none  
    integer (4), intent(in)      :: level  
    integer (4), intent(in)      :: idata(2**level, 2**level)  
    type(qtype) , intent(inout) :: qdata(4**level)
```

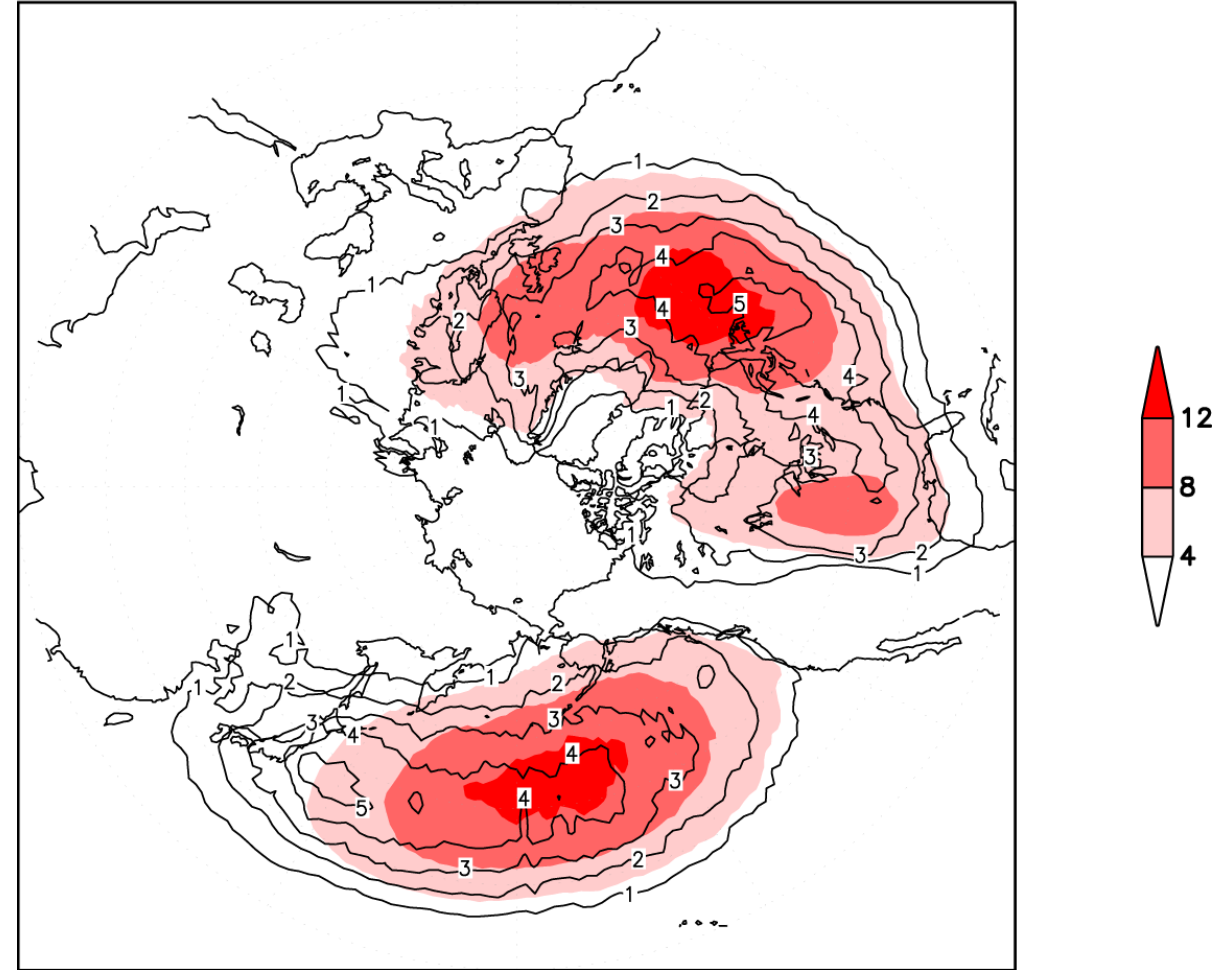
プログラムはFortran90
コンパイル・実行は大抵容易
海洋中規模渦の診断にも利用

北半球冬季の解析結果

生成密度とトラック密度



併合密度と分裂密度

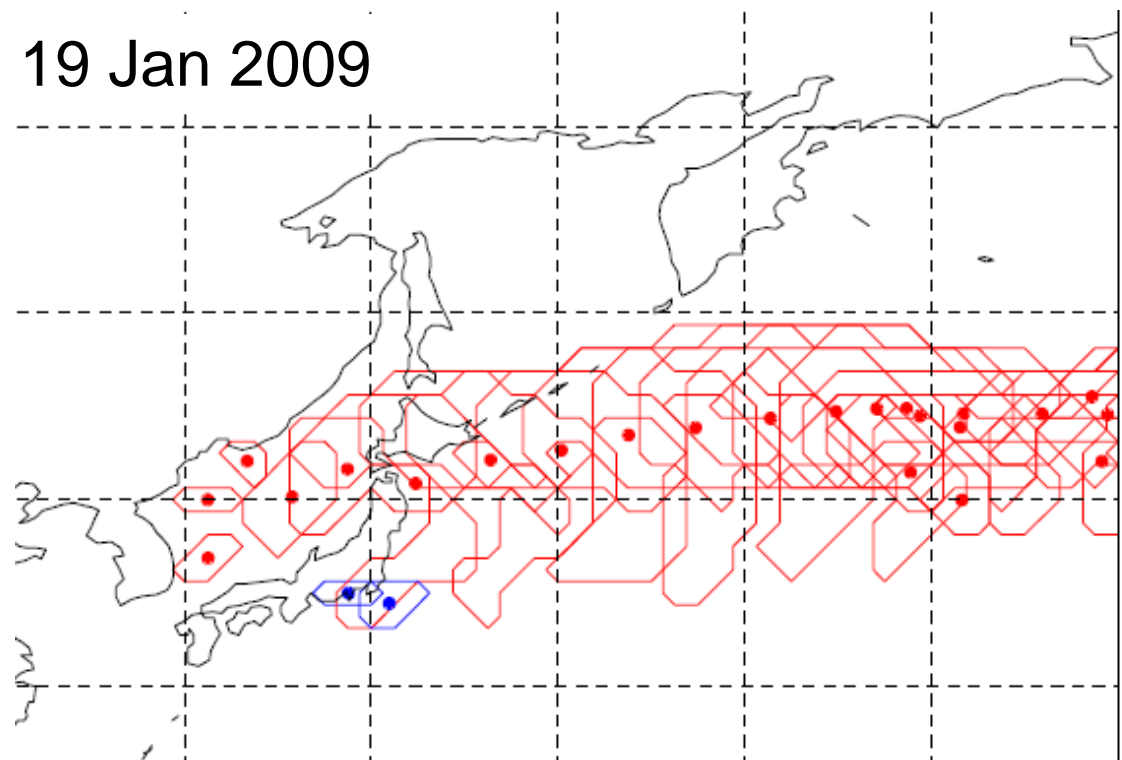


二つ玉低気圧解析

| NEAT | 稲津・ 寺倉 | 日下・ 北畑 |
|------|-----------|-----------|
| 的中 | 11 | 10(8) |
| 微妙 | 3 | N/A |
| 空振り | 6 | 9 |
| 見逃し | 0 | 5(4) |

敬称略

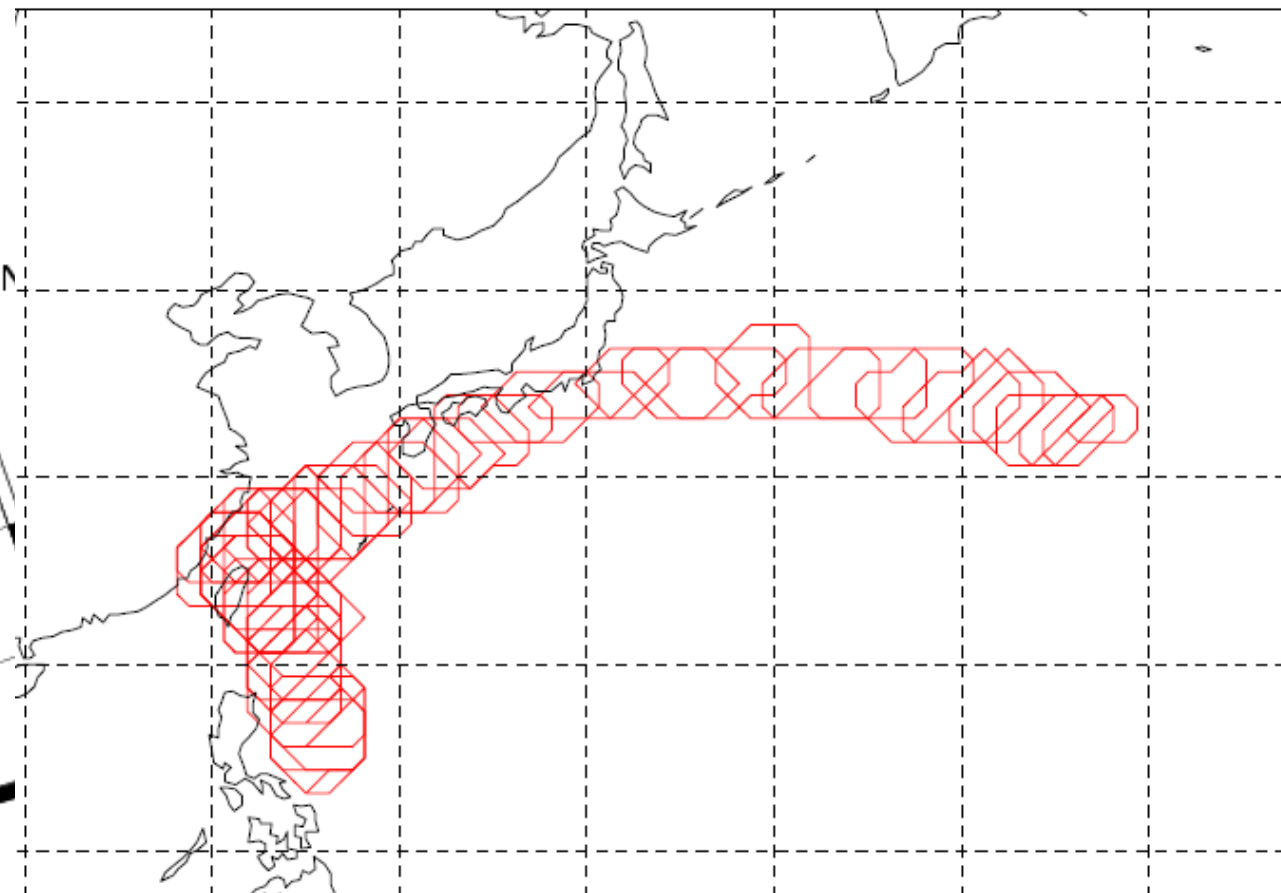
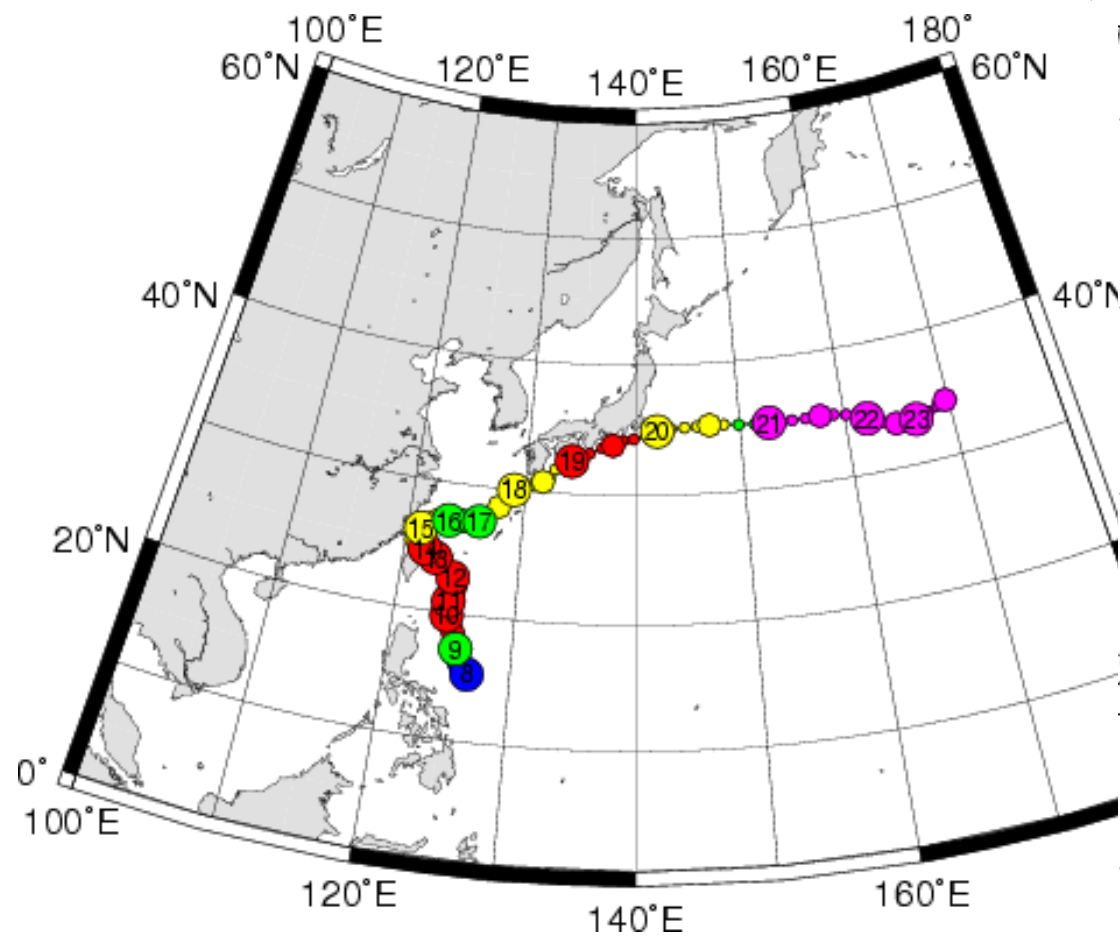
19 Jan 2009



- 相対渦度が $50 \times 10^{-6} \text{ s}^{-1}$ 以上の領域が、2 grid相当以上連結している領域を同定。
- 6時間毎に面がオーバーラップしているものをトラックとして連結し、2日以上持続するものを抽出。併合分裂も可能。
- 面の重心が $130\text{E}-140\text{E} \times 36\text{N}-44\text{N}$ に1つ以上、 $130\text{E}-150\text{E} \times 32\text{N}-36\text{N}$ に1つ以上、あるときを二つ玉低気圧と定義

熱帯低気圧・台風トラック

シア条件と暖気核条件で熱低を識別

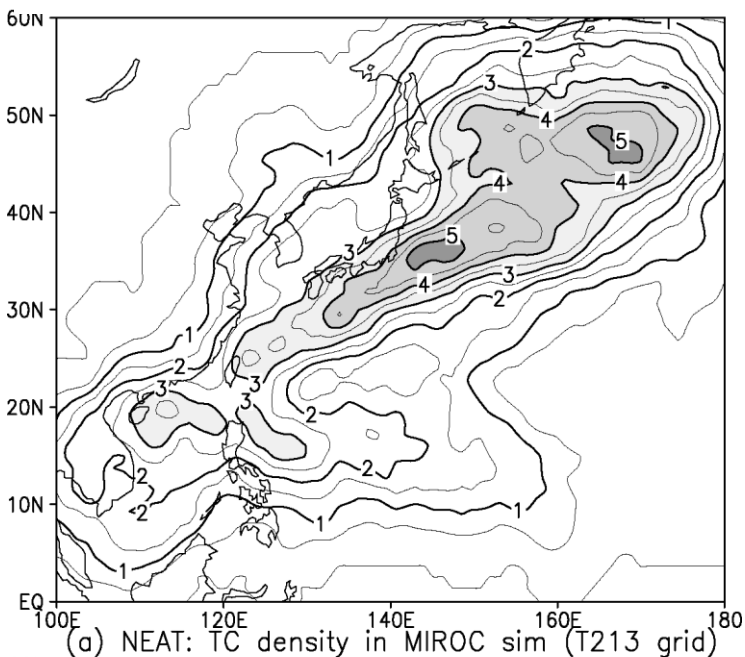


解像度依存性

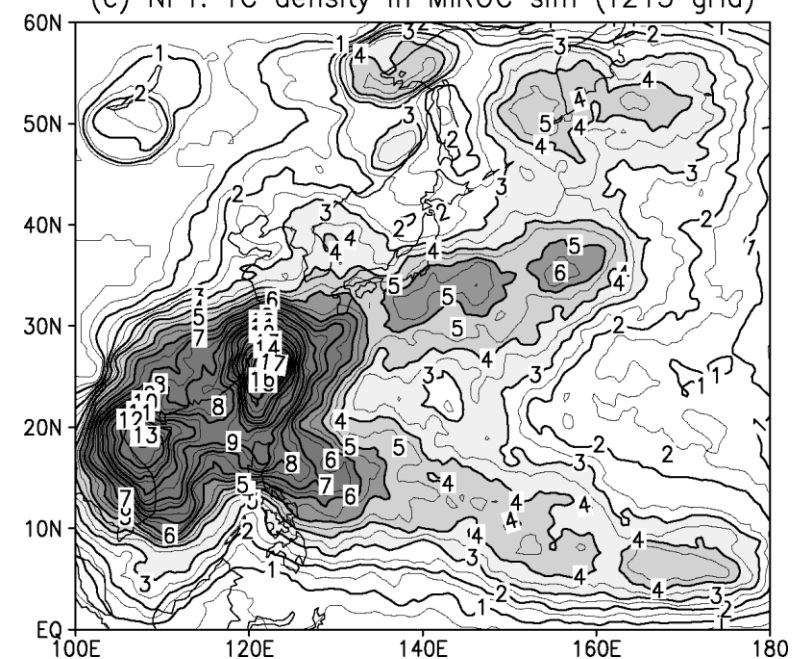
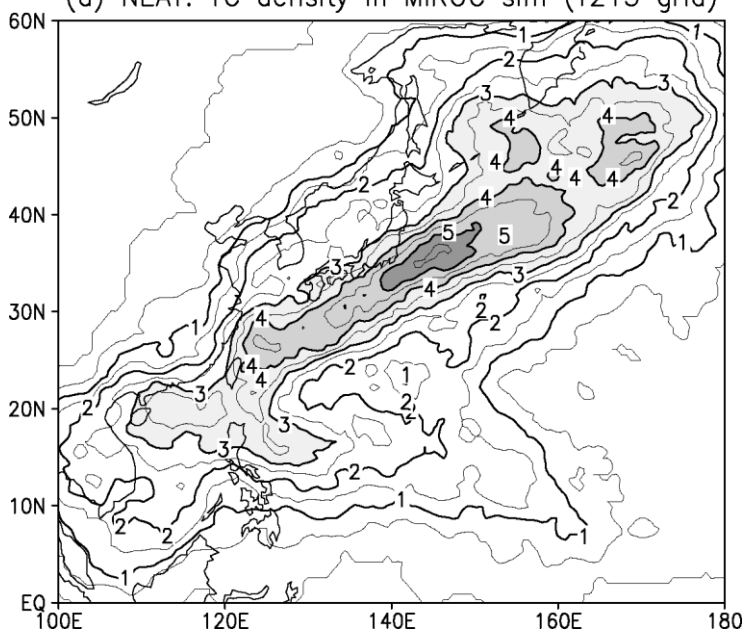
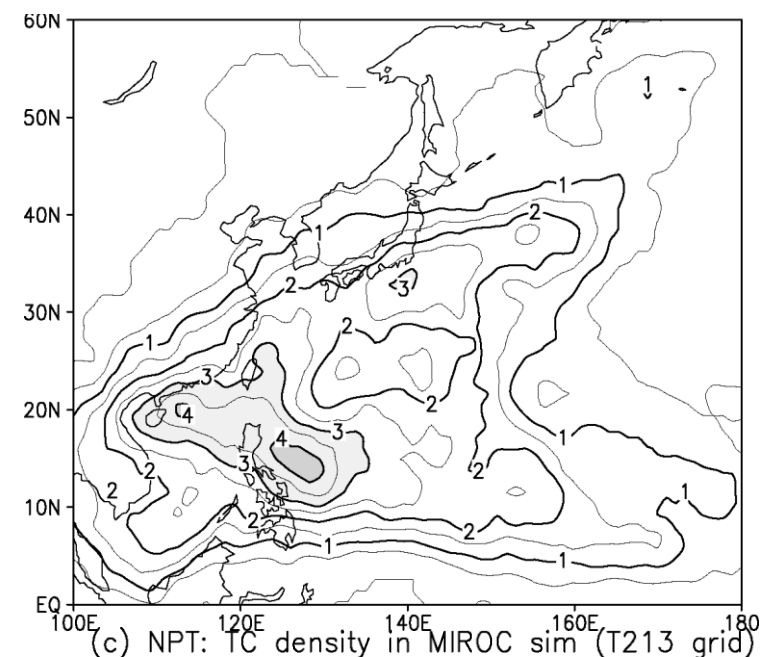
“間引き後”
低解像格子点データ

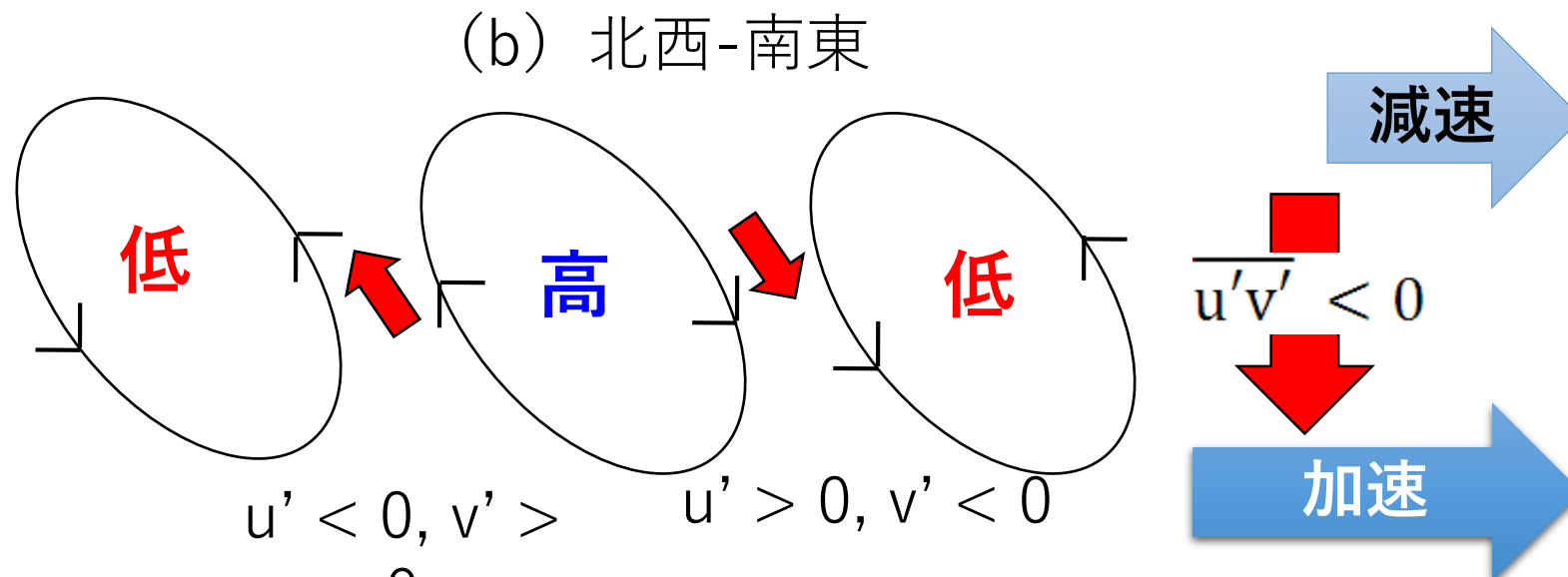
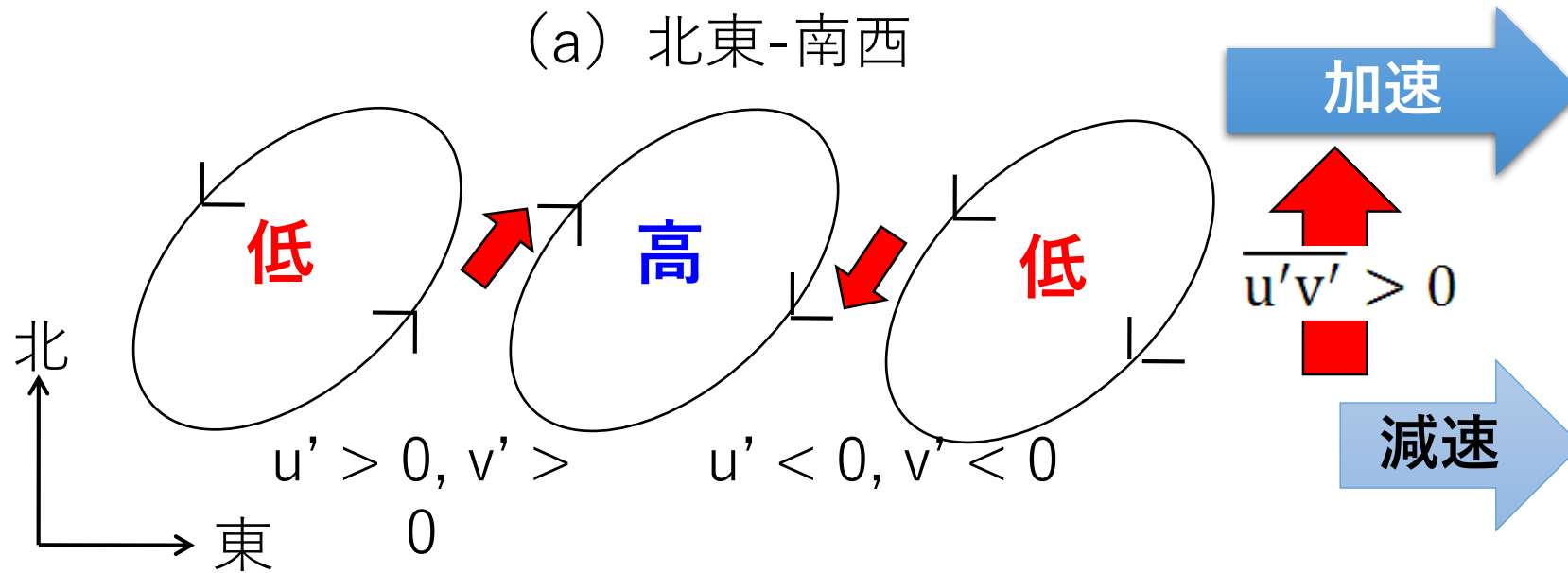
同質の
高解像格子点データ

新型トラッキング法



従来型トラッキング法

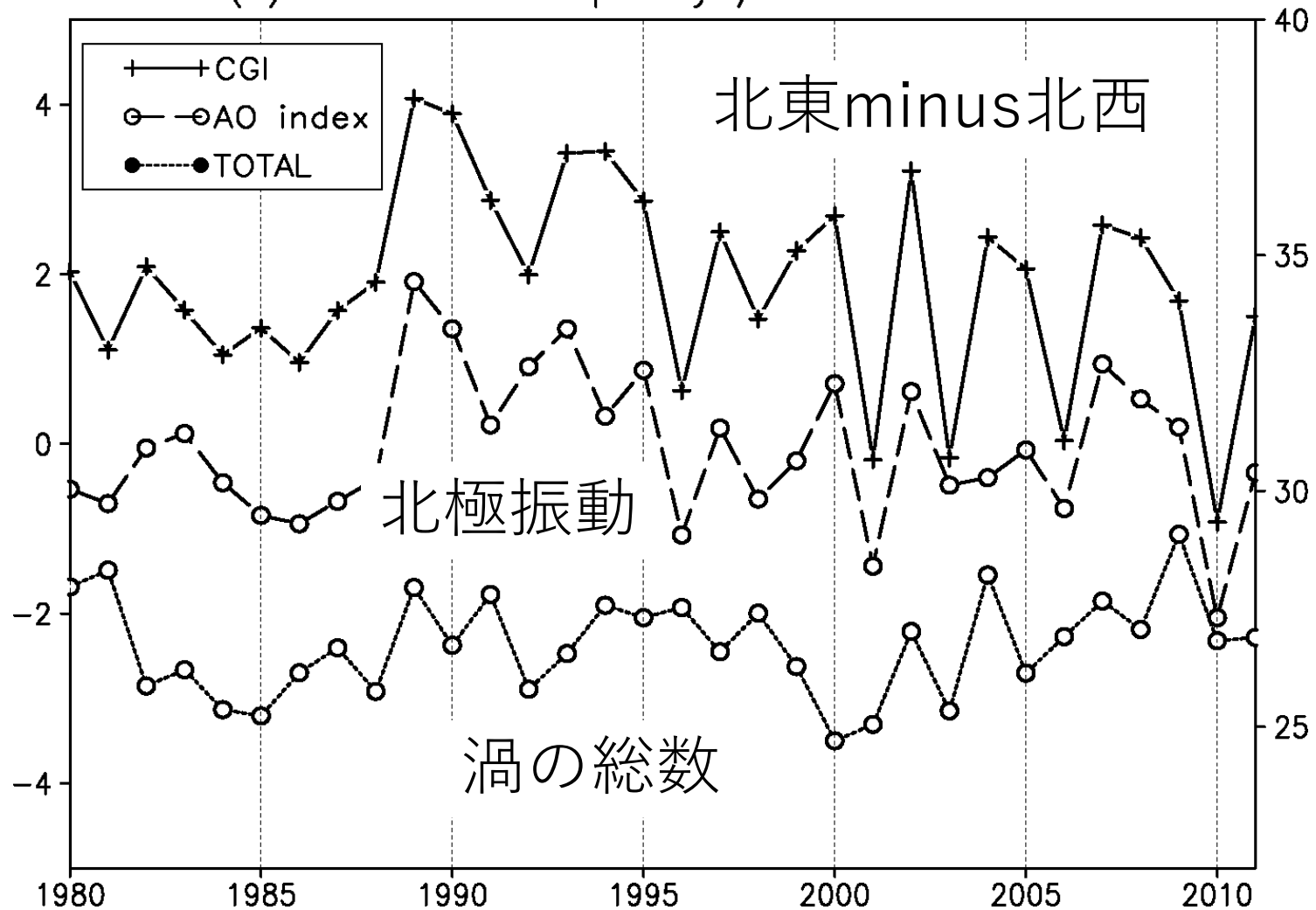




渦の東西風 u' と渦の南北風 v' の相関性が、
西風平均風の分布を変える。

北極振動と上空の渦の傾き

(c) NH-Mean Frequency / AO index & CGI



4. 位相幾何学を用いた 低気圧トラッキング

手法

プログラムはPython!

気象庁
JRA55

相対渦度850hPa

HomCloud

東北大学・平岡研究室
より提供

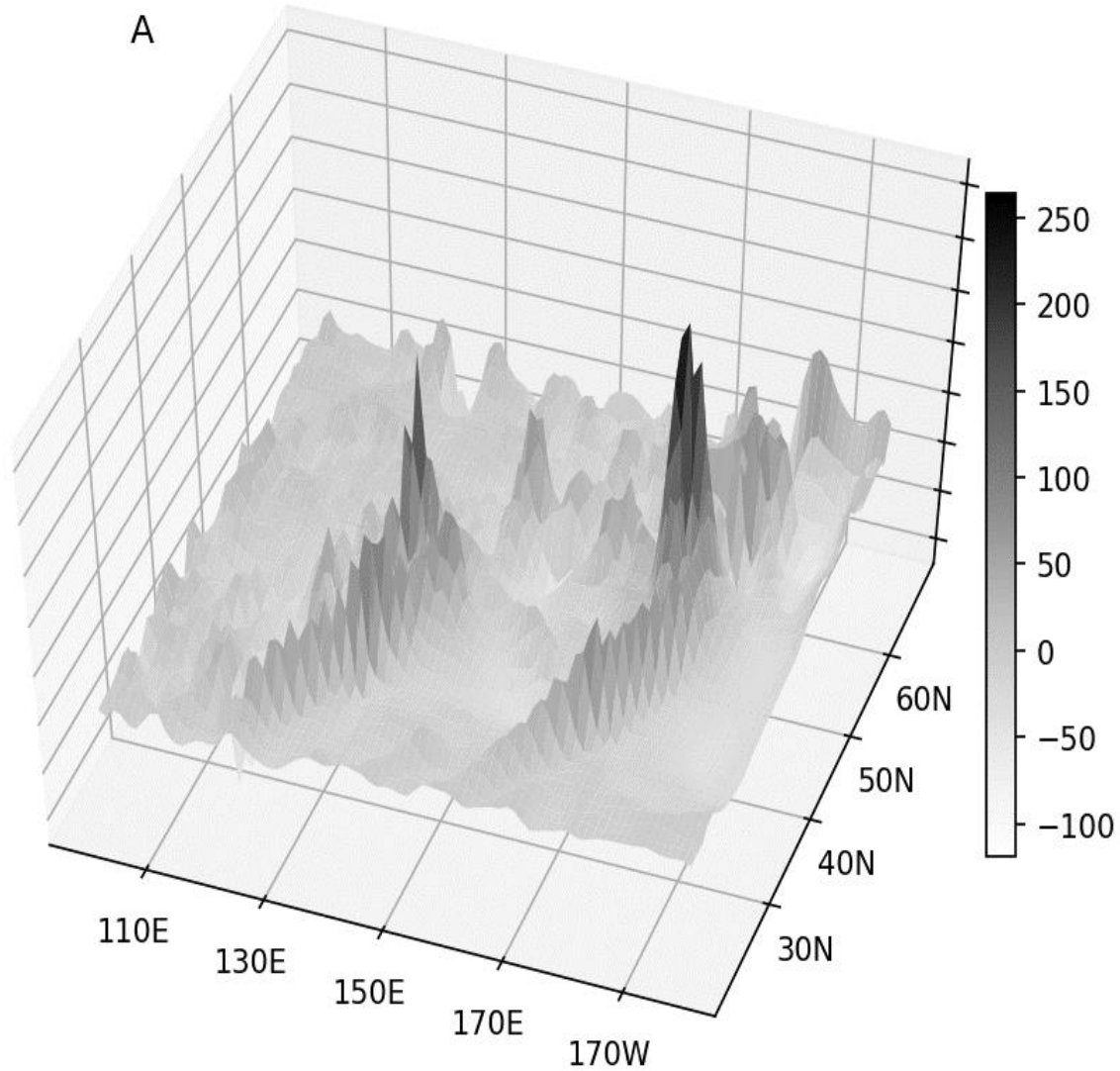
各時刻のホモロジー類
(山頂位置、峠位置、山頂の値、峠の値)

HomTrack

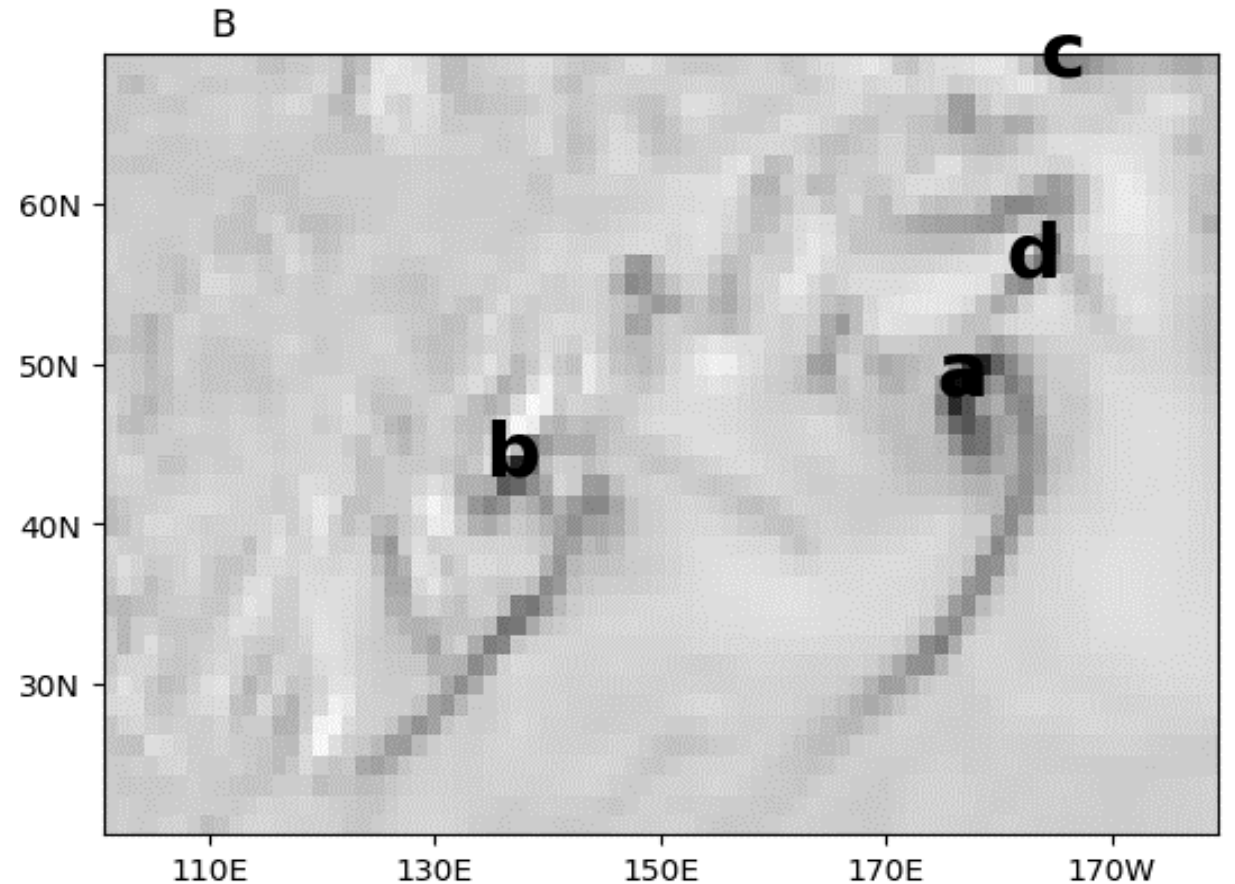
加藤颯人・卒業論文

系統樹を利用したホモロジー類の結合

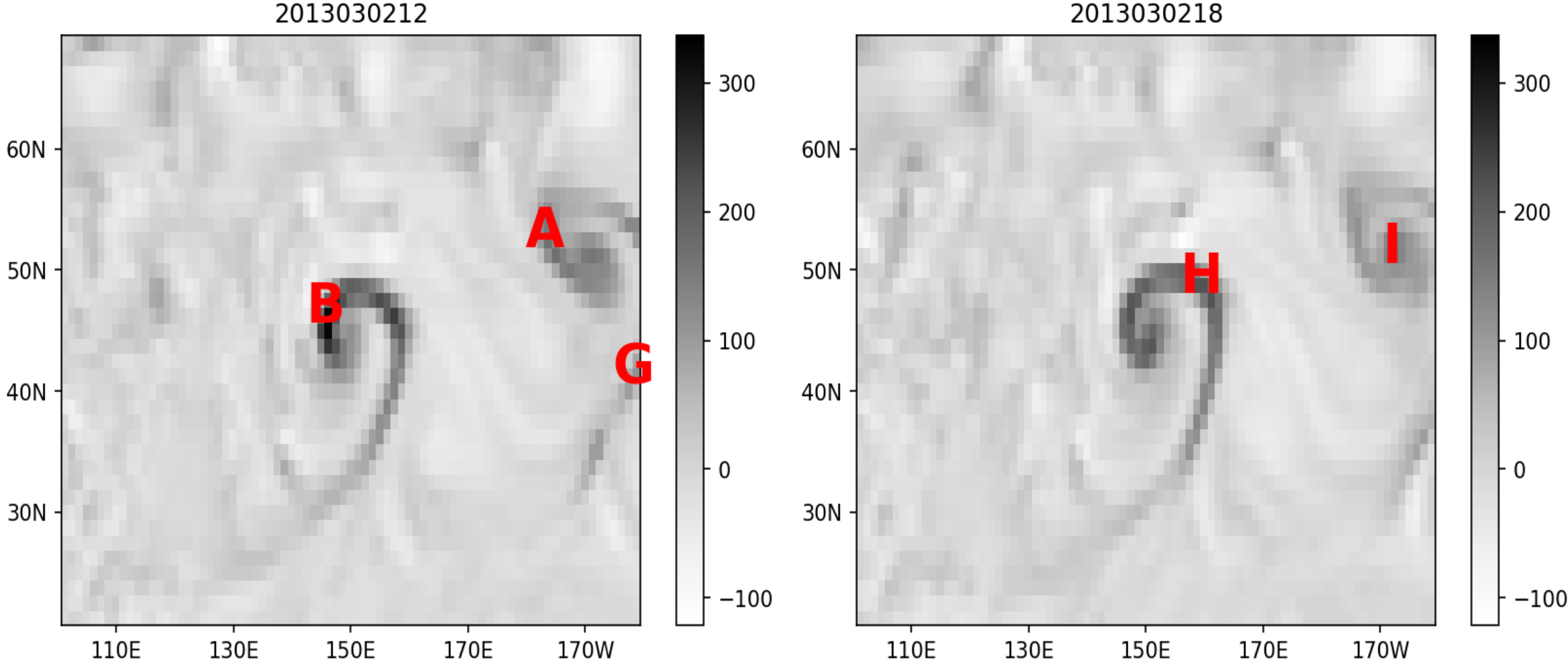
低気圧同定 = PHによるホモロジー類の計算



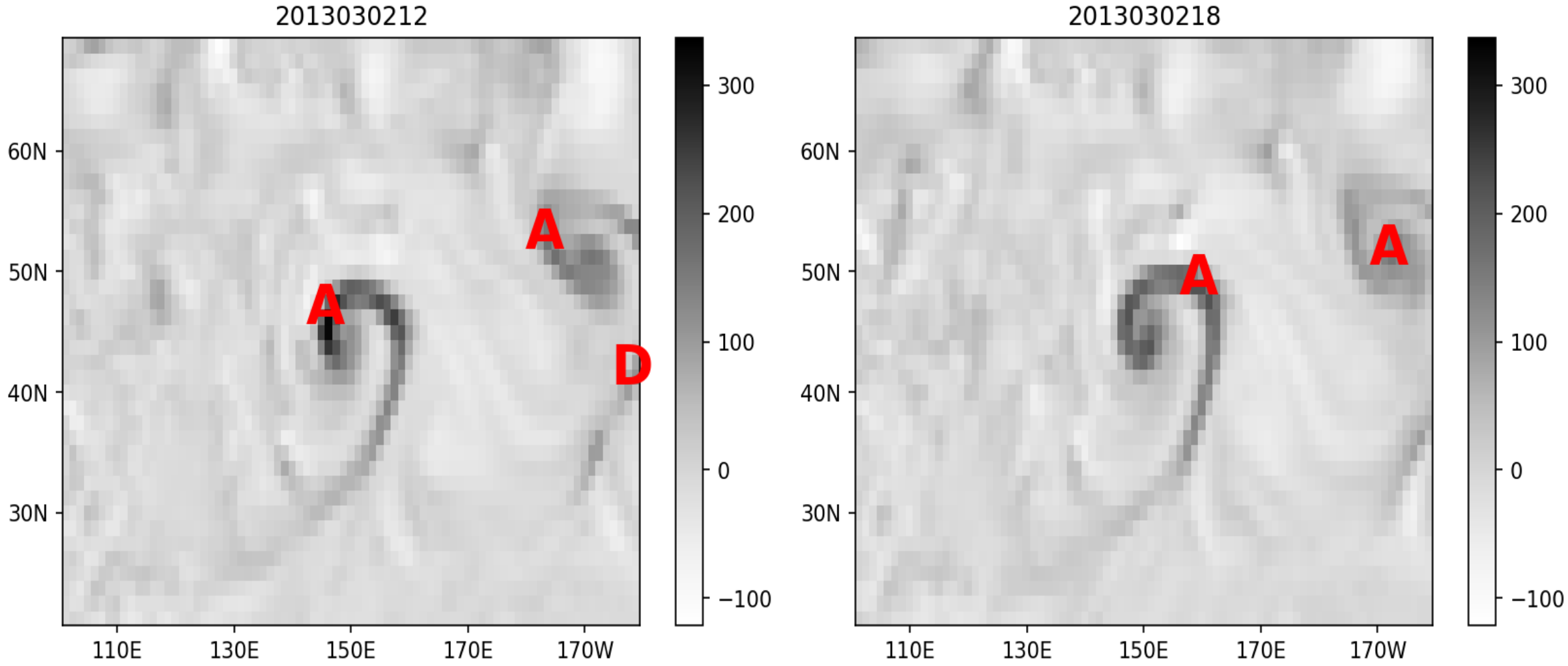
ホモロジー類の山頂位置にラベル



山頂点が近傍のホモロジー類を結合

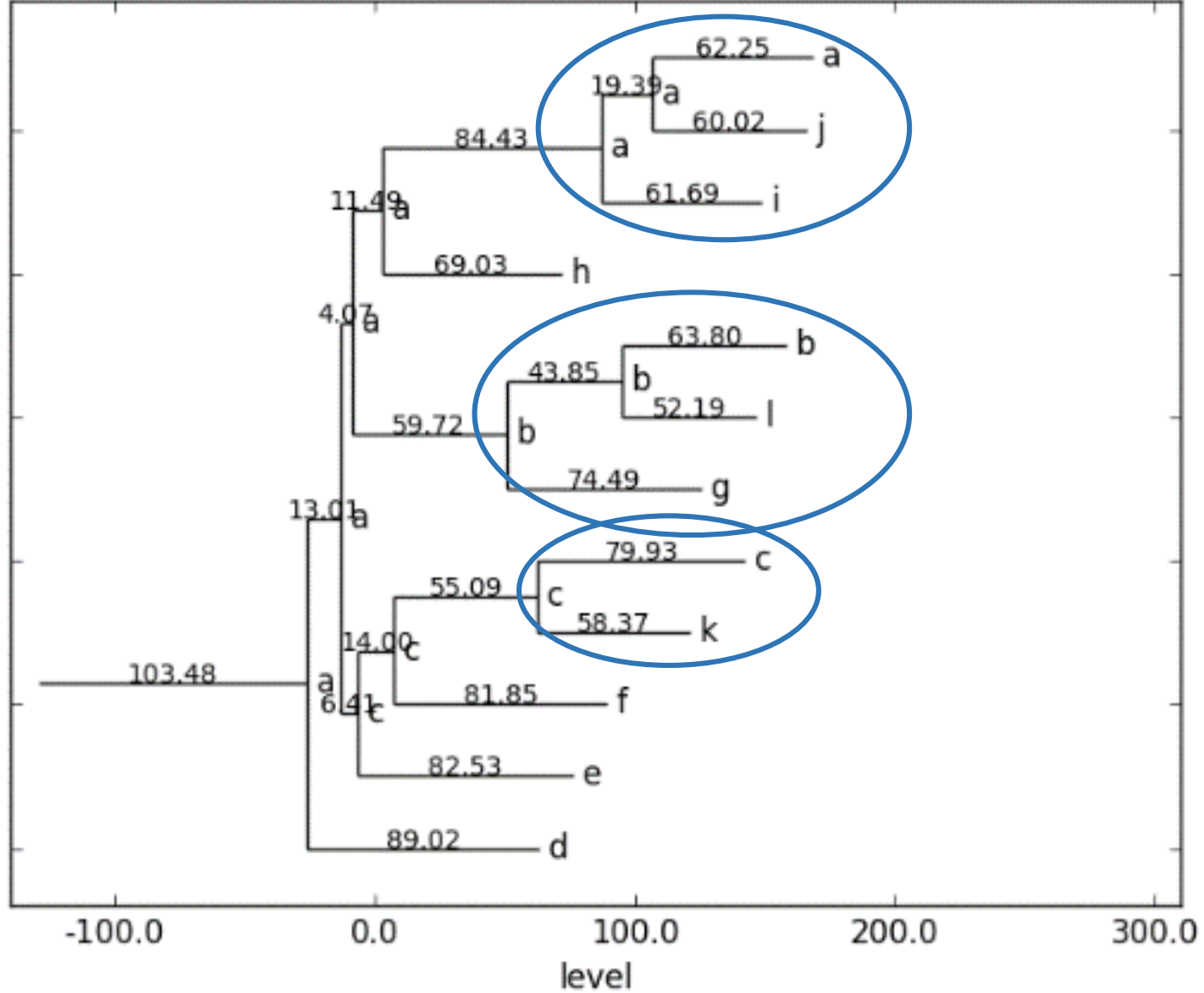


山頂候補点が近傍のホモロジー類を結合



山頂候補点が近傍のホモロジー類を結合

2013030218



まとめ

- 2次元データを計算位相幾何学の手法PHによって幾何学的に特徴づけた。
- 従来型と新型の低気圧トラッキングを紹介した。
- 位相幾何学を用いた低気圧トラッキングを試行した。