慣性変化法によるマントルの熱対流シミュレーション

東京工業大学 理工学研究科 修士2年 竹山 浩介
斎藤 貴之（地球生命研究所），牧野 淳一郎（神戸大学）

背景

地球内部のマントル層は、熱対流をしていることが分かっている。この熱対流が、地球の熱循環や地震など、様々な現象の原動力になっている。これまでのマントル対流のシミュレーションは、運動方程式の慣性項を無視し、また非圧縮性を仮定して陰的に解く方法が一般的であった。しかしこの方法は大規模な並列計算に不利であり、また粘性の空間変化が大きい場合への対応が困難である事が欠点として挙げられる。

概要

本研究では、マントル対流を「陽解法」で解けるような定式化をした

1. 慣性項を大きくしてレイノルズ数・マッハ数を大きくし、タイムステップを大きくする
2. 粘性と熱伝導率を同時に調整することで、流れの性質を変えずに時間進化を加速する
3. 慣性項を粘性に依存させることで、系のレイノルズ数の幅を圧縮し計算を加速する

→

- レイノルズ数・マッハ数が1より小さい範囲では、流れの性質は変わらないことを確認した
- 過去のベンチマークテストと一致する結果が得られた

従来の計算法

マントル対流の特徴
- 粘性が非常に大きい
- 慣性項が非常に小さい

従来の方法（陰解法）
- 慣性項を無視
- 非圧縮性近似

欠点：陰解法は大規模な並列計算に不利

➡ 本研究では陽解法で解く

マントルの運動方程式（無次元化）

$$0 \simeq \underbrace{\frac{1}{Pr}\rho\frac{d\boldsymbol{v}}{dt}}_{\text{慣性項}} = \underbrace{-Ra\frac{\rho-\rho_s}{\lambda\Delta T}\boldsymbol{e}_z}_{\text{浮力}} - \nabla p + \underbrace{\nabla\cdot\Pi}_{\text{粘性力}}$$

陽解法にするためのアプローチ

恒星の対流を解く際、音速を遅くして陽的に解く方法が提案された（音速抑制法　Hotta et al. 2012）
マントルは、慣性項が非常に小さいことに注目し、慣性項を大きくする（慣性変化法）
→音速と運動量拡散から制限される時間ステップが大きくなる

慣性変化法

① 運動方程式の慣性項を大きくする
慣性項は非常に小さいので、求まる速度場は変わらない
浮力と粘性力の比は**変わらない**

② 粘性力を小さくし、熱伝導率を大きくする
運動と熱伝導の時間スケールの比は**変わらない**

マントルの運動方程式とエネルギー方程式

$$\underbrace{\xi\times\rho\frac{d\boldsymbol{v}}{dt}}_{\text{①慣性項を大きくする}} = -\nabla p - \rho g\boldsymbol{e}_z + \underbrace{\frac{1}{c}\times\nabla\cdot\Pi}_{\text{②粘性力を小さくする}}$$

$$\rho c_p\frac{dT}{dt} - \lambda\frac{dp}{dt} = \nabla\cdot\underbrace{(c\times k\nabla T)}_{\text{②熱伝導率を大きくする}} + (\mathrm{others})$$

慣性変化法による無次元パラメータの変化

① レイリー数（～10^7）＝浮力 / 粘性力

$$Ra = \frac{\lambda g\Delta TL^3}{\kappa\nu}$$

→レイリー数は不変（流れの性質は変わらない）

② レイノルズ数（～10^{-20}）＝慣性項 / 粘性項

$$Re = \xi c\frac{UL}{\nu}$$

③ マッハ数（～10^{-16}）＝流速 / 音速

$$M = \sqrt{\xi}\,c\cdot\frac{v}{c_s}$$

→レイノルズ数・マッハ数は大きくなる（1より小さい範囲では流れの性質は変わらない）

時間ステップの変化

$$dt = \min\left(\sqrt{\xi}C_{\mathrm{CFL}}\frac{h}{c_s},\ \xi c\zeta\frac{h^2}{\nu},\ \frac{1}{c}\zeta\frac{h^2}{\kappa}\right)$$

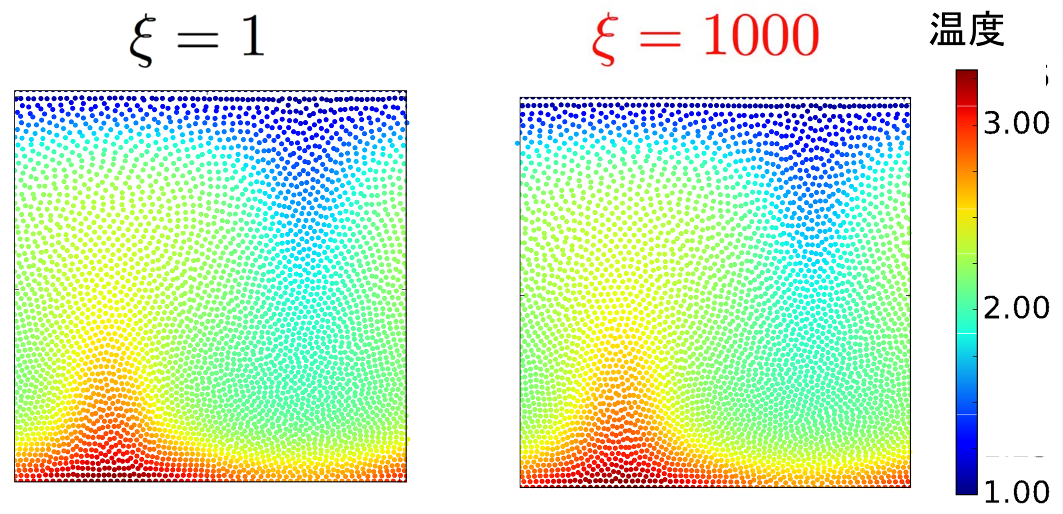
$C_{CFL} = 0.3$（クーラン数）, $\zeta = 0.1$
h：カーネル半径（空間刻み）
ν：動粘性率 $(\mathrm{m^2/s})$
κ：熱拡散率 $(\mathrm{m^2/s})$

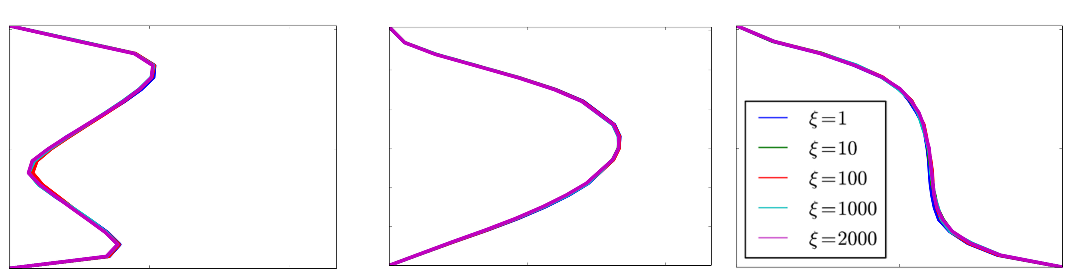
実装

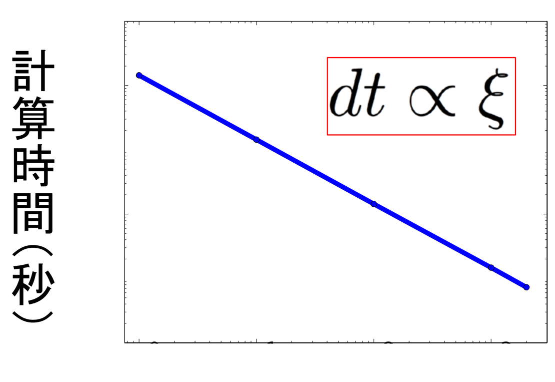
粒子法（Smoothed particle hydrodynamics; SPH法）およびメッシュ法（Finite-Different）で実装し、熱対流計算を行った

結果①

慣性項に係数を乗じたとき







無次元パラメータの変化
$Ra = 10^5$
$Re = 10^{-4} \to 10^{-1}$
$M = 10^{-3} \to 3\times10^{-2}$

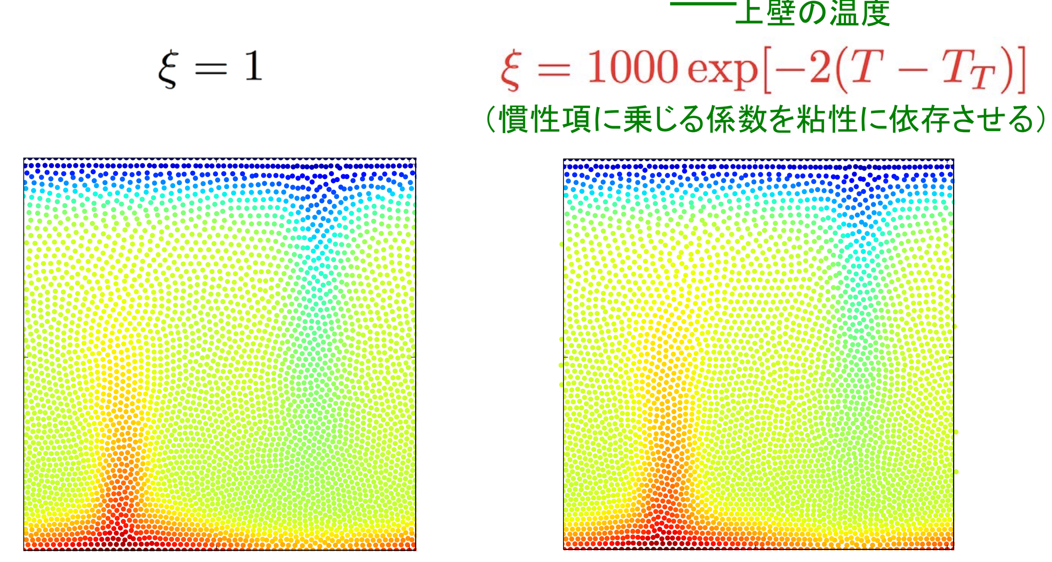
$Re < 1$ であれば、流れの性質は変わらない

→ 慣性項を $1/Re$ 倍大きくすることが可能

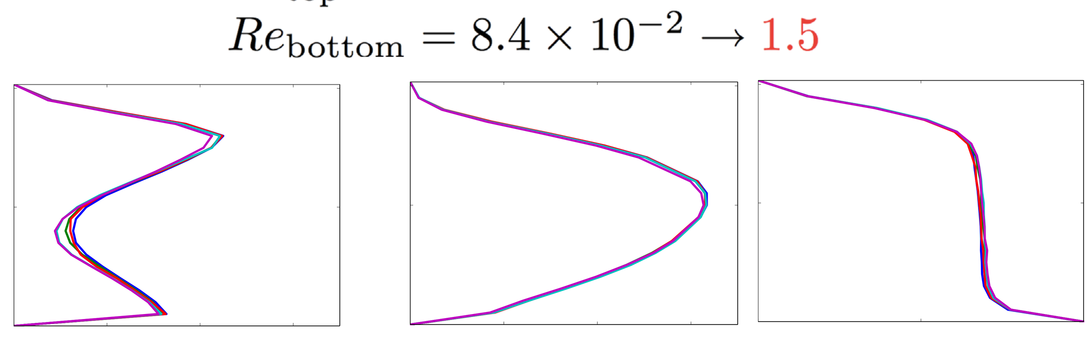
結果②

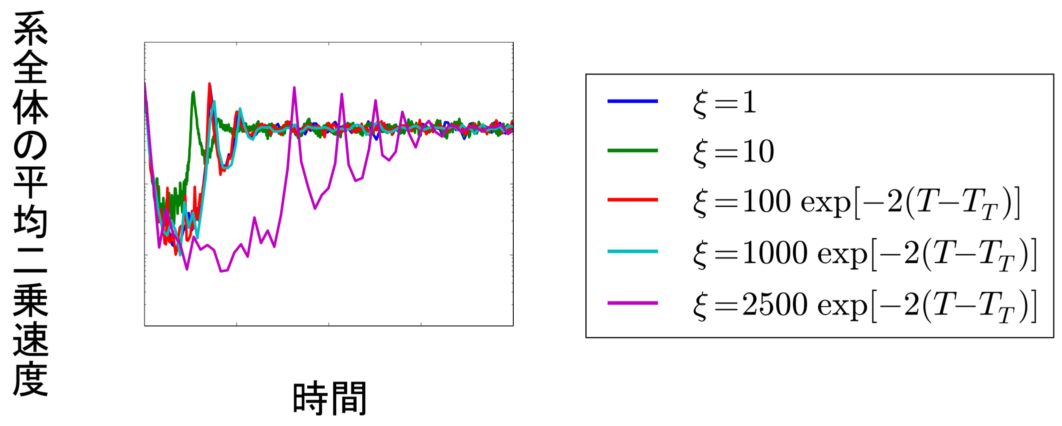
粘性が温度に依存するとき（2桁の粘性差）

粘性の温度依存性：$\mu = \mu_0\exp[-2(T-T_T)]$　（T_T：上壁の温度）



$Re_{\mathrm{top}} = 1.1\times10^{-3} \to 1.1$
$Re_{\mathrm{bottom}} = 8.4\times10^{-2} \to 1.5$

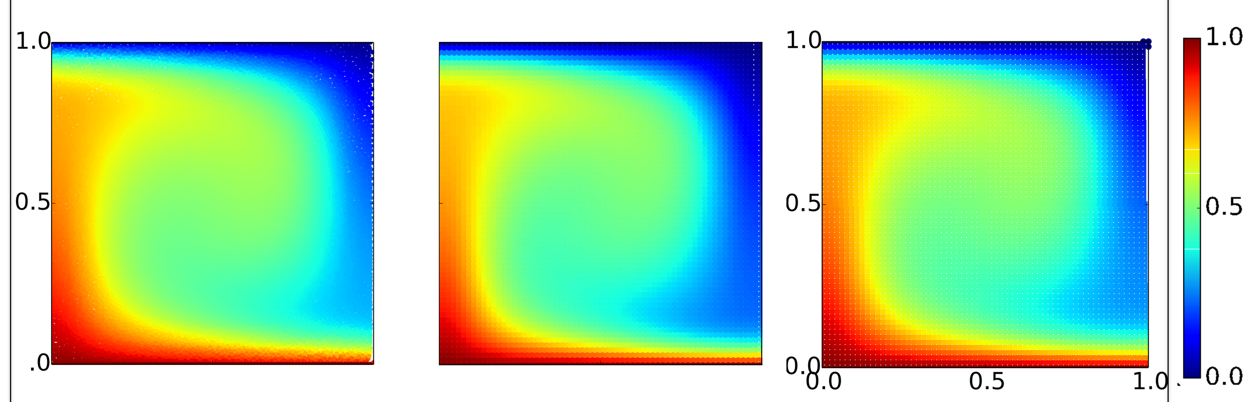




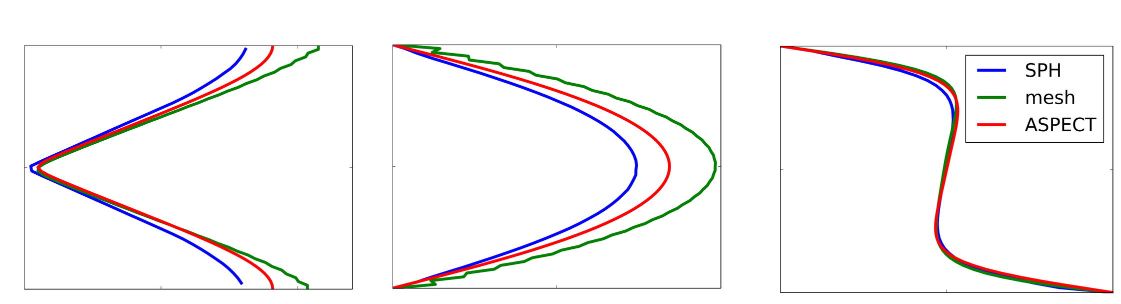
慣性変化法は粘性が温度依存する場合においても対応が可能

結果③

ベンチマークテスト（Blankenbach et al. 1989）との比較



※ ASPECT: ブジネスク近似（非圧縮性近似, 陰解法）
慣性変化法では、高圧力（スケールハイト大）にすることで、非圧縮性近似と同様の結果を再現した



慣性変化法により、平均二乗速度・熱流量ともに過去のマントルのベンチマークテストと一致する結果が得られた

まとめ

マントル対流を**陽解法**で解くための新たな定式化（慣性変化法）を考案した
高粘性流体においては慣性項を大きくすることで、タイムステップを実際のレイノルズ数・マッハ数に無関係に流れの速度で決まるものにできる
また慣性変化法は陽解法であるため、大規模な並列計算に適用可能