圧縮性流体用のメッシュフリー法の高次化

〇 山本智子[1,2]　牧野淳一郎[3,2,4]
(1:東工大 理工学研究科 2:理研 AICS 3:神戸大 理学研究科 4:東工大 ELSI)

概要

従来の圧縮性流体用メッシュフリー法は、物理量を離散的に近似する際に、空間低次のため、自由表面や接触不連続面で誤差が生じていた。そこで、圧縮性流体用の空間高次メッシュフリー法を開発する。

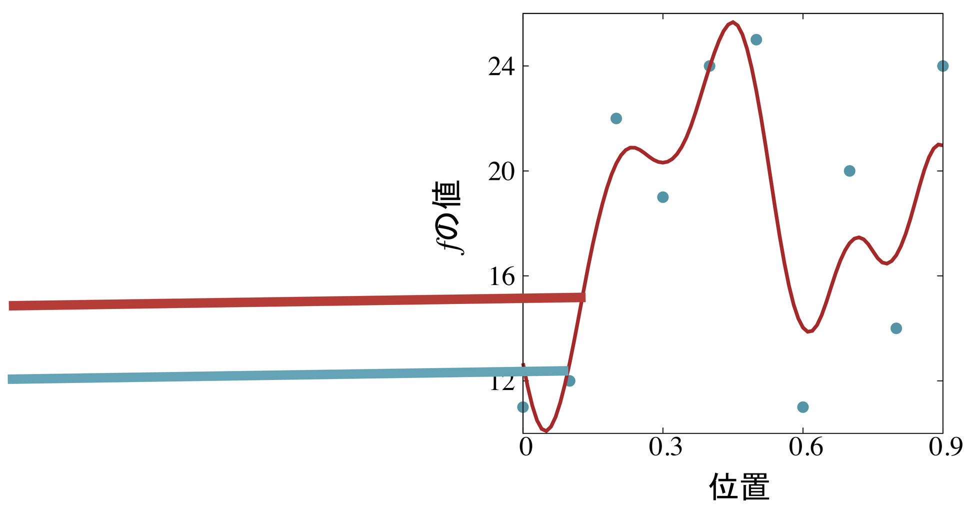
メッシュフリー法

- メッシュを必要としない手法。
- 要素分割を行わないため、複雑な形状や大変形を扱うことができる。
- 物理量f_iの離散近似は、形状関数を用いてグローバルに畳み込む。
- 大変形を伴う天文の現象にはSPH法が使われることが多い。

$$< f_i > = \sum_j f_j \phi_{ij}$$

形状関数

畳み込みをした値 $<f_i>$
離散的な値 f_i



従来の手法(SPH法)の問題点

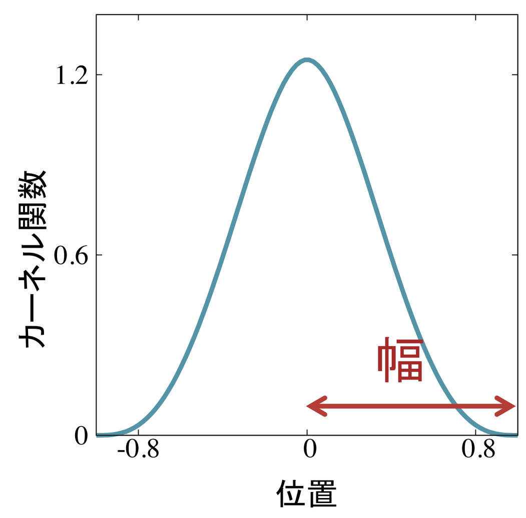
① 密度評価における誤差

密度を直接評価する。
SPH法では以下を用いることで、陽的に密度を直接評価できる。

$$\phi_{ij} = \Delta V_j W_{ij} \qquad \Delta V_j：体積 \qquad W_{ij}：カーネル関数$$

カーネル関数とは

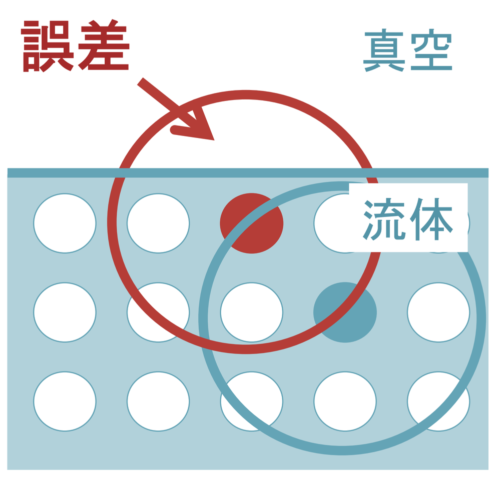
- 幅を0に近づけると、デルタ関数に近づく。
- 有限の範囲で0になる。
- 積分をすると1になる。
- 軸対称になっており、微分値は、軸反対称になる。



密度を評価する

$$\rho_i = \sum_j m_i W_{ij} \qquad \Delta V_j = \frac{m_i}{\rho_i}$$

赤い粒子では、真空側に粒子がいないにも関わらず、形状関数が真空までまたがるため、密度が過小評価される。



②低次の空間微分演算子

$$< \nabla_i f_i > = \sum_j f_j \nabla_i \phi_{ij}$$

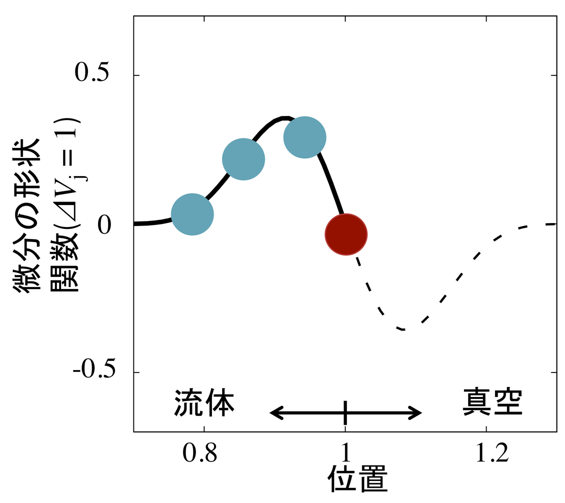
f_jをiまわりでテイラー展開してみる。

$$< \nabla_i f_i > = \sum_j f_i \nabla_j \phi_{ij} + \sum_j \boldsymbol{r}_{ij} \nabla_i f_i \nabla_j \phi_{ij} + \cdots$$

従って、SPH法の微分演算子は、以下の近似をしていることに相当する。

$$\sum_j \nabla \phi_{ij} = \mathbf{0} \qquad \sum_j \boldsymbol{r}_{ij} \cdot \nabla \phi_{ij} = 1$$

主に、形状関数の性質から、これらは自由表面で大きな誤差をもつ。



例えば、粒子iが自由表面に最も近い粒子のとき、$\nabla \phi_{ij}$は、表面付近で正の値のみなので、$\sum_j \nabla \phi_{ij} = 0$ は成立しない

高次化したメッシュフリー法

① 密度の導出

SPH近似を用いずに、陽的に密度を導出したい。そこで、密度を直接導出するのではなく、連続の式を時間発展させることで、導出する。
従って、②を解決することで、従来の密度誤差は大幅に減る。

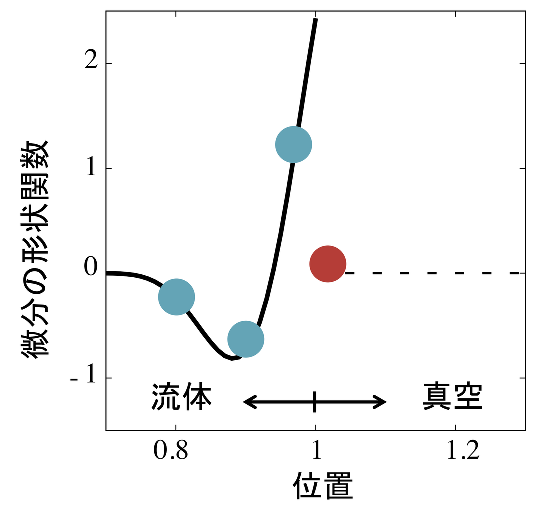
② 高次の空間微分演算子を用いる

勾配を移動最小二乗近似法により導出する。

f_iを多項式近似する (1次元を考える。)。

$$< f(x) > = \sum_{\alpha=1}^{n} a_\alpha(x)(x - x_i)^\alpha$$

$$\Rightarrow \; < \nabla f(x_i) > = a_1(x)$$



流体領域のデータのみで、$f(x)$を、n次多項式で表現できるような形状関数になる。したがって、形状関数は真空までまたがない。

誤差εが最小になる係数αを求める。

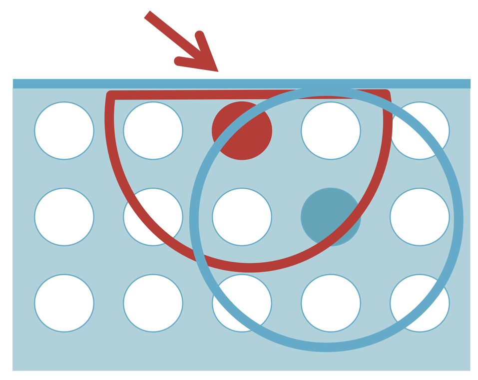
$$\epsilon = \sum_{\alpha=0}^{n} \sum_j W_{ij} [< f_j > - a_\alpha(x_j) x_j^\alpha]^2$$

$\langle f_j \rangle \rightarrow f_j$として、最終的に求まる式 (Tamai et al. 2013に帰着)

$$< \nabla f_i > = M_i^{-1} \sum_j f_j \boldsymbol{r}_{ij} W_{ij}$$

$$M_i = \sum_k \boldsymbol{r}_{ik} \otimes \boldsymbol{r}_{ik} W_{ik} \qquad \boldsymbol{r}_{ik}^t = (x_{ik}, x_{ik}^2, \cdots)$$

誤差がなくなる



畳み込みを行う領域が流体に限られるので、誤差が生じない。

テスト計算結果

表面重力波のテスト計算 (どちらもそれぞれ最善ケースでテストをしている)

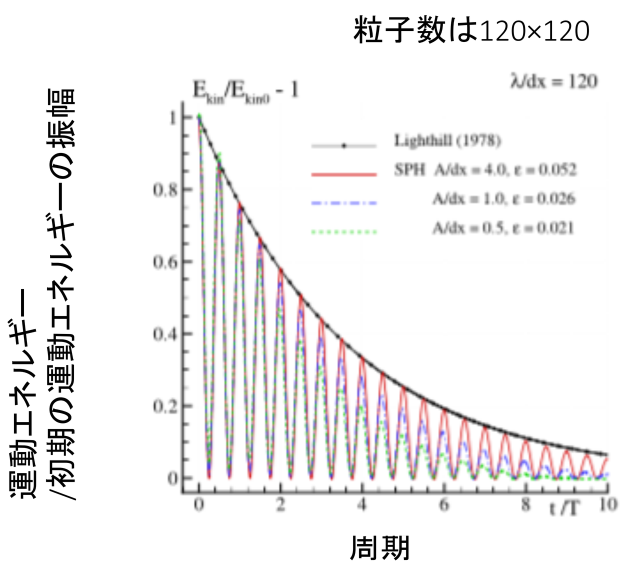
→運動エネルギーは一定のはずである。

Antuono et al. (2011)において、連続の式と運動方程式に人工拡散項を付与して表面重力波を扱えるようにしたSPHでテストしたもの。

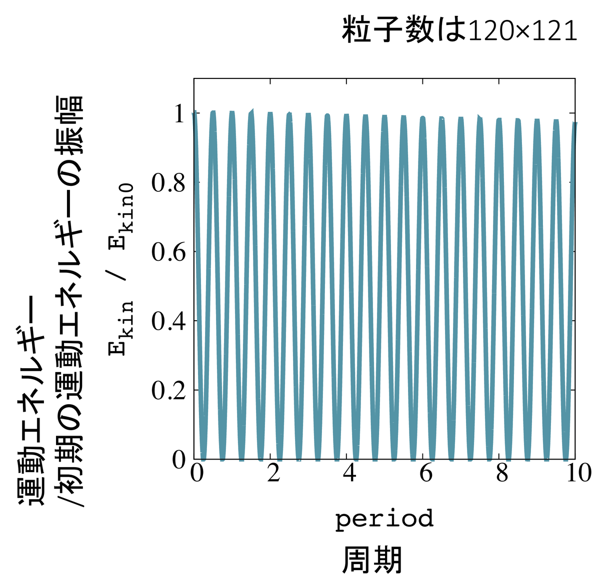
数値粘性による大きな減衰が伴う。

この拡散は、人工拡散項のみが原因である(Antuono et al. (2011))ので、SPHで表面重力波を扱うには、運動エネルギーを人工的に大きく拡散しなければならない。

粒子数は120×120



粒子数は120×121



新たな手法を用いれば、小さな数値粘性でも表面重力波を扱うことができる。

今後の課題

- 圧力不連続面を適切に扱うことができない

運動方程式

$$\frac{dv}{dt} = -\frac{\nabla P}{\rho}$$

圧力の微分可能性を仮定するため無限大の精度を要する

圧力不連続面を形成する2流体を分けて計算をする。

まとめ

圧縮性流体用の空間高次メッシュフリー法を開発した。新たな手法は、従来の圧縮性流体用メッシュフリー法のひとつである、SPH法に比べ、自由表面を適切に扱うことができた。しかしながら、圧力不連続面に関しては、未だ適切に扱うことができないため、今後の課題となる。