ルジャンドル陪函数の計算手法の比較

*榎本剛（京大防災研）

*enomoto.takeshi.3n@kyoto-u.ac.jp

2016/3/15

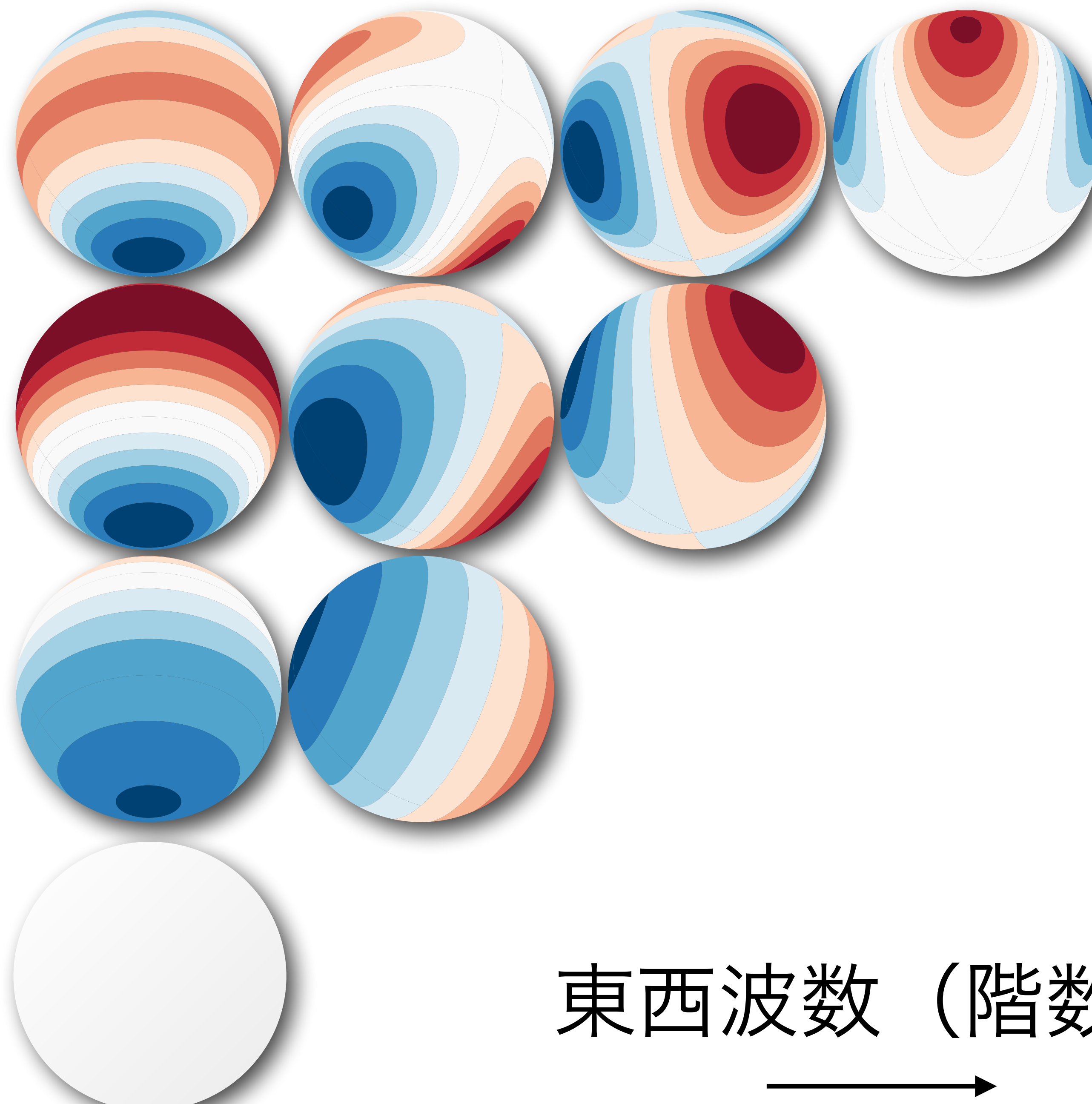
科研費挑戦的萌芽研究 15K13417

Enomoto, T., 2015: Comparison of computational methods of associated Legendre functions. *SOLA*, **11**, 144–149, doi:10.2151/sola.2015-033.

日本天文学会 2016 年春季年会

球面調和函数

全（東西＋南北）
波数（次数）



東西波数（階数）

高解像度 スペクトル変換法 大気大循環モデル

T: 三角切断
切断階数 M = 切断次数 N

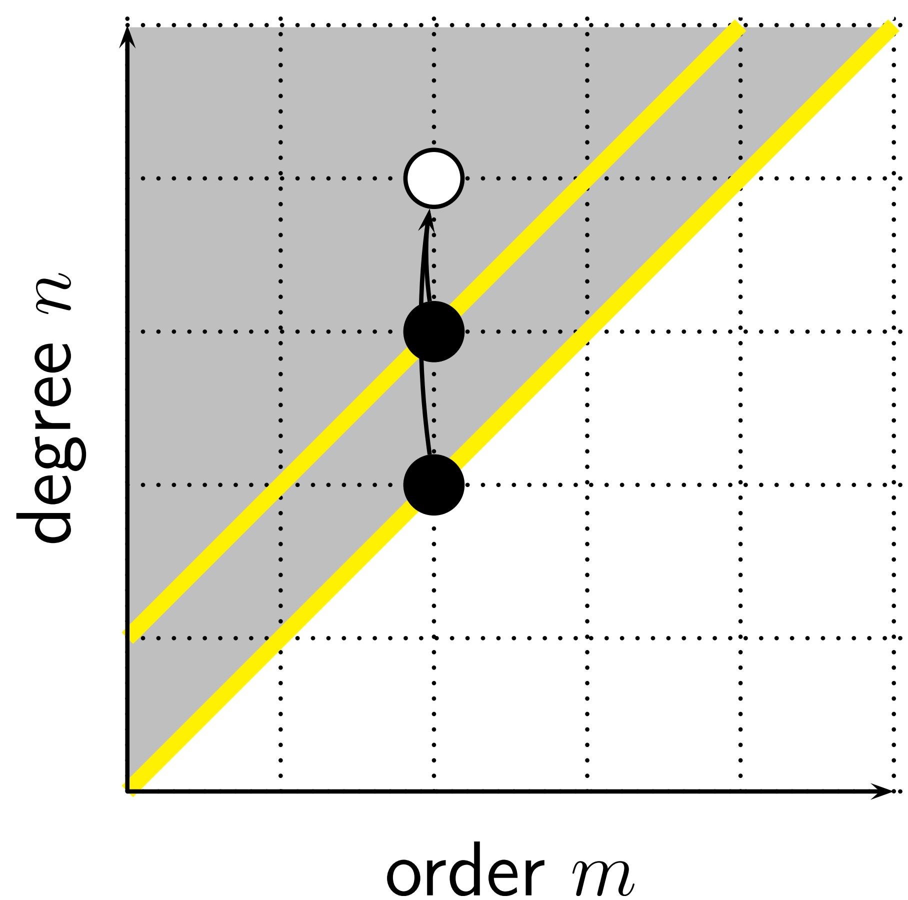
階数 m: 東西波数
次数 n: 全（東西＋南北）波数

エイリアシングを防ぐ格子点数

- 線型格子: $I \geq 2M + 1$
- 2次格子: $I \geq 3M + 1$
- 3次格子: $I \geq 4M + 1$

- AFES T1279
  2002, Ohfuchi et al. 2004
- 数値予報モデル:
  - JMA GSM $\mathrm{T_L}959$
    2007: $\mathrm{T_L}319$ から
  - ECMWF IFS $\mathrm{T_{CO}}1279$
    2016, 2010: $\mathrm{T_L}799$ から
  - NCEP GSM $\mathrm{T_L}1534$
    2015: T574 から
- 非静力学モデル: ECMWF IFS $\mathrm{T_L}7999$ (Wedi et al. 2013)

ルジャンドル陪函数を求める3点漸化式



3点漸化式の問題点

$$\tilde{P}_n^m(\cos\theta) = (a_n^m \cos\theta)\tilde{P}_{n-1}^m(\cos\theta) - b_n^m \tilde{P}_{n-2}^m(\cos\theta) \tag{1}$$

$$\tilde{P}_m^m(\cos\theta) = (d_n^m \sin\theta)\tilde{P}_{m-1}^{m-1}(\cos\theta), \tag{2}$$

$$\tilde{P}_{m+1}^m(\cos\theta) = (a_{m+1}^m \cos\theta)\tilde{P}_m^m(\cos\theta) \tag{3}$$

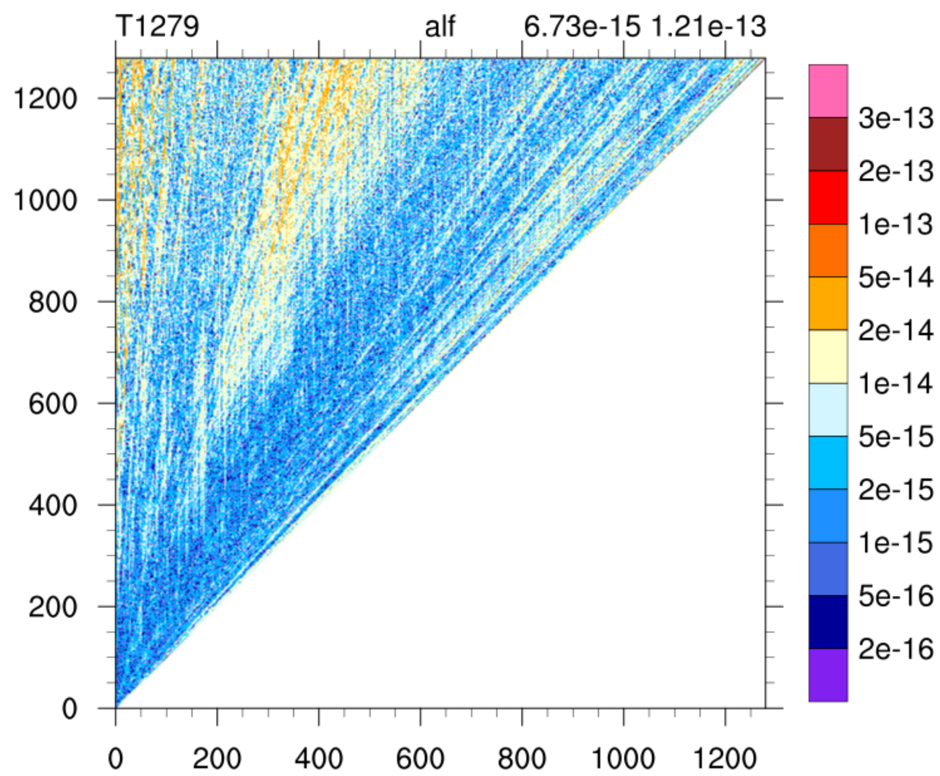
ここで $\tilde{P}_0^0(\cos\theta) = 1/\sqrt{2}$ （1に正規化）

$$a_n^m = \sqrt{\frac{(2n-1)(2n+1)}{(n-m)(n+m)}}, b_n^m = \frac{a_n^m}{a_{n-1}^m}, d_n^m = \sqrt{\frac{2m+1}{2m}}. \tag{4}$$

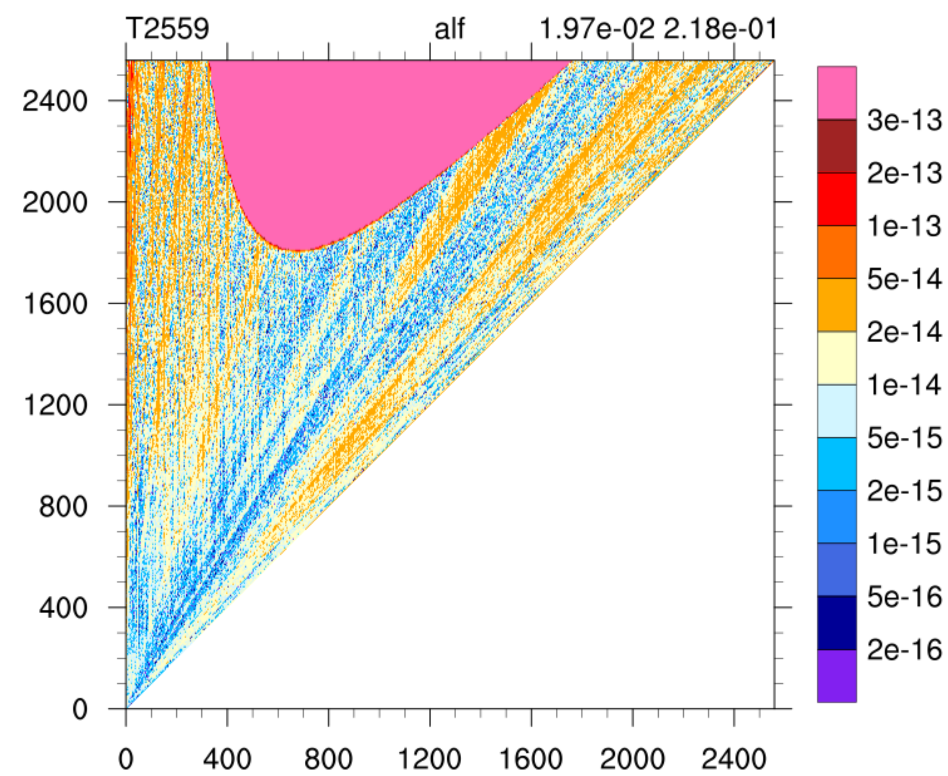
$\sin\theta$ は極付近でアンダーフローを起こす可能性

逆変換–順変換テスト

T1279



T2559



$$e_{\mathrm{sa}} = \left| 1 - 2 \sum_{j=1}^{J/2} \left[\tilde{P}_n^m(\cos\theta_j) \right]^2 w_j \right|$$

拡張浮動小数点数 (X-number)

Smith et al. (1981) Fukushima (2011)

$$X = xB^i \tag{5}$$

ここで 倍精度では $B = 2^{960}$，4 倍精度では $B = 2^{1600}$

X が

$$1/\sqrt{B} \leq |x| < \sqrt{B} \tag{6}$$

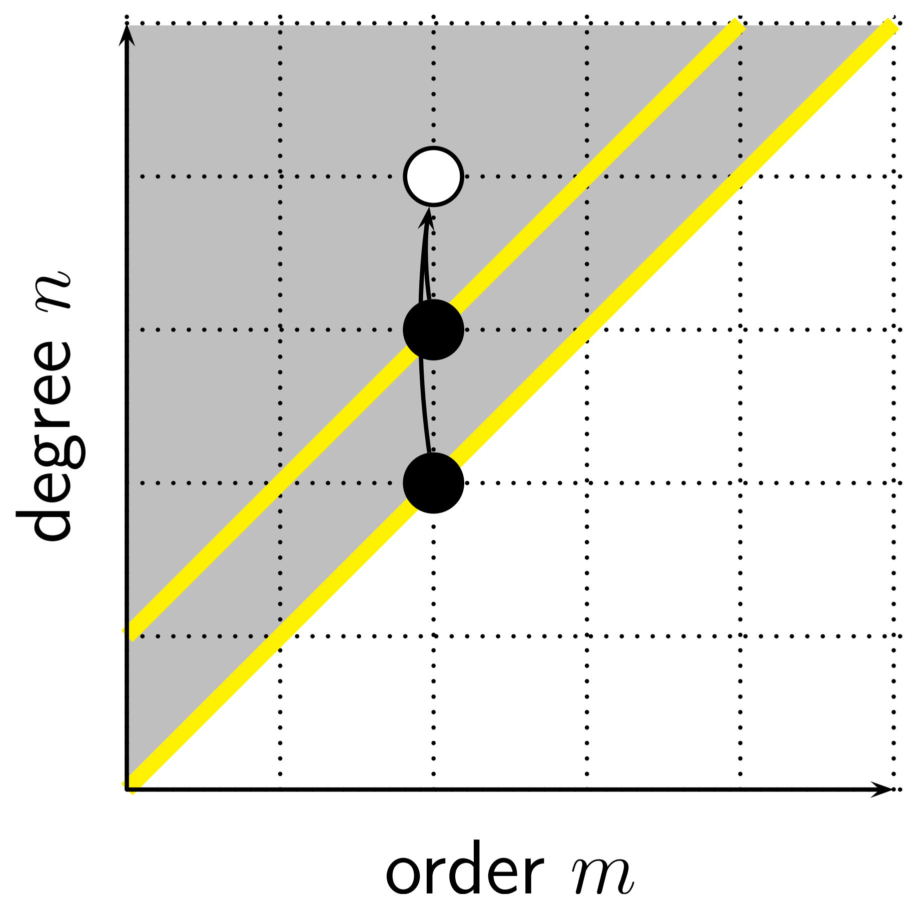
であるとき正規数という。

$$1/B \leq |x| < B. \tag{7}$$

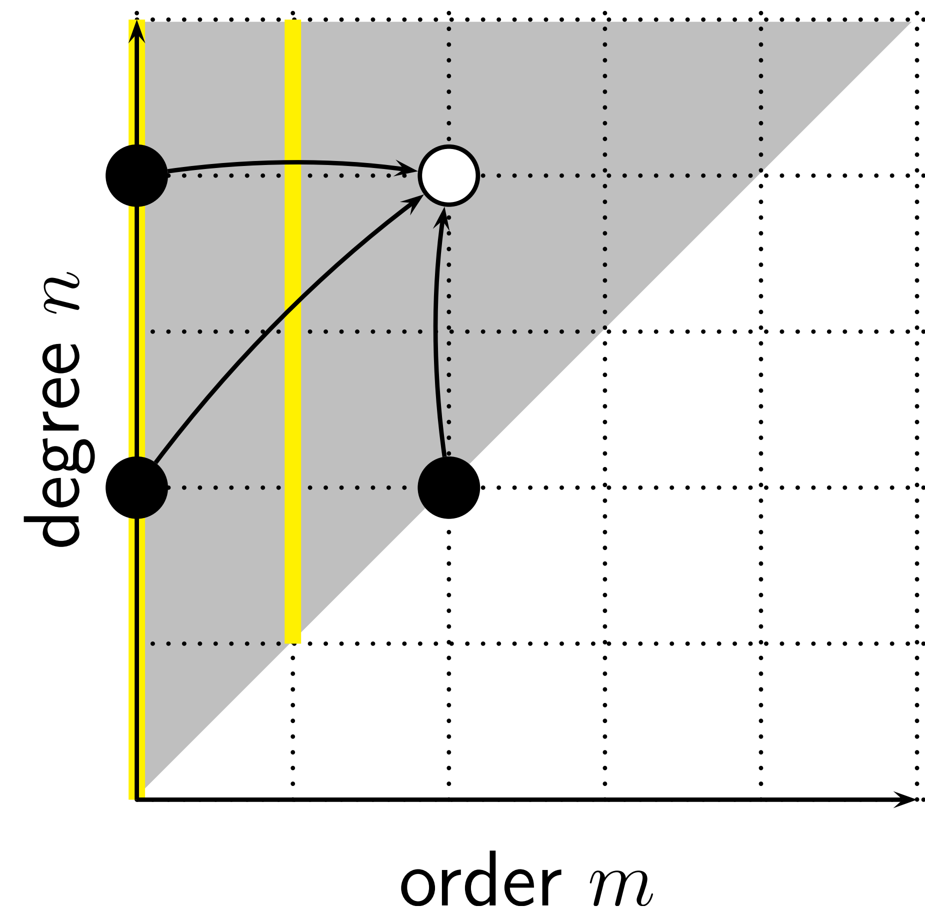
であるときを弱正規数と呼び，正規化を施す。

ルジャンドル陪函数を求める漸化式

(3 点)



(4 点)



4点漸化式

Belousov (1962), Nehrkorn (1990), Swarztrauber (1993)

$$\begin{aligned}\tilde{P}_n^m(\cos\theta) = {} & \sqrt{\frac{(2n+1)(n+m-3)(n+m-2)}{(2n-3)(n+m-1)(n+m)}}\ \tilde{P}_{n-2}^{m-2}(\cos\theta) \\ & - \sqrt{\frac{(n-m+1)(n-m+2)}{(n+m-1)(n+m)}}\ \tilde{P}_n^{m-2}(\cos\theta) \\ & + \sqrt{\frac{(2n+1)(n-m-1)(n-m)}{(2n-3)(n+m-1)(n+m)}}\ \tilde{P}_{n-2}^m(\cos\theta). \qquad (8)\end{aligned}$$

はアンダーフローを回避 (Enomoto et al. 2008; Wedi et al. 2013)

フーリエ展開

Hobson (1931)

$$\tilde{P}_n(\cos\theta) = \sqrt{\frac{2n+1}{2}} 2 \frac{1\cdot 3\cdot 5\cdots(2n-1)}{2\cdot 4\cdot 6\cdot\cdots\cdot 2n}\Bigg[\cos n\theta + \frac{1\cdot n}{1\cdot(2n-1)}\cos(n-2)\theta + \frac{1\cdot 3}{1\cdot 2}\frac{n(n-1)}{(2n-1)(2n-3)}\cos(n-4)\theta + \frac{1\cdot 3\cdot 5}{1\cdot 2\cdot 3}\frac{n(n-1)(n-2)}{(2n-1)(2n-3)(2n-5)}\cos(n-6)\theta + \cdots\Bigg]. \tag{9}$$

$\tilde{P}_n^1(\cos\theta) = -[n(n+1)]^{-1/2}\mathrm{d}\tilde{P}_n^0(\cos\theta)/\mathrm{d}\theta$ (Belousov 1962).

倍率因子

$\cos n\theta$ の係数

$$a_{n,n} = \sqrt{\frac{2n+1}{2}\frac{(2n-1)!!}{2^{n-1}n!}}. \tag{10}$$

Swarztrauber (2002) は $a_{n,n}$ を次の式から計算

$$a_{n,n} = \sqrt{1-\frac{1}{4n^2}}a_{n-1,n-1}. \tag{11}$$

$a_{1,1} = \sqrt{3/2}$（1 に正規化）

しかし，式(11) の $1/4n^2$ は，n に伴って機械 $\epsilon = 2.2204 \times 10^{-16}$（倍精度）に漸近し，1 に対して極めて小さくなる。

倍率因子の別の表し方

誤差を避けるには式(11)を次のように表せば良い。

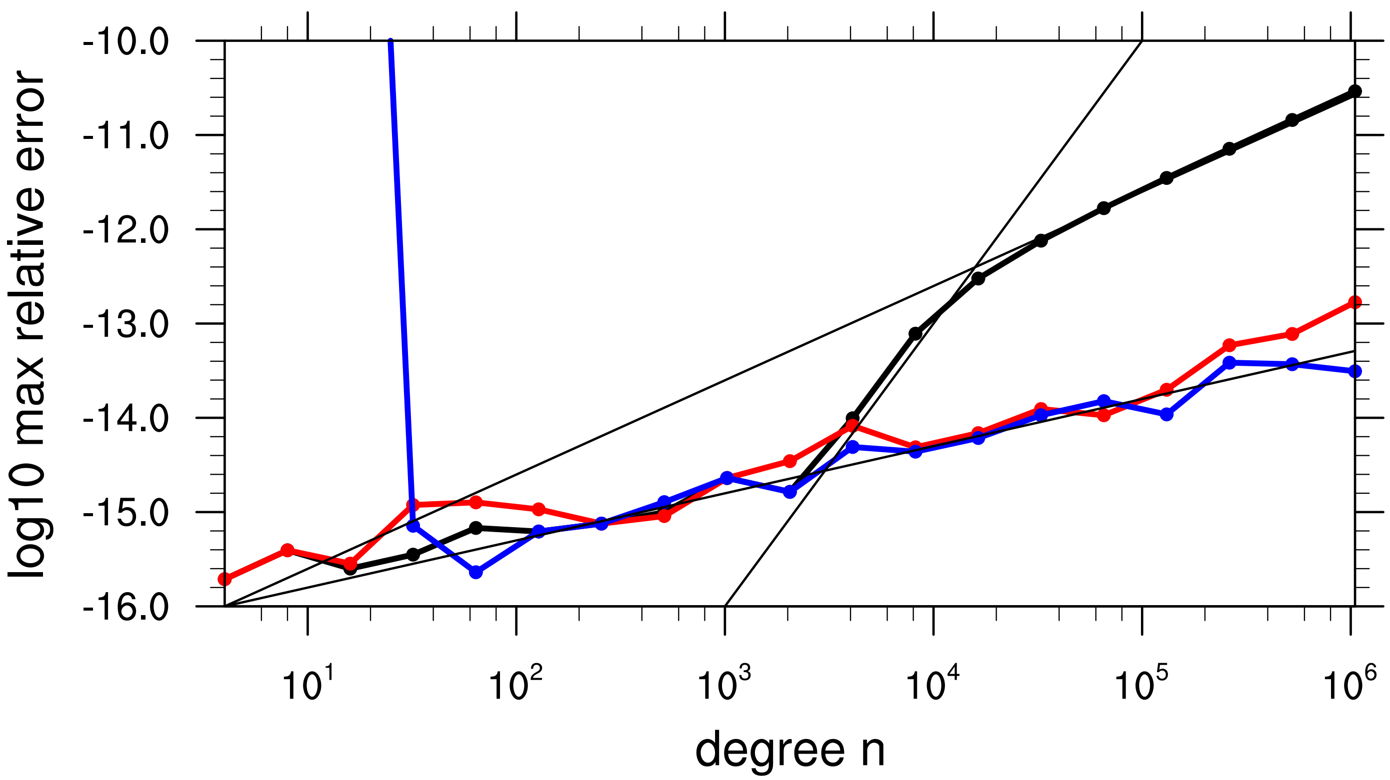
$$a_{n,n} = \frac{\sqrt{(2n-1)(2n+1)}}{2n} a_{n-1,n-1}. \tag{12}$$

$$a_{n,n} = \sqrt{\frac{2n+1}{2}} \frac{\Gamma(2n+1)}{2^{2n-1}\Gamma^2(n+1)}. \tag{13}$$

ここで$\Gamma(n+1) \equiv n!$はガンマ函数 (Swarztrauber 2002).

$$\Gamma(n+1) = n^n e^{-n}\sqrt{2\pi n}\left(1 + \frac{1}{12n} + \frac{1}{288n^2} - \frac{139}{51840n^3} - \frac{571}{2488320n^4} + \frac{163879}{209018880n^5} + \frac{5246819}{75246796800n^6} - \frac{534703531}{902961561600n^7} + \dots\right). \tag{14}$$

フーリエ係数の最大相対誤差

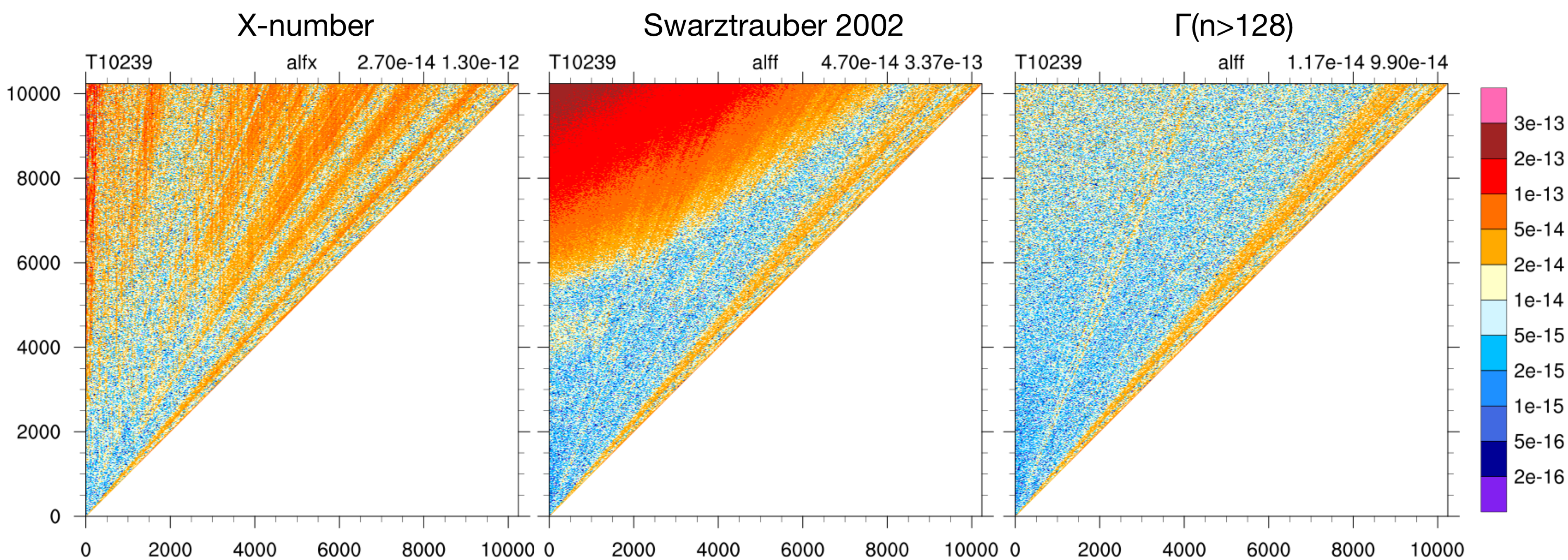


黒: Swarztrauber (2002), 赤: 式(12), 青: Γ函数

$\epsilon(x_i)$を4倍精度に対する誤差すると最大相対誤差は

$$\mathrm{mr}(x_i) = \max_i |\epsilon(x_i)|/|x_i|,$$

T10239


X-number
T10239
alfx
2.70e-14 1.30e-12
Swarztrauber 2002
T10239
alff
4.70e-14 3.37e-13
Γ(n>128)
T10239
alff
1.17e-14 9.90e-14
0
2000
4000
6000
8000
10000
3e-13
2e-13
1e-13
5e-14
2e-14
1e-14
5e-15
2e-15
1e-15
5e-16
2e-16

相対誤差（relative precision）

$$e_{\mathrm{rp}} = \frac{\delta A}{A_{\mathrm{r}}} \tag{15}$$

ここで

$$\delta A \equiv \sum_{n=0}^{M}\sum_{m=0}^{n}\left|\tilde{P}_n^m(\cos\theta) - \hat{P}_n^m(\cos\theta)\right| \tag{16}$$

$$A_{\mathrm{r}} \equiv \sum_{n=0}^{M}\sum_{m=0}^{n}\left|\hat{P}_n^m(\cos\theta)\right| \tag{17}$$

$\hat{P}_n^m(\cos\theta)$ は4倍精度の拡張浮動小数点数法で計算

恒等式

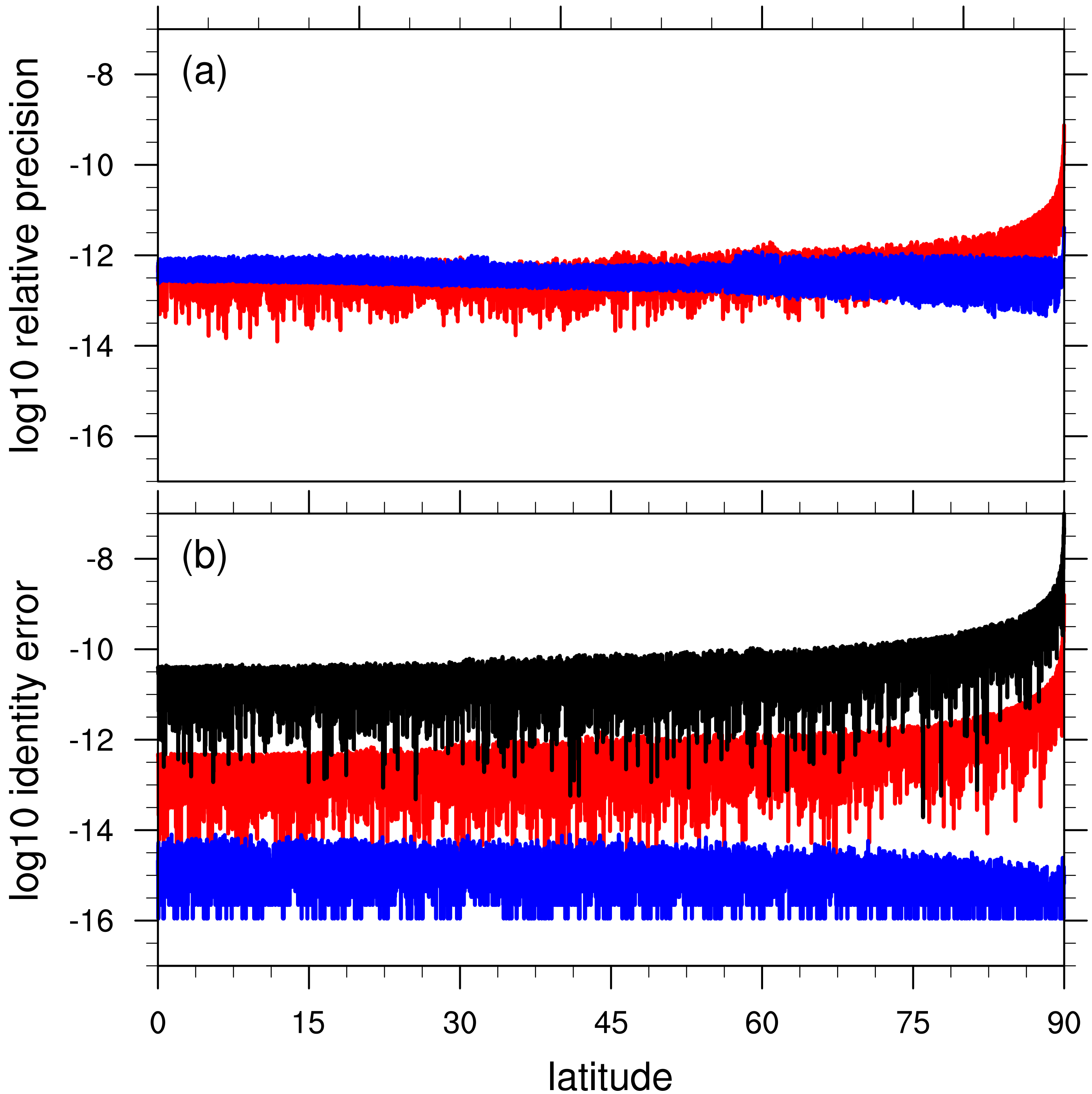
$$e_{\mathrm{id}} = \left| \frac{I - (M+1)^2}{(M+1)^2} \right| \tag{18}$$

ここで

$$I = \sum_{n=0}^{M} \sum_{m=0}^{n} \left[\overline{P}_n^m(\cos\theta) \right]^2 = (M+1)^2 \tag{19}$$

完全正規化されたルジャンドル陪函数 $\overline{P}_n^m(\cos\theta)$ は $m=0$ で2に，$m>0$ で4に正規化 (Holmes and Featherstone 2002)

T10239



X-number

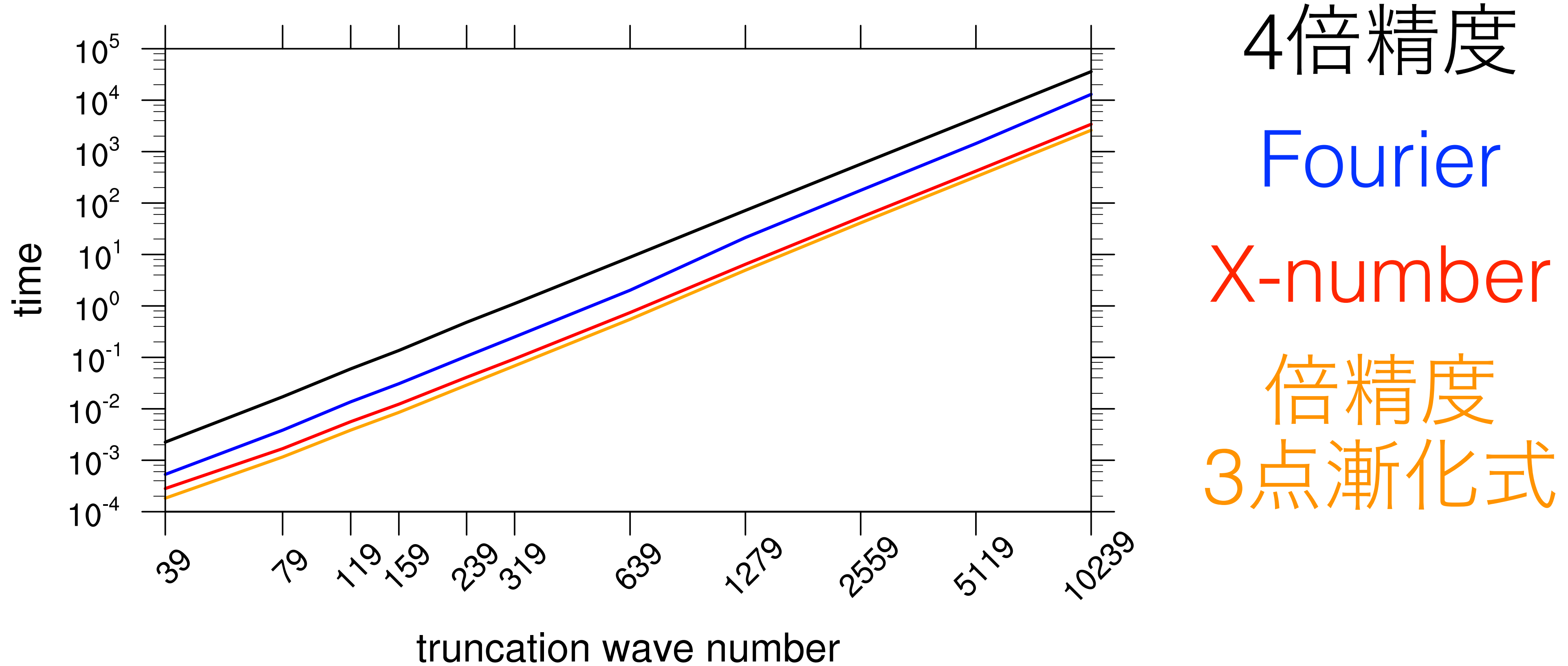
Fourier

4倍精度+20

X-number

Fourier

CPU時間の解像度依存性



逐次 Mac Pro 2013 3.5 GHz 6 コア Intel Xeon E5, 32 GB メモリ

まとめ

- 3点漸化式は切断波数が1700程度でアンダーフローのため破綻。
- 拡張浮動小数点数や4点漸化式でアンダーフローを回避可。
- 4点漸化式は$n > 2048$で誤差が増大する。
- 誤差の原因となる倍率因子の式を書き換えることにより，誤差はO($\sqrt{n}$)の増大に抑制できる。
- 4点漸化式は拡張浮動小数点数よりも精度の点で有利。
- 計算コストや並列化は拡張浮動小数点数のほうが有利。

参考文献

Belousov, S. L., 1962: *Tables of normalized associated Legendre polynomials*. Pergamon Press, New York.

Enomoto, T., A. Kuwano-Yoshida, N. Komori, and W. Ohfuchi, 2008: Description of AFES 2: Improvements for high-resolution and coupled simulations. *High Resolution Numerical Modelling of the Atmosphere and Ocean*, K. Hamilton and W. Ohfuchi, Eds., Springer New York, chap. 5, 77–97.

Fukushima, T., 2011: Numerical computation of spherical harmonics by extending exponent of floating point numbers. *J. Geodesy*, **86**, 271–285.

Hobson, E. W., 1931: *The theory of spherical and ellipsoidal harmonics*. Cambridge University Press, Cambridge, UK.

Holmes, S. A. and W. E. Featherstone, 2002: A unified approach to the Clenshaw summation and the recursive computation of very high degree and order normalised associated legendre functions. *J. Geodesy*, **76**, 279–299.

Nehrkorn, T., 1990: On the computation of Legendre functions in spectral models. *Mon. Wea. Rev.*, **118**, 2248–2251.

Ohfuchi, W., et al., 2004: 10-km mesh meso-scale resolving simulations of the global atmosphere on the Earth Simulator—preliminary outcomes of AFES (AGCM for the Earth Simulator)—. *J. Earth Simulator*, **1**, 8–34.

Smith, J. M., F. W. Oliver, and D. W. Lozier, 1981: Extended-range arithmetic and normalized Ledendre polynomials. *J. ACM. Trans. Math. Software*, **7**, 93–105.

Swarztrauber, P. N., 1993: The vector harmonic transform method for solving partial differential equations in spherical geometry. *Mon. Wea. Rev.*, **121**, 3415–3437.

Swarztrauber, P. N., 2002: On computing the points and weights for gauss–legendre quadrature. *SIAM J. Sci. Comput.*, **24**, 945–954.

Yakimiw, E., 1996: Accurate computation of weights in classical Gauss-Cristoffel quadrature rules. *J. Comp. Phys.*, **192**, 406–430.

Wedi, N. P., M. Hamrud, G. Mozdzynski, 2013: A fast spherical harmonics transform for global NWP and climate models. *Mon. Wea. Rev.*, **141**, 3450–3461.