

フェルミの黄金律

石川健三

平成 27 年 2 月 23 日

目次

第1章	量子力学における状態遷移	1
1.1	波動の干渉・回折	1
1.2	状態遷移と黄金律	2
1.3	量子化とシュレーディンガー方程式	6
1.3.1	量子化	6
1.3.2	定常状態	7
1.3.3	状態遷移	8
1.4	散乱の一般論	11
1.4.1	散乱行列の標準形： $T = \infty$	12
1.4.2	散乱におけるエネルギー保存則	13
1.4.3	散乱における保存量	14
1.4.4	散乱と束縛状態	16
1.5	散乱断面積の公式 $T \rightarrow \infty$	17
1.6	有限の T の $S[T]$ における運動エネルギー非保存	18
1.7	黄金律の有限 T 補正	20
1.7.1	有限 T の散乱行列	20
第2章	粒子と波の融合：量子場	23
2.1	紫外発散と繰りこみ	23
2.2	スカラー場 ϕ	24
2.3	ϕ^3 相互作用	26
2.3.1	崩壊	27
2.3.2	$v = constant$ の波動で、cut off momentum がある場合	31
2.3.3	Imaginary mass	31
2.3.4	外線の運動量	32
2.3.5	多粒子状態からの相関関数	33
第3章	相互作用する場と波動:1 QED	35
3.1	自由場	35
3.2	電磁相互作用	35

3.3	コンプトン散乱	35
3.4	低エネルギー極限	35
第4章	相互作用する場と波動:2 QFD	37
4.1	弱い相互作用	37
4.2	ニュートリノ	37
第5章	相互作用する場と波動;3 重力	39
5.1	重ね合わせと非線形相互作用	39
5.2	長距離極限は古典極限か?	39
第6章	複合場の遷移	41
6.1	束縛状態の重心運動	41
6.2	Constraints (拘束条件)	44
6.3	電磁遷移	46
6.4	局所場近似	46
第7章	まとめ	47

第1章 量子力学における状態遷移

参考論文

1. K.Ishikawa and Y.Tobita, Prog.Theor.Exp.Physics(2013),073B02(54pages)
“Finite-size corrections to Fermi’s golden rule I Decay rates”
2. K.Ishikawa and Y.Tobita, Annals of Physics 344(2014)118-178
“Matter-enhanced transition probability in quantum field theory”
3. K.Ishikawa, T.Tajima, and Y.Tobita, Prog.Theor. Exp.Physics(2015),013B02(33pages)
“Anomalous radiative transitions”
4. K.Ishikawa, T. Nozaki, M.Sentoku, Y.Tobita,(2014)
“Probing neutrino in muon decays at finite distance”
“Energy spectrum of the electron in muon decays at finite distance”(2015)
- 5.Others

1.1 波動の干渉・回折

波動は粒子とは対照的な性質をもつ。粒子は、大きさを無視できる小さな物体であり、一つの位置座標で指定される。その位置座標が時間と共に変化する運動が、ニュートンの力学法則で明らかとなる。一方波動は、時間・空間の広がった領域における変位の全体で指定され、空間の各点で波動方程式に従う。粒子にはない波動のもつ特徴の一つは、重ね合わせが出来ることであり、重ね合わせにより形成された波動は、もとの波とは大きく異なる性質を示すことがある。干渉や回折が波動の示す代表的な現象であり、わずかに異なる複数の波動を重ね合わせた結果、それぞれとは大きく異なる波動が、発現する。例えば、わずかに波数が異なる一様な二つの波を重ね合わせたときに形成される長い波長の “うなり ”、2重スリットを通過した光や電子がスクリーンに示す干渉パターン、等多くの例が知られている。

波動は、古典波動と量子波動の2種類に分類される。古典波動には、音波、水面波等の媒質の変位の振動や、真空中の電場や磁場の振動である電磁波があり、量子波動には、電子波や物質波がある。量子論では、波動は確率波であり、物理量としての普遍性を持つ確率を決定する。いずれの波動も、干渉や回折を示すが、干渉・回折パターンの現れる様子は両者で大きく異なる。古典論では、変位の波動に現れるパターンは、強度の変化を通して、直接測

定される。一方、量子論では、波動に現れるパターンは、確率で決まる分布関数として観測される。確率分布は、多数の測定による統計的な分布から決定される。

波動の運動は、線形の波動方程式で記述され、解は重ね合わせの原理を満たす。

1. 古典波動の一つは、電磁波であり真空中で電磁場ポテンシャルは

$$[\frac{\partial^2}{c^2 \partial t^2} - \vec{\nabla}^2] A_\nu(x) = 0 \quad (1.1)$$

を満たす。電磁場ポテンシャルの傾きや回転が、電場や磁場である。

2. 粒子の量子的波動の一つは、ポテンシャル $V(x)$ 中の電子の波動関数であり、シュレディンガー方程式

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \psi(x) = [\frac{-\hbar^2 \vec{\nabla}^2}{2m} + V(x)] \psi(x) \quad (1.2)$$

を満たす。 m は電子の質量、 $\hbar = \frac{h}{2\pi}$ で \hbar はプランク定数である。 $\psi(x)$ は、位置座標 x における電子の波動関数であり、複素数である。

3. 場（波）の量子的波動

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \Psi(t) = H \Psi(t) \quad (1.3)$$

後の章でくわしく説明されるように、 $\Psi(t)$ や H は多体状態空間における状態ベクトルやハミルトニアンであり、多体系の状態をひとつのベクトル空間で表現している。多体状態の重ね合わせによって引き起こされる物理が発現する。

ここでは、方程式 (1.2) 並びに (1.3) で記述される量子的波動を調べる。二つで、重ねあわせの原理に従う物理状態に違いがある。(1.2) は、1 粒子の波動関数が従う方程式であり、1 粒子状態が重ね合わせの原理に従い、干渉や回折パターンを示す。多くの場合、 $V(x)$ の効果で、干渉や回折が引き起こされる。この点は、古典的な波動と同様である。一方、(1.3) は、多粒子の波動関数が従う方程式であり、多粒子状態が重ね合わせの原理に従い、干渉や回折パターンを示す。これには、古典的な波の量子系も含まれる。多体状態で粒子数の異なる状態間の重ね合わせで起きる干渉・回折は、一体ポテンシャル $V(x)$ で引き起こされるのではなく、多体相互作用を起源とする。そのため、普遍的な物理量と関連する。また 1 粒子状態間のものより大きな効果となり、広い分野で起きる。例えば、光は 1 の方程式で記述される古典電磁波として干渉・回折を示し、さらに 3 の方程式で記述される量子状態として量子的な干渉・回折を示す。前者は既に長い歴史があるが、後者は浅い歴史しかない。状態の遷移に伴う干渉・回折は、本著者たちにより最近明らかにされた。

1.2 状態遷移と黄金律

ミクロな物理系は、量子力学で理解される。多くの現象の中で、粒子の崩壊や状態の遷移は、量子力学の基本をなすシュレディンガー方程式を使い解析される。明解な数学的方法

に基づく摂動論による近似解から、遷移確率が計算される。この方法は、幅広い分野の多くの現象の理解や、量子力学の実験的な検証で威力を発揮してきた。そのため遷移は、ディラック、シッフ、ランダウーリフシッツ、メシア、等により著された世界標準となっている教科書や国内の教科書で、詳しく説明されている。遷移の解析の中心をなすのは、"フェルミの黄金律"である。一般論から身近な物理現象の具体論まで"フェルミの黄金律"によって計算された遷移率が用いられ、すべての現象に適用された。黄金律は、何の疑問点もないかのように説明されている。しかしながら、黄金律は原理や法則ではなく、計算結果のわかりやすいためである。当然ながら、仮定や適用限界を含むはずである。特に、波動現象につきものの境界条件や、パラメーターが大きい時の漸近形は、あまり明解ではないことがある。これらを明らかにすると共に、今までの解析に隠れている仮定と黄金律の補正を明らかにする。非常に幅広い分野に適用されてきた黄金律に関する新たな事柄は、多くの現象の理解や新たな知見を与え、また今までの理解の見直しを迫ることにもなりうる。

原子による光の吸収・放射は、光の不連続スペクトルが観測されたことより、古典力学では理解不可能であり、その後の量子力学への道を拓いた歴史的な問題の一つである。不連続スペクトルの理解に向けて、ボーアの前期量子論や、その後のシュレーディンガー、ハイゼンベルグ、ディラック他による量子力学の構築がなされた。量子力学で、エネルギー準位が E_f, E_i である原子の定常状態間の遷移で放射される光は、ボーアの条件(運動エネルギー保存則)

$$h\nu = E_f - E_i \quad (1.4)$$

を満たす時、不連続なスペクトルとなる。量子力学が構築された後、ディラックが、摂動論にもとずいて定量的な計算を行い、この結果を含む時間間隔 T に比例する遷移確率

$$P = \Gamma T \quad (1.5)$$

$$\Gamma = 2\pi \int d\beta \delta(E_\alpha - E_\beta) |F_{\alpha\beta}|^2 \quad (1.6)$$

の遷移振幅 $F_{\alpha\beta}$ による表式を求めた。 Γ は、単位時間当たりの確率、遷移率、であり、時間によらない定数である。この計算を行い式(1.6)にたどり着いた頃、ディラックは一方で、相対論的なシュレーディンガー方程式の立式を行った。ディラック方程式として有名なこの式の正・負エネルギー解の困難をいかに乗り越えるか思案していた頃、このような具体的な問題にも取り組んでいたのは、興味深い。遷移確率の論文からは、求めた遷移率(1.6)が、エネルギー保存則や、エルゴード性を満たし、同時に古典的な統計に従うことを確認して、"やはり量子力学は正しい"との自信を強くしたことが、うかがえる。それから約20年を経て第2次世界大戦が終了した直後、フェルミが講義で、上の公式を"黄金律"と呼んで使った。量子力学が関与する現象や自然科学が、大幅に広がった当時あって、どの分野でも共通に使える公式の広い汎用性から、このような名で呼んだと推測する。"フェルミの黄金律"は、広い分野で使われ名前も定着した。

ところで、シュレーディンガー方程式の摂動論に基づく黄金律の導出は、物理に関係する分野に携わる誰もが、一度は自分で考え、問題を解き、場合によっては頭を悩ました経験を持つであろう。教科書に書いてあることは、実はそれほどすっきりしたものではなく、図や絵に基づいてもっともらしい説明が与えられている。これをそのまま受け入れ、何らの疑問を持たない人も多いかもしい。逆に、自分には理解出来ない点があると、思った人は、本著者以外に、いると想像する。

著者達は、最近ニュートリノ振動の問題を契機にして、フェルミの黄金律の再検討を行い、遷移確率は、従来の式 (1.5) からの修正版

$$P = \Gamma T + P^{(d)} \quad (1.7)$$

で表されることを見つけた。ここで新たに加わった $P^{(d)}$ は、遷移前後の波動関数の重なりによって生じている。保存系では、運動エネルギーと相互作用エネルギーの和が、一定に保たれ、相互作用エネルギーの変化は、運動エネルギーの変化を引き起こす。この事実は、古典力学でも量子力学でも、共通である。古典力学における位置エネルギーの役割を、量子力学の波の重なりによる相互作用エネルギーが、果たす。だから、波の重なりが時間的に変化すると、相互作用エネルギーが変化し、運動エネルギーも変化する。この結果、運動エネルギー保存則は破れ、共役な変数である時間間隔 T に依存する遷移確率が、 $P^{(d)}$ としてあらわれる。だから、 $P^{(d)}$ は運動エネルギー保存則を破る。例えば、原子の異なる状態間の 2 体遷移で放射される光は (1.7) 式のそれぞれに対応する 2 成分からなる。(1.4) を満たす不連続スペクトルの成分の全確率は ΓT であり、連続スペクトルの成分の全確率は $P^{(d)}$ である。遷移前後の状態が、空間的に小さな波動関数であれば波の重なりは無視できる。そのため、粒子のように振る舞い、補正項 $P^{(d)}$ は無視でき、不連続スペクトルだけから成る。しかしながら、状態が大きな波である場合、大きな重なりが生じるため補正項 $P^{(d)}$ 、すなわち連続スペクトルが無視できない。ボーアによって、不連続スペクトルの存在を示すには、量子力学が不可欠であることが示された。その後、連続スペクトルの詳細な検討はなされず、むしろ忘れられていた。本稿の目的の一つは、確率 $P^{(d)}$ の具体的な計算を行い、連続スペクトルをシュレーディンガー方程式に基づいて解析することである。このような状況は、現代的な問題では沢山あることがわかってきた。また、昔から知られたいくつかの現象も、このように把握しなかったために、正しい理解が出来なかったことがわかってきた。

T についての一次式は、傾きと切片で決定され、例外を除いて有限の定数項 (切片) をもつ。遷移確率も、同じであり、傾きと切片で規定される。良く知られているように、傾き Γ は粒子的な起源と性質を持ち、運動エネルギーの保存則を満たす。ところが、切片 $P^{(d)}$ は波動的な起源と性質をもち、運動エネルギーの保存則を満たさない。 Γ は、今まで十分に調べられてきたが、 $P^{(d)}$ は、著者たちの研究を除けば、皆無である。

ボーアの条件式は、不連続スペクトルに関するものであり、連続スペクトルには言及しない。"2 体崩壊では連続スペクトルは存在しない"と決めつけるのは早とちりのようなものである。不連続スペクトルは、観測も理論との比較が比較的容易である。だから、理論の正

当性や法則を検証するには、適している。そのため、実験では、不連続スペクトルに着目し、連続スペクトルについて問わないことが多い。連続スペクトルについて確かな実験を行うのは難しく、測定には系統誤差の見積もり等易しくない点を多々含むため、実験の対象にはなりにくい。だから、その存在、値、性質等については、精密な結果は今でも多くない。言うまでもないが、自然現象には、両スペクトルが寄与する。そのため、自然現象をきちんと理解するには、連続スペクトルを無視することは出来ない。特に、連続スペクトルが、大きな寄与を与える現象を、不連続スペクトルで理解するのは、無理であり、間違った帰結に至る危険がある。基礎的な科学である物理の結果は、多くの事柄と関連することが多いため、この点は重要であり結果は厳正に扱われる。

$P^{(d)}$ は小さく無視できるとみなされてきた。その根拠は、量子力学におけるドブロイ波長がプランク定数と運動量から

$$\lambda = \frac{h}{p} \quad (1.8)$$

と表され、小さなプランク定数を反映した極微のサイズであることによる。定常状態の波動関数は、指数関数の時間依存部が分離した形となり、空間成分は上記のドブロイ波長を固有な長さとする。そのため、定常状態の波動現象はドブロイ波長のスケールで生じ、マクロなスケールでは、波動効果は打ち消されてしまう。光学において元来成立する波動光学が、良い近似で幾何光学に置きかえられるのと同じに、有限でマクロな値の T での遷移確率は、 T を無限大に近似することが、極めてよいと仮定されてきた。この論旨は、多くの教科書で採られているが、深刻な問題点を含む。時間を分離して空間座標の関数として波動関数を考察することの正当性が確かでなく、 $P^{(d)}$ の見積もりがされていないことである。とくに、古典物理での光の強度と、量子力学での遷移の確率は、異なる。このため、同じ波動現象で古典物理の光学で成立することが、量子力学でそのまま適用できる保障は、あまりない。我々は、 $P^{(d)}$ の具体的な計算を行った。その結果、 $P^{(d)}$ が、ドブロイ波長とは異なるスケール

$$L = \frac{h}{mc} \times \frac{E}{mc^2} \quad (1.9)$$

で規定されることがわかった。上の式で、 c 、 m 、 E は、光速、粒子（量子）の質量とエネルギーであり、 $\frac{h}{mc}$ はコンプトン波長、 $\frac{E}{mc^2}$ は、ローレンツ変換のブースト因子である。二つの積 L は、ニュートリノや物質中の光子のような軽い粒子では、ドブロイ波長 λ よりはるかに大きくなる。この時、 $P^{(d)}$ は無視できない大きさとなる。しかし、電子、ミューオン、中間子、核子等粒子では、質量が大きいため L は、 λ よりはるかに大きいわけではない。この時、 $P^{(d)}$ は、無視できる場合と無視できない場合とがありうる。エネルギーが大きくなると、ドブロイ波長は短くなるが、 L は逆に長くなる。だから、 $P^{(d)}$ は、より大きくなる。

有限質量の通常の粒子の現象では、 $P^{(d)}$ は極めて小さく無視出来る場合が多い。このような現象や問題に限って考察する際は、 $P^{(d)}$ を無視してよい。いつも、 $P^{(d)}$ を無視出来た状況にいと、大きな $P^{(d)}$ の現象は、自然界にないと勘違いしがちである。しかし、この事実は、

$P^{(d)}$ を無視できない物理現象が、存在しないことを意味せず、確認を要することである。もしも、理論的に $P^{(d)}$ が大きいことがわかった場合や、この様な現象がある(らしい)ことが分かったら、物理屋として真摯に再考することには、誰も否定しないであろう。

誰でも、自分で見聞きしたことは、容易に想像できて実感をもって把握できるが、自分で見聞きしないことの把握は難しい。そのようなことは、存在しないのと等しいため、存在しないと当人が思いこむことさえある。科学は、普遍的に理解できることを体系化して構成されている。ある時点で、わからないことは除外され、体系には登場しない。しかし、そのような事柄が、存在しないと思いつくのは、早計である。存在するか否かがわからない場合があるからである。若い人は、過去の成果を勉強し、得た知識をもとに新たな研究を行う。この時、書かれていないものは、存在しないみなすことは、問題ない場合も多いが、間違いを引き起こすこともある。一般的に、新しい問題や、未解決の問題を考察する場合には、基本に戻ることが大事である。どこまで戻る必要があるかは、初めはわからない。どこまでが正しいと確認されていて、どこからが仮説に近い仮定なのか？ある事柄が、疑いの余地があるのか無いのか、またある事実が、存在しないのか存在しないと仮定して体系が出来ているのか、等を知ることは、大事である。

量子力学は、古典力学とは異なり我々の直感と一致しない部分を含んでいる。そのため、数十年にわたり様々な観点から検討されてきて、現在に至っている。さらに、量子力学の結果・成果は、幅広い分野で使われている。この間、遷移は、確率の T に比例する項 ΓT に基づいて、定数項 $P^{(d)}$ は考慮されずに考察されてきた。しかしながら、この事実は、定数項 $P^{(d)}$ の存在を否定するものではない。本稿では、量子力学の基本に則る解析を行い、遷移確率における定数項 $P^{(d)}$ を議論する。 $P^{(d)}$ が、無視出来ない場合を指摘し、具体的な自然現象に適用してその特徴や帰結を、述べたい。

1.3 量子化とシュレーディンガー方程式

保存系における量子力学を簡単に復習しよう。

1.3.1 量子化

ある保存系が、力学変数 $q_i (i = 1, N)$ とその時間についての微分 $\dot{q}_i (i = 1, N)$ の関数であるラグランジアン $L(q_i, \dot{q}_i)$ で記述されているとき、共役な運動量 p_i は

$$p_i = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \quad (1.10)$$

であり、変数 q_i, p_j は、古典力学でポアソン括弧、

$$\{q_i, p_j\}_{(PB)} = \sum_l \left(\frac{\partial q_i}{\partial q_l} \frac{\partial p_j}{\partial p_l} - \frac{\partial q_i}{\partial p_l} \frac{\partial p_j}{\partial q_l} \right) = \delta_{ij} \quad (1.11)$$

量子力学で交換関係

$$[q_i, p_j] = q_i p_j - p_j q_i = i\hbar \delta_{ij} \quad (1.12)$$

を満たす。力学の方程式は、ポアソン括弧や交換関係を使い表される。ハミルトニアンは、ラグランジアンからルジャンドル変換

$$H = \sum_l p_l \dot{q}_l - L(q_i, \dot{q}_i) \quad (1.13)$$

で q_i, p_j の関数として求められ、古典系でも量子系でも時間発展を引き起こす。運動方程式は古典系で、実数値をとる力学変数に対する

$$\dot{q}_i = \{q_i, H\}_{(PB)}, \dot{p}_i = \{p_i, H\}_{(PB)} \quad (1.14)$$

であり、量子力学で、演算子としての運動方程式、

$$\dot{q}_i = \frac{1}{i\hbar} [q_i, H], \dot{p}_i = \frac{1}{i\hbar} [p_i, H] \quad (1.15)$$

である。また、物理系を表す波動関数は、シュレーディンガー方程式

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \Psi(t, q_i) = H(p_i, q_i) \Psi(t, q_i) \quad (1.16)$$

に従い、時間発展する。ここでは、変数 q_i を対角形とする表現を適用した。

系のすべての物理量は、波動関数から決定され、計算される。量子力学の古典力学とは大きく異なる点は、事象が発現する確率が普遍性を持つ物理量となることである。一つの事象のおきる確率は、通常、1より小さい。そのため、この事象は、必ず起きるわけではなく、同じ条件で始めて他の事象が起きる場合もある。このように、確率が1である事象は例外であり、この場合を除いて、物理事象は一意的に決まるわけではない。様々な事象が起こりうることになり、またどの事象が起きるのかを、予め知ることはできない。事象が発現する確率が決まることは、沢山の事象を集めた統計集団は、観測するか否かに無関係に、量子力学に則った分布に従う。

1.3.2 定常状態

ハミルトニアン H の固有状態は、固有値方程式

$$H\phi = E\phi \quad (1.17)$$

を満たす。 H はエルミートな演算子であり、固有値 E は正定値であり、正か零である。また、シュレーディンガー方程式を満たすため、時間に関しては指数関数

$$e^{\frac{Et}{\hbar}} \phi(q_i) \quad (1.18)$$

であり、 t を a ずらすと、

$$e^{\frac{E(t+a)}{i\hbar}} \phi(q_i) = e^{\frac{Ea}{i\hbar}} e^{\frac{Et}{i\hbar}} \phi(q_i) \quad (1.19)$$

と、もとの関数に比例する。比例係数は、力学変数に依存しない位相因子であるので、得られた関数は、もとの関数に定数係数を除いて一致する関数であり、同じ物理状態を表している。

3次元空間におけるポテンシャル $V(\vec{x})$ 中の質量 m の質点では、ラグランジアンは、

$$L = \frac{m}{2} \dot{\vec{x}}^2 - V(\vec{x}) \quad (1.20)$$

であり運動量とハミルトニアンが

$$p_i = m\dot{x}_i, H = p_i\dot{x}_i - L = \frac{p^2}{2m} + V(\vec{x}) \quad (1.21)$$

で記述される。引力ポテンシャルでは、固有状態は束縛状態と散乱状態の異なる性質をもつ2種類に分類される。前者の波動関数は、中心の位置の近傍で絶対値が有限な値をとり、中心から離れた位置では急速に小さくなる。波動関数の絶対値の2乗の空間積分が、収束する束縛状態を表している。一方後者の波動関数の絶対値の2乗の空間積分は、無限遠まで値を持ち積分が発散する。波動関数が、無限遠まで値を持つことは、無限遠の位置まで。到達する波を表す。この波は、束縛状態ではない散乱状態を表している。束縛状態にある時、対応する粒子は、必ずこの状態の内部にいる、つまり内部にいる確率は、1である。散乱状態は広がっていて、当該状態で表現されている粒子が、確率が1であるような有限領域の条件は、存在しない。

1.3.3 状態遷移

量子力学の様々な物理量の中で、状態の遷移に対する確率が重要である。一つの状態から他の状態への遷移では、両状態を表す波動関数の重なり積分の絶対値の二乗が、これらの遷移事象の発現する確率である。

ハミルトニアンが、自由項 H_0 と相互作用項 H_1 の和

$$H = H_0 + H_1 \quad (1.22)$$

であり、 H_1 が小さい物理系を考える。この系では、物理状態は、主に H_0 によって決まる。 H_0 の固有状態、

$$H_0\phi_l(q_i) = E_0^l\phi_l(q_i) \quad (1.23)$$

は

$$\phi_l(t, q_i) = e^{\frac{E_0^l t}{i\hbar}} \phi_l(q_i) \quad (1.24)$$

と時間発展する。時間に依存する指数部には、時間が経過した際力学変数に依存しない一定の位相部がかかる。波動関数としては不変である。この状態は、時間とともに変化しない状態であるので、定常状態と呼ばれ、自然界で重要な役割をする。位相の角速度は、エネルギー E_0^l をプランク定数で、割った大きさである。

定常状態 $\phi_l(t, q_i)$ は、時間が経過しても同じ状態にとどまるが、ハミルトニアンに小さな摂動項 H_1 が加わった物理系では、別の定常状態に遷移する過程が生ずる。この遷移過程は、方程式

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \psi(t) = (H_0 + \lambda H_1) \psi(t) \quad (1.25)$$

で表される。方程式の解は上の定常状態の一次結合

$$\psi(t) = \sum_l a_l(t) \phi_l(t) \quad (1.26)$$

で表せる。ここで、係数 $a_l(t)$ は、今のところ未定な時間の関数であるが、上の方程式に代入すると満たすべき関係式が得られる。式は、

$$i\hbar \sum_l \left(\frac{\partial a_l(t)}{\partial t} \phi_l(t) + a_l(t) \frac{\partial}{\partial t} \psi(t) \right) = (H_0 + \lambda H_1) \sum_l a_l(t) \phi_l(t) \quad (1.27)$$

と変形され係数についての連立一次方程式となる。方程式の両辺に $\phi_m^*(t)$ をかけて積分することより、さらに関係式は

$$i\hbar \left(\frac{\partial a_m(t)}{\partial t} \right) + a_m E_m^0 = \sum_l (E_l^0 a_l(t) \delta_{l,m} + \lambda a_l(t) \langle \phi_m^*(t) | H_1 | \phi_l(t) \rangle) \quad (1.28)$$

a_l^2 と変形される。この時、係数を λ のべき級数で

$$a_l(t) = \sum_{m=0}^{m=\infty} \lambda^m a_l^m(t) \quad (1.29)$$

と表し、方程式 (1.28) に代入する。この結果、 λ の各次数の係数 $a_l^m(t)$ は、方程式

$$i\hbar \left(\frac{\partial a_l^m(t)}{\partial t} \right) + a_l^m E_l^0 = \sum_n (E_n^0 a_n^m(t) \delta_{n,l} + a_n^{m-1}(t) \langle \phi_n^*(t) | H_1 | \phi_l(t) \rangle) \quad (1.30)$$

を満たす。これは、 $a_l^{m-1}(t)$ と $a_l^m(t)$ の関係を与える漸化式である。 $a_l^0(t)$ より $a_l^1(t)$ 、次に $a_l^1(t)$ より $a_l^2(t)$ 、さらに $a_l^2(t)$ より $a_l^3(t)$ 等次々に係数を求めることができる。

$m = 0$ では、

$$i\hbar \left(\frac{\partial a_l^0(t)}{\partial t} \right) + a_l^0(t) E_l^0 = E_l^0 a_l^0(t) \quad (1.31)$$

より

$$a_l^0(t) = a_l^0 = \text{定数} \quad (1.32)$$

$m = 1$ では、方程式

$$i\hbar\left(\frac{\partial a_l^1(t)}{\partial t}\right) + a_l^1 E_l^0 = E_1^0 a_1^1(t) + \sum_l (a_n^0(t) \langle \phi_n^*(t) H_1 \phi_l(t) \rangle) \quad (1.33)$$

は、

$$i\hbar\left(\frac{\partial a_l^1(t)}{\partial t}\right) + a_l^1 E_l^0 = \sum_n (E_n^0 a_n^m(t) \delta_{n,l} + a_n^{m-1}(t) \langle \phi_n^*(t) H_1 \phi_l(t) \rangle) \quad (1.34)$$

となる。解は、定積分

$$\begin{aligned} a_l^1(t) &= \frac{1}{i\hbar} \sum_l \int_0^t dt' a_n^0(t') \langle \phi_n^*(t') H_1 \phi_l(t') \rangle \\ &= \frac{1}{i\hbar} \sum_l \int_0^t dt' e^{-i\omega t'} a_n^0 \langle \phi_n^* H_1 \phi_l \rangle \\ \omega &= \frac{E_l - E_n}{\hbar} \end{aligned} \quad (1.35)$$

である。ここで、時間積分

$$I(\omega; t) = \int_0^t dt' e^{-i\omega t'} = \frac{1}{-i\omega} (1 - e^{-i\omega t}) \quad (1.36)$$

は、積分区間 t の大きさで性質が変化する ω の関数である。 $I(\omega; t)$ は、大きな t で $\omega = 0$ に鋭いピークを持ち、 $t = \infty$ ではディラックのデルタ関数に比例する、

$$2\pi\delta(\omega). \quad (1.37)$$

また、

$$\begin{aligned} |I(\omega; t)|^2 &= \int_0^t \int_0^t e^{-i\omega(t'-t'')} \\ &= \frac{4 \sin^2(\omega t/2)}{\omega^2} \approx 2\pi t \delta(\omega) \end{aligned} \quad (1.38)$$

であり、近似的に t に比例する。 t が大きな有限値である時の $I(\omega; t)$ の性質については、後で考察する。

以上の計算では、状態 ψ が近似的に H の固有状態 ϕ_i にあるとした。この計算結果の応用として、 $t = 0$ に $\phi_L(t)$ にある状態が、後の t に状態 $\phi_l(t)$ にいる確率を求める。この確率は、係数の絶対値の二乗

$$|a_l(t)|^2 \quad (1.39)$$

に一致する。 $F = \langle \phi_n^* H_l \phi_l \rangle$ とし、Taylor 展開 $F(\omega) = \sum_l C_l \omega^l$ とエネルギー幅 Δ_E で、

$$P = \int_{E_\alpha - \Delta_E}^{E_\alpha + \Delta_E} |I(\omega; t) T|^2 F(E_\beta - E_\alpha) \quad (1.40)$$

$$= 2\pi T C_0 \left\{ 1 + \sum_{l \geq 2} C_l / C_0 \frac{\Delta_E^{l-1}}{2\pi T (l-1)} \right\}$$

となる。 Δ_E が有限であれば、上の積分は収束し、無限であれば発散する。

確率の例

簡単な例題で、確率の意味を考えよう。図のような中を二つに仕切られた箱のなかに電子を入射させた時、この電子は中のAまたはBのどちらにいる。しかしどちらであるか決まるだろうか？ Aの状態を ψ_a Bの状態を ψ_b とすると、電子の状態が、複素数 z_a と z_b を係数とする波動関数

$$\psi = a\psi_a + b\psi_b \quad (1.41)$$

で表わされ時、電子はどちらにいるか決まっていない。このような状態で、電子を何度も観測すると、aにいる確率は

$$|z_a|^2 \quad (1.42)$$

であり、bにいる確率は

$$|z_b|^2 \quad (1.43)$$

であることがわかる。各観測の前に、あらかじめどちらにいるかを決定する術はない。

1.4 散乱の一般論

波が、ミクロな領域における相互作用の働く領域を通過・伝搬するとき、方向や性質を変える。相互作用の働くのは小さな領域であっても、相互作用のない空間領域における自由な波に影響を及ぼす。変化は、確率的に決まる。自由な波動方程式に従う入射された波が、ポテンシャル（相互作用）のために影響を受けて異なる波となって外部へ出てゆくのが、散乱である。外へ出てゆく波を測定器で観測して、事象の頻度を測定する。この分布より、原子の内部のような狭い領域におけるミクロな情報をマクロな測定装置でえることができる。この装置は、顕微鏡の役割をしている。

古典的な散乱現象では、散乱波の強度が、直接的に観測・測定される。強度は、変位の大きさを表す物理量でもある。ところが、量子力学的な散乱現象では、入射波から散乱波への遷移確率により決まる統計分布が観測・測定される。両者の違いに注意が必要である。

1.4.1 散乱行列の標準形 : $T = \infty$

量子力学的な散乱の一般論を述べておこう。時間発展演算子 $U(t)$ は全ハミルトニアン H から、

$$U(t) = e^{-iHt} \quad (1.44)$$

と定義されるユニタリ演算子であり、自由粒子では自由なハミルトニアン H_0 からの演算子、

$$U^0(t) = e^{-iH_0 t} \quad (1.45)$$

である。散乱状態は、時刻 t が $-\infty$ で相互作用のない自由なハミルトニアン H_0 の固有状態 $|\psi_{in}\rangle$ に漸近的に近づく波動関数

$$U(t)|\psi\rangle_{t \rightarrow -\infty} \rightarrow U^0(t)|\psi_{in}\rangle \quad (1.46)$$

と、時刻 t が $+\infty$ で相互作用のない自由なハミルトニアン H_0 の固有状態 $|\psi_{out}\rangle$ に漸近的に近づく波動関数

$$U(t)|\psi\rangle_{t \rightarrow +\infty} \rightarrow U^0(t)|\psi_{out}\rangle \quad (1.47)$$

との間の遷移振幅である。散乱演算子を

$$\Omega_{\pm} = \lim_{t \rightarrow \mp\infty} U(t)^{\dagger} U^0(t) \quad (1.48)$$

と定義する。これらを使い、状態ベクトルは、一方で

$$|\psi\rangle = \lim_{t \rightarrow -\infty} U(t)^{\dagger} U^0(t)|\psi_{in}\rangle = \Omega_+ |\psi_{in}\rangle \quad (1.49)$$

と表わされ、また

$$|\psi\rangle = \lim_{t \rightarrow \infty} U(t)^{\dagger} U^0(t)|\psi_{out}\rangle = \Omega_- |\psi_{out}\rangle \quad (1.50)$$

とも表わされる。この結果、右辺を等しいとおいて、

$$\Omega_- |\psi_{out}\rangle = \Omega_+ |\psi_{in}\rangle \quad (1.51)$$

が得られ、さらに二つの状態が、一つの行列 S で、

$$|\psi_{out}\rangle = S |\psi_{in}\rangle \quad (1.52)$$

$$S = \Omega_-^{\dagger} \Omega_+ \quad (1.53)$$

と表わされる。 S は、ユニタリー演算子の極限

$$S = \lim_{t \rightarrow \infty, t' \rightarrow -\infty} U(t)^{\dagger} U(t) U^{\dagger}(t') U^0(t') \quad (1.54)$$

である。

1.4.2 散乱におけるエネルギー保存則

前節の散乱演算子は、

$$H\Omega_{\pm} = \Omega_{\pm}H^0 \quad (1.55)$$

を満たしている。まず、この関係式を証明しよう。

$$\begin{aligned} e^{iH\tau}\Omega_{\pm} &= e^{iH\tau} \lim_{t \rightarrow \mp\infty} e^{iHt} e^{-iH^0t} \\ &= \lim e^{iH(\tau+t)} e^{-iH^0t} \\ &= \lim e^{iH(\tau+t)} e^{-iH^0(t+\tau)} e^{iH^0\tau} \\ &= \Omega_{\pm} e^{iH^0\tau} \end{aligned} \quad (1.56)$$

両辺を τ で n 回微分して、

$$\left(\frac{\partial}{\partial\tau}\right)^n e^{iH\tau}\Omega_{\pm} = \left(\frac{\partial}{\partial\tau}\right)^n \Omega_{\pm} e^{iH^0\tau} \quad (1.57)$$

が得られる。ここで、 $\tau = 0$ を代入して、関係式は

$$(iH)^n \Omega_{\pm} = \Omega_{\pm} (iH^0)^n \quad (1.58)$$

となる。 $n = 1$ では、

$$H\Omega_{\pm} = \Omega_{\pm}H^0 \quad (1.59)$$

となり、さらに両辺のエルミート共役から

$$\Omega_{\pm}H = H^0\Omega_{\pm} \quad (1.60)$$

となる。よって、

$$(\Omega_{\pm})^{\dagger}H\Omega_{\pm} = H^0 \quad (1.61)$$

が満たされる。ここで、 S の定義と上の関係式を使い、

$$\begin{aligned} SH^0 &= \Omega_{-}^{\dagger}\Omega_{+}H^0 \\ &= \Omega_{-}^{\dagger}H\Omega_{+} \\ &= H^0\Omega_{-}^{\dagger}\Omega_{+} \\ &= H^0S \end{aligned} \quad (1.62)$$

が得られ、 S が自由ハミルトニアン H^0 と可換

$$[S, H^0] = 0 \quad (1.63)$$

であることが分かる。よって、散乱によって H^0 で定義されたエネルギーは保存する。

H^0 で定義されたエネルギーが保存することより、初期状態

$$H^0|\psi_{in}\rangle = E_a^0|\psi_{in}\rangle \quad (1.64)$$

から遷移する終状態はすべて、同じエネルギーをもち、

$$H^0|\psi_{out}\rangle = E_a^0|\psi_{out}\rangle, |\psi_{out}\rangle = E_a^0|\psi_{in}\rangle, \quad (1.65)$$

を満たす。

また幅 δE のエネルギー幅を持つ非定常状態としての初期状態

$$|\psi_{in}^{w.p}\rangle = \int C(E)|\psi_{in}^E\rangle \quad (1.66)$$

は、同じエネルギー幅を持つ状態

$$|\psi_{out}^{w.p}\rangle = \int C(E)S|\psi_{in}^E\rangle \quad (1.67)$$

に遷移する。

古典力学におけるエネルギー保存則

古典力学では、運動方程式

$$m\frac{d^2}{dt^2}\vec{x}(t) = -\nabla U(\vec{x}) \quad (1.68)$$

を満たす位置ベクトル $\vec{x}(t)$ から定義するエネルギー

$$E = \frac{m}{2}\left(\frac{d}{dt}\vec{x}(t)\right)^2 + U(\vec{x}) \quad (1.69)$$

は時間によらず一定である。散乱状態でも束縛状態でも、この結論は変わらない。

1.4.3 散乱における保存量

定常状態による散乱の扱いでは、保存量 Q が散乱行列と可換であり

$$[S, Q] = 0 \quad (1.70)$$

が満足し、

$$Q|in\rangle = q|in\rangle \quad (1.71)$$

が満足すれば、

$$Q|out\rangle = q|out\rangle \quad (1.72)$$

となる。

最も単純なのは、保存量 Q が H_0 と H_1 と可換で

$$\begin{aligned} [H_0, Q] &= 0 \\ [H_1, Q] &= 0 \end{aligned} \quad (1.73)$$

を満たす場合である。

例 1

球対称ポテンシャル $V(r)$ 中で角運動量 L_j は、

$$\begin{aligned} [L_j, H_0] &= 0 \\ [L_j, H_1] &= 0 \end{aligned} \quad (1.74)$$

を満たしている。だから、角運動量は、散乱に際して必ず保存する。初期条件が角運動量 $L = l(l+1), L_z = m_z$ であるとき、終状態も必ず同じ角運動量 $L = l(l+1), L_z = m_z$ である。

例 2

完全な保存量ではない例として、運動量 P_j がある。運動量 P_j は、 H_0 とは可換であるが、座標の関数であるポテンシャルとは可換ではない。

$$\begin{aligned} [P_j, H_0] &= 0 \\ [P_j, V(r)] &= -i\hbar \frac{\partial}{\partial x_j} V(r) \neq 0 \end{aligned} \quad (1.75)$$

だから、ポテンシャル散乱では運動量は保存量ではない。

例 3

相対座標に依存するポテンシャルで相互作用する 2 体問題では、全運動量 $\vec{P} = \vec{p}_1 + \vec{p}_2$ が保存量である。ハミルトニアン H は、

$$H = \frac{\vec{p}_1^2}{2m_1} + \frac{\vec{p}_2^2}{2m_2} + V(\vec{x}_1 - \vec{x}_2) \quad (1.76)$$

であり、ポテンシャルは

$$[\vec{P}_j, V(\vec{x}_1 - \vec{x}_2)] = -i\hbar \left(\frac{\partial}{\partial x_1^j} - \frac{\partial}{\partial x_2^j} \right) V(\vec{x}_1 - \vec{x}_2) = 0 \quad (1.77)$$

と、全運動量と交換する。波動関数は、

$$|\Psi\rangle = \Psi(\vec{R})\phi(\vec{r})e^{i(E_R + e_r)t} \quad (1.78)$$

と、中心座標と相対座標の変数の分離形で書かれ、また中心座標に依存する部分は、全運動量 \vec{P} の固有関数である平面波

$$\Psi(\vec{R}) = e^{i\vec{P}_R \cdot \vec{R}} \quad (1.79)$$

となっている。

1.4.4 散乱と束縛状態

ポテンシャルのもとで束縛状態が存在するときは、全状態からなるベクトル空間は、散乱状態の空間と束縛状態の空間の直和になる。束縛状態は、波動関数がポテンシャル中心の近傍にだけ値をもち、散乱状態は波動関数が無限領域に広がる。また、短距離ポテンシャルの場合に限るとして、束縛状態のエネルギーは負の値であり、散乱状態のエネルギーは正の値である。このため、両空間に属するベクトルは、必ず直交する。だから、全空間は両ベクトル空間の直和になり、束縛状態を取り除いた空間での遷移演算子として、散乱の演算子を考えればよい。定常状態では、散乱状態は正エネルギーをもち、負エネルギーの束縛状態とは、直交し、二つは異なるエネルギー領域である。

ポテンシャル中の一体問題と、相対座標で決まる相互作用をする2体問題は、通常は等価である。後者で、波動関数が中心座標と相対座標に変数分離した際、中心座標の空間は、自由粒子のハミルトニアンで表わされる自明な問題に帰着される。一方、相対座標の空間は、一体のポテンシャル問題に帰着される。だから、2体問題の定常状態は、中心座標の波動関数と相対座標の波動関数の直積で、両空間を分離して扱える。相対座標の空間においては、散乱状態と束縛状態が互いに直交し存在する。だから、束縛状態があっても散乱の問題の扱いには、あまり影響がない。

ところが、非定常状態並びにそれらの遷移では、事情が異なる。非定常状態は、様々なエネルギーを持つ状態を重ね合わせた状態である。大きなエネルギー幅を持つ状態は、中心座標の空間で有限なエネルギー幅を持つと共に、相対座標の空間で有限なエネルギー幅をもつ。これらの状態を重ね合わせた状態が結合して物理に影響を及ぼす。その中には、相対座標の空間の散乱状態と束縛状態の両空間のベクトルの重ね合わせた状態も含まれる。

非定常状態間の遷移では、波の重なりによる相互作用エネルギーが零ではない。この結果、運動エネルギーは、全エネルギーからずれた値となる。波の散乱や反応におけるエネルギーは、波の振動数をプランク定数で割った運動エネルギーであることに注意しよう。つまり、遷移前後の波の重なりは、相互作用エネルギーを有限にさせるため、全エネルギーからずれた運動エネルギーを実現させる。

非定常状態間の遷移の物理は、このように定常状態による物理と異なる側面を持つ。熱平衡における物理や物理量、また様々な状況で平均した値は、多くの場合、定常状態で扱える。一方で、緩和現象や、急激に変化する現象や、非平衡での物理は、非定常状態での扱いが必要である。

波束が、ゆっくり広がる場合は、拡がりの効果は、時間に依存して変化するため、平衡値ではない。

1.5 散乱断面積の公式 $T \rightarrow \infty$

一般論

$T \rightarrow \infty$ における S-行列から遷移振幅が

$$\begin{aligned} S &= 1 + R \\ \langle f|R|i \rangle &= \delta^4(P_f - P_i) \langle f|M|i \rangle \end{aligned} \quad (1.80)$$

と書かれ、体積 V 時間 T における遷移確率を体積・時間で割って、

$$\Gamma_1 = \lim_{V,T \rightarrow \infty} \frac{|\langle f|R|i \rangle|_{VT}^2}{VT} \quad (1.81)$$

Γ_1 は単位体積・時間当たりの遷移確率

$$\langle R|i \rangle = (2\pi)^{-4} \langle f|M|i \rangle \int d^4x e^{i(P_f - P_i)x} \quad (1.82)$$

である。大きな体積 V と時間間隔 T での遷移振幅は

$$\langle R|i \rangle_{VT} = (2\pi)^{-4} \langle f|M|i \rangle \int_{VT} d^4x e^{i(P_f - P_i)x} \quad (1.83)$$

である。4次元積分の公式

$$\lim_{V,T \rightarrow \infty} \frac{1}{VT} \left| \int_{VT} d^4x e^{i(P_f - P_i)x} \right|^2 = (2\pi)^4 \delta(P_f - P_i) \quad (1.84)$$

が、1次元積分

$$\lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \left| \int_{T/2}^{T/2} d^4x e^{iEt} \right|^2 = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \left[\frac{\sin(ET/2)}{E/2} \right]^2 = 2\pi \delta(E) \quad (1.85)$$

の積より、導ける。この結果、遷移率は

$$\Gamma_1 = (2\pi)^{-4} \delta^4(P_f - P_i) |\langle f|M|i \rangle|^2 \quad (1.86)$$

となる。

静止した原子

静止した原子の遷移（参考：Bethe-Salpeter）で相互作用、

$$H_{int} = e\vec{A}(x)\frac{\vec{p}}{m}; \vec{p} = \sum_i \vec{p}_i \quad (1.87)$$

を使い、

$$W_{n'n}(\vec{k})d\Omega = \frac{e^2\hbar\omega_{nn'}}{2\pi m^2 c^3} |D_{nn'}^j(\vec{k})|^2 d\Omega \quad (1.88)$$

$$\vec{D}_{nn'}(\vec{k}) = \int u_{n'}^* \sum_i e^{i\vec{k}\vec{r}_i} \vec{\nabla}_i u_n d\tau \quad (1.89)$$

ただし、

$$\omega_{nn'} = \frac{1}{\hbar}(E_n - E_{n'}) = ck = 2\pi\nu_{nn'} \quad (1.90)$$

$r_{bohr} \approx 10^{-10}$ メートル、 $k \ll 10^{10}$ メートル⁻¹ で、 $kr \approx 0$ で、2重極近似が良い。

$$\vec{D}_{nn'}(\vec{k}) = \vec{D}_{nn'} = \int u_{n'}^* \sum_i \nabla_i u_n d\tau \quad (1.91)$$

また、

$$\vec{p}_{nn'} = m\vec{v}_{nn'} = m(-i)\omega_{nn'}\vec{r}_{n'n} \quad (1.92)$$

を使い、

$$W(\Omega, \vec{e}) = \frac{e^2}{2\pi\hbar c^3} \omega_{nn'}^3 (\vec{e}\vec{r}_{n'n})^2 d\Omega \quad (1.93)$$

多くの本や論文で使われている。

1.6 有限の T の $S[T]$ における運動エネルギー非保存

ハイゼンベルグの S -行列理論では、波動関数を使わずに量子力学を定式化する。一方で、 S -行列は、波動関数がしたがうシュレーディンガー方程式から無限の時間間隔 T における状態の遷移の確率振幅として導かれる。波動関数は漸近的な領域において、自由な方程式に従うことより、解は、方程式の不変性や対称性を維持し、 S -行列も同じ性質をもつ。

ところで実際の測定、実験、や自然の反応では、 T は大きくても有限である。この場合の波動関数は、無限の T から（わずかに）ずれている。だから、遷移確率も、有限の T では

無限の T からずれると考えられる。しかしながら、ずれの大きさは、非常に小さいことが多い。これは、量子論における波動の典型的な長さが、プランク定数で決まる非常に短いドブロイ波長であることによる。空間的に小さなサイズの粒子では、他に長さのスケールが無いので、ドブロイ波長で決まる時間間隔よりはるかに大きな T は、無限な大きさと等価である。フェルミの黄金律についても、ディラック、フェルミや他の人達は、同じように考え、短いドブロイ波長を考慮して、有限な T による補正項は不必要であると考えた。しかしながら、大きなサイズの波動の遷移は、粒子とは異なる。これらの波の重なりが影響を及ぼすため、ドブロイ波長だけで波動性が判定できるわけではない。古典粒子の量子力学（第一量子化）では、波動的な性質は、ドブロイ波長だけで決定されるが、古典波の量子論や量子波の第2量子化理論の波動的な性質は、量子化後のドブロイ波長と量子化前の波の波長との両パラメーターで決定される。だから、場の量子力学において、有限 T の補正は、点粒子の量子力学とは異なる。

有限な T では、明らかに関数 $I(\omega; T)$ は、デルタ関数からずれている。しかも、ずれは、 ω^{-2} で振る舞う $\omega \neq 0$ からの寄与が、確率に含まれることを示す。つまり、運動エネルギー保存則を破る遷移が有限な確率をもつ。その大きさが、いつも非常に小さな値になるのであれば、今までの方法で問題ない。しかし、これが有意な大きさとなる物理系では、今までの方法に対する補正をきっちり求めることは、重要で必須である。

では運動エネルギー保存則を破る遷移が、どうして起きるのだろうか、またいかなる物理を反映しているのだろうか？この問題は、古典物理の検討、並びに古典物理と量子物理の比較・検討から容易にわかる。ニュートンの運動方程式に従う質量 m の質点で保存する力学的エネルギーは、運動エネルギー $\frac{(\vec{p})^2}{2m}$ とポテンシャルエネルギー $V(\vec{x})$ の和であるので、ポテンシャルエネルギー $V(\vec{x})$ が変化するとき、運動エネルギーも変化する。もしも、ポテンシャルが零と異なる領域が、極微な空間部分に限られるのであるならば、その外の領域では運動エネルギーは一定の大きさである。同じ質点を量子力学で扱っていると、波動関数は同じ極微領域の外部で自由な波となり、運動エネルギーは全エネルギーに一致した値で変化しない。相互作用が、短距離力ではなく長距離力であったら、ポテンシャルエネルギーは長距離で零と異なる。その領域では、だから運動エネルギーは変化し、運動エネルギーの保存則を満たさない状態への遷移が起きる。この成分は、式 $I(\omega, T)$ の $\omega \neq 0$ に対応する。だから遷移確率の定数項に寄与を与え、傾きには寄与しない。

基本的な粒子（素粒子）や、ミクロな世界は、場（波）の量子力学で表される。ここでは、ハミルトニアン H_0 の自由項は場の2次式であり、解は平面波で波数ベクトル \vec{k} に比例する運動量 $\vec{p} = \hbar\vec{k}$ と運動エネルギー $\sqrt{p^2 + m^2c^4}$ を持つ。運動エネルギーは、振動数に比例する。また、相互作用項 H_1 は、場の高次項であり、3個以上の波の重なり積分に比例する。保存するのは、これらの和である全エネルギーであり、相互作用エネルギーが変化する領域では、運動エネルギーは保存しない。この領域が、長距離にわたるのか短距離に限られるのかは、後で検討する。結論は、小さい質量の場（波）では、この領域はミクロな空間に限られるわけではなく、マクロな領域にわたる。だから、場の中の局所的相互作用が、マクロな領

域における量子効果を引き起こす。ミクロな世界における基本的な自由度と相互作用が、マクロな量子効果として発現する。

確率の定数項のために、遷移率は時間間隔に依存して変化する。これが、有限な T における確率が、無限な T における値からずれる要因である。 T の一次式である遷移確率は、定数項と一次項の2つの和 (1.7) となる。 T に比例する項 ΓT は、遷移における粒子的な性質、定数項 $P^{(d)}$ は波動的な性質を表している。振動数に比例するエネルギーは、波の場合、運動エネルギーであることに注意が必要である。場の重なりに起源をもつ相互作用エネルギーが、遷移確率における定数項を引き起こし物理に影響を及ぼす。

1.7 黄金律の有限 T 補正

遷移確率における定数項 $P^{(d)}$ の起源が、遷移前後の波の重なりによって生じた相互作用エネルギーにあることが分かった。波の重なりは、これらの波の広がり依存し、散乱振幅を定義する際の境界条件と関連している。この点を明らかにしておこう。

1.7.1 有限 T の散乱行列

有限の T の散乱の一般論を、まとめておこう。時間発展演算子 $U(t)$ は全ハミルトニアン H から、

$$U(t) = e^{-iHt} \quad (1.94)$$

と定義されるユニタリ演算子であり、自由粒子では自由なハミルトニアン H_0 からの演算子、

$$U^0(t) = e^{-iH_0 t} \quad (1.95)$$

である。散乱状態は、時刻 t が $-T/2$ で相互作用のない自由なハミルトニアン H_0 の固有状態 $|\psi_{in}\rangle$ に一致する波動関数

$$U(t)|\psi\rangle_{t \rightarrow -T/2} \rightarrow U^0(t)|\psi_{in}\rangle \quad (1.96)$$

と、時刻 t が $+T/2$ で相互作用のない自由なハミルトニアン H_0 の固有状態 $|\psi_{out}\rangle$ に漸近的に近づく波動関数

$$U(t)|\psi\rangle_{t \rightarrow +T/2} \rightarrow U^0(t)|\psi_{out}\rangle \quad (1.97)$$

との間の遷移振幅である。散乱演算子を

$$\Omega_{\pm} = \lim_{t \rightarrow \mp T/2} U(t)^\dagger U^0(t) \quad (1.98)$$

と定義する。これらを使い、状態ベクトルは、一方で

$$|\psi\rangle = \lim_{t \rightarrow -T/2} U(t)^\dagger U^0(t) |\psi_{in}\rangle = \Omega_+ |\psi_{in}\rangle \quad (1.99)$$

と表わされ、また

$$|\psi\rangle = \lim_{t \rightarrow T/2} U(t)^\dagger U^0(t) |\psi_{out}\rangle = \Omega_- |\psi_{out}\rangle \quad (1.100)$$

とも表わされる。この結果、右辺を等しいとおいて、

$$\Omega_- |\psi_{out}\rangle = \Omega_+ |\psi_{in}\rangle \quad (1.101)$$

が得られ、さらに二つの状態が、一つの行列 S で、

$$|\psi_{out}\rangle = S |\psi_{in}\rangle \quad (1.102)$$

$$S = \Omega_-^\dagger \Omega_+ \quad (1.103)$$

と表わされる。 S は、ユニタリー演算子の極限

$$S[T] = \lim_{t \rightarrow T/2, t' \rightarrow -T/2} U(t)^{0\dagger} U(t) U^\dagger(t') U^0(t') \quad (1.104)$$

である。

有限時間間隔では、 S -行列は自由ハミルトニアンと交換しない。交換関係は

$$[H_0, S[T]] = \quad (1.105)$$

であり、右辺は零ではない。 H_0 の固有状態

$$H_0 |\alpha_i\rangle = E_0^i |\alpha_i\rangle; i \quad (1.106)$$

を両辺に挟んだ行列要素、

$$(E_0^j - E_0^i) \langle \alpha_i | S[T] | \alpha_j \rangle = \langle \alpha_i | \delta S | \alpha_j \rangle \quad (1.107)$$

で、右辺は零ではない。このため、エネルギーが $E_0^i - E_0^j \neq 0$ と、異なる状態の遷移要素が有限の大きさとなる。

第2章 粒子と波の融合：量子場

遷移確率に、局所的な相互作用に起源をもつ定数項 $P^{(d)}$ が、場の量子力学で発現する。この $P^{(d)}$ が大きくなると予想される相対論的な場の理論は、いくつかの特徴を持つ。その一つが、無限の運動量を持つ超相対論的な波動が、自由度に含まれていることである。この成分は、摂動展開の高次項に無限大を引き起こす。物理量の計算には、この紫外発散を分離して行う繰り込みの処方箋を必要とすることである。繰り込みは、 S -行列に対して証明された。

2.1 紫外発散と繰りこみ

散乱問題の S -行列は、無限の時間間隔における遷移に関するものであるため、物理系のラグランジアン の性質や対称性をそのまま反映した不変性を持つ。相対論的な不変性や、ゲージ不変性は特に現代物理学で、重要な働きをしている。相対論的な場の理論の紫外発散の繰りこみも、これらの対称性を基本的な柱にして、 S -行列に対して高エネルギー部の分離が証明され、処方箋が完結している。このように、自然は、ローレンツ不変性やゲージ不変性を持ち、極微部（極高エネルギー部）における基本力学が、これらの対称性を保つことは自然なことである。極微な部分で、もしもローレンツ不変性が保たれないとしたら、自然は全く異なるものになっているはずである。だから、これらの対称性を保つ S -行列を対象とした。

しかし、すべての自然現象の起きる確率は S -行列だけで決まるのだろうか？無限の時間間隔における素過程については、 S -行列が確率を与えるが、有限の時間間隔で起きる自然現象が沢山あることは否定できない。これらの現象に対してシュレーディンガー方程式と量子力学の基本に則った定量的な検討が、必要であろう。その結果、遷移確率に対して有限時間間隔の補正は無視でき黄金律に基づく遷移率で十分であれば、問題ない。しかし、逆に確率に大きな補正項を必要とする物理系があれば、問題であり再検討が必要である。検討の結果次第では、様々な反応や現象に対しても見直しが必要となるかもしれない。後で示されるように、有限な T での遷移確率が無限の T の値から有意にずれる物理系が実際に存在する。しかもこのずれは、時空の不変性を破る性質をもってしまう。そのため、基本的な力学法則の不変性を反映した高エネルギー部の揺らぎの効果が不変であっても、有限な T での物理量が、不変性を破ることある。この場合に、自然現象や、実験による測定値を、基本法則から理解するには、大きな注意が必要である。この意味でも、確率からの補正項の分離は大切であ

る。補正項は、相互作用について最低次の効果にあらわれ、高次効果とは無関係なものである。だから高次効果で消すことも、変更することも不可能である。その点で、不定性の全くない理論的に予言能力をもつ物理量である。相互作用が大きな高次効果をもつ場合でも、補正項は同じに表れる。高次効果が紫外発散を持つ場合、対称性に対して不変な繰りこみで高エネルギー部を処理し、その結果を使い有限サイズ補正を具体的な計算で求める。この場合の補正項の計算は、最低の場合と変わらない。先ず、相互作用についての最低次の計算で、補正項をきっちり計算することが重要である。

このように量子場の理論での有限 T 補正は、興味深い重要な問題である。量子場の理論として最初に定式された量子電気力学 (Quantum Electrodynamics (QED)) は、広範囲にわたる多くの自然現象に関わる素過程の確率を与える。QED の高エネルギー領域や相互作用の高次効果は良く理解されているが、有限サイズ補正に起因する効果は、まだ全容がわかっていない。これらは、多くの自然現象の理解にとって重要である。そのため、量子場の理論における有限 T 補正を、簡単な系からまとめておこう。

2.2 スカラー場 ϕ

相対論的なスカラーの自由場は、場の方程式

$$\left[\frac{\partial^2}{\partial x_\mu^2} + m^2\right]\phi(x) = 0 \quad (2.1)$$

に従う。ラグランジアンは

$$L = \int d^3x \frac{1}{2} ((\partial_\mu \phi(x))^2 - m^2 \phi(x)^2) \quad (2.2)$$

であり、最も簡単な解は、振動数と波数ベクトルが決まった関係式を満たす平面波

$$\begin{aligned} \phi(x) &= e^{ip_\mu x^\mu}, p_\mu x^\mu = p_0 x_0 - \vec{p}\vec{x} \\ p_0 &= E(p) = \sqrt{\vec{p}^2 + m^2} \end{aligned} \quad (2.3)$$

である。場の変数は、量子力学に固有の交換関係に従う。今の場合、交換関係は

$$\begin{aligned} [p(x_0, \vec{x}), \phi(y_0, \vec{y})] \delta(x_0 - y_0) &= i\hbar \delta(\vec{x} - \vec{y}) \delta(x_0 - y_0) \\ p(x) &= \frac{\partial}{\partial \phi_0(x)} L = \dot{\phi}(x) \end{aligned} \quad (2.4)$$

である。場は交換関係

$$[a(\vec{p}, t), a(\vec{p}', t')] = 0, [a(\vec{p}, t), a^\dagger(\vec{p}', t')] \delta(t - t') = \delta(\vec{p} - \vec{p}') \delta(t - t') \quad (2.5)$$

を満たす生成・消滅演算子

$$a(\vec{p}, t), a^\dagger(\vec{p}, t) \quad (2.6)$$

で、

$$\phi(x) = \int \frac{d^3p}{\sqrt{(2\pi)^3 E(p)}} (e^{ipx} a(\vec{p}, t) + e^{-ipx} a^\dagger(\vec{p}, t)) \quad (2.7)$$

とフーリエ展開できる。多体粒子の空間は、基底状態（真空）

$$|0\rangle, a(\vec{p})|0\rangle = 0 \quad (2.8)$$

と基底状態に生成演算子をかけた 1 粒子状態、2 粒子状態、多粒子状態

$$a^\dagger(\vec{p}_1)|0\rangle, a^\dagger(\vec{p}_1)a^\dagger(\vec{p}_1)|0\rangle, \dots \quad (2.9)$$

で構成される。生成演算子の交換関係は、多粒子状態が、同種粒子として対称的な性質を持つことを示す。つまり、スカラー場の理論は、ボース粒子を表している。

これら多粒子をあらわす波動関数は、時間について一次の線形方程式

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} |\Psi(t)\rangle = H_0 |\Psi(t)\rangle \quad (2.10)$$

$$\begin{aligned} H_0 &= \int d^3x \left[\frac{1}{2} (p(x)^2 + (\vec{\nabla}\phi(x))^2 + m^2\phi(x)^2) \right] \quad (2.11) \\ &= \int d^3p E(p) (a^\dagger(\vec{p})a(\vec{p}) + 1/2) \end{aligned}$$

に従い時間発展する。上の状態は、多体ハミルトニアン H_0 の固有状態であり、固有値が

$$H_0|0\rangle = E_0|0\rangle \quad (2.12)$$

$$H_0 a^\dagger(\vec{p}_1)|0\rangle = (E_0 + E(p_1)) a^\dagger(\vec{p}_1)|0\rangle, \quad (2.13)$$

$$H_0 a^\dagger(\vec{p}_1)a^\dagger(\vec{p}_1)|0\rangle = (E_0 + E(p_1) + E(p_2)) a^\dagger(\vec{p}_1)a^\dagger(\vec{p}_1)|0\rangle \quad (2.14)$$

となる。この固有値は、運動エネルギーの値である。ここで、基底状態のエネルギー

$$E_0 = \frac{1}{2} \int d^3p E(p) \quad (2.15)$$

は、各運動量のモードの零点振動エネルギーの和である。励起状態は、 E_0 に一粒子エネルギーや、2 粒子エネルギーが加わっている。すべての状態に共通なエネルギー E_0 は、エネルギーの原点を示す定数である。エネルギーの原点は、ポテンシャルを定義する際不定であり、初期条件や境界条件によって初めて一意的に決定される。物理量には影響を及ぼさないため、上の値から E_0 を差し引いた値を状態のエネルギーと考えることにする。すると、真

空は0、一粒子状態は $E(p)$ 、2粒子状態は $E(p_1) + E(p_2)$ 、とそれぞれが古典的な粒子のエネルギーの和とみなせる。これらは、まさに、多粒子状態を、演算子の集合で表している。これら多粒子状態は、エネルギーや、運動量が加法に従い、古典力学における粒子と等価な性質を持つ。ただし、線形空間のベクトルであるので、一方で重ね合わせの原理に従い、波動的な性質を併せ持つ。だから、多粒子状態が、波動的な性質の典型的な現象である干渉・回折を示す。多粒子状態の示す干渉・回折は、1粒子状態の干渉・回折や古典波の干渉・回折とは異なる特異な性質をもつ。つまり、場の量子論の示す干渉・回折では、量子力学的な1電子状態や古典電磁波とは、定性的に異なる特徴が発現する。これらは、今まで見落とされていた効果である。

2.3 ϕ^3 相互作用

場の3乗やより高次の冪は、場（波）の相互作用を表す。特に、同じ座標の場の高次項からなる相互作用ラグランジアンは、基本的な物理系に必要な諸性質を備えている。この同じ座標の場の中の相互作用、局所的相互作用と呼ばれる、は時空の不変性であるポアンカレ対称性を保つ。ポアンカレ不変な場の理論の最も簡単な例が、 $\phi(x)^3$ 形で相互作用するスカラー場である。まずこの理論で、場の量子力学系に特徴的な多体遷移現象に生ずるマクロな干渉・回折現象、並びに大きな有限サイズ補正を明らかにする。

量子的な波動における運動エネルギーと相互作用エネルギーの違いを明らかにしておくことは、物理の正確な把握のために必須である。それぞれの波では、その振動数 ν から運動エネルギーが $h\nu$ と決まり、波の重なり積分である相互作用ハミルトニアンが、相互作用エネルギーを決める。遷移前後では、両エネルギーの和が一定で保存され、運動エネルギーは、通常保存されない。例外的に、非常に小さい大きさの波では、波がすぐ分離する。そのため、重なり積分はほぼいつも零となり、相互作用エネルギーは消失する。だから、全エネルギーに一致する運動エネルギーは保存する。逆に、大きな波では、波の重なりはなかなか消失しない。有限の時間では、相互作用エネルギーは零にならずに、無限の時間で初めて零になる。波の重なり大きな効果が、遷移確率に発現する。ところで、散乱・崩壊現象で、初期状態や終状態のエネルギーや測定される粒子のエネルギーは、それぞれの波動の量子状態の H_0 の固有値であり、運動エネルギーである。また運動エネルギーが各波動の時間に共役なエネルギーであり、多体状態としての波動関数の時間発展を表す全エネルギーとは異なる。波動現象の（確率）振幅を波の重なり積分の時間座標の積分として計算すると、導かれるのは運動エネルギー保存則である。このため、量子系が外部とやり取りするエネルギーは、運動エネルギーである。この事情は、古典系でも量子系でも、違いはない。古典力学でも、ポテンシャルエネルギーが変化し、運動エネルギーが変化する時、容易に外部に取り出せるエネルギーは、全エネルギーの一部である運動エネルギーである。例えば、水力発電では、高所から落下した水の運動エネルギーを電気エネルギーに変換する。高い場所での位置エネルギー

である重力エネルギーを先ず運動エネルギーに変換し、水の速度を大きくする。その後水の高速度の運動をタービンの回転運動に変換して外部に取り出す。もしも、位置エネルギーまたは全エネルギーを直接外部に取り出せれば、好都合であるが、そのような手段はない。古典系と量子系で共に、物理系の外部に取り出せるのは、運動エネルギーである。古典物理の質点と波の力学では、運動エネルギーが変化する事情は異なる。前者では、質点に運動方向に力を及ぼす領域では、質点は力によって仕事をされる。その仕事により、運動エネルギーが変化する。逆に、運動エネルギーが変化するの、質点ではポテンシャルエネルギーが変化する領域に限られる。ところが、後者で、広がった波がポテンシャルと相互作用する場合、広がりを持つ波の重なりによって決まる相互作用エネルギーは、波の広がりより広い領域で変化する。だから、運動エネルギーは、ポテンシャルエネルギーが変化する領域よりも広い領域で、変化する。相互作用エネルギーは、波の遷移では、粒子の遷移とは異なる様相を呈する。運動エネルギーの変化量は、波の性質を反映し、小さな波では粒子と同様の大きさとし性質を示す。ところが、大きな波では、より広い領域で現れ同時に大きな値となる。

古典論における運動エネルギーの変化は、直接測定できるが、量子力学における運動エネルギーの変化は、遷移確率を通して測定する。遷移確率は、式が示すように二つの成分からなる。一つ ΓT は運動エネルギーを保存する項であり、次の $P^{(d)}$ は運動エネルギー非保存の項である。両項は、質点の量子力学と波(場)の量子力学で共に現れるが、後者で顕著な大きさと性質を示す。 $P^{(d)}$ は、短距離力の質点、長距離力の質点、短距離力の場の順に大きくなる。電磁気相互作用、弱い相互作用、強い相互作用、重力相互作用はすべて、場の間の局所的な相互作用として記述できる。それで、長距離力の場は、ここでは取り上げない。

2.3.1 崩壊

量子力学的な遷移の一つが、粒子の崩壊である。質量 m_1 のスカラー場 1 が、質量関係 $m_1 > 2m_2$ にある質量 m_2 のスカラー場 2 と、局所型 $\lambda\phi_1\phi_2^2$ で相互作用するハミルトニアン
の固有状態を求めることは、不可能である。そのため、近似的に、表す。結合定数 λ が小さいときの摂動論による固有状態から、スカラー場 1 のスカラー場 2 への崩壊の諸問題が明らかになる。ラグランジアンは、自由項と相互作用項からなる

$$L = L_0 + L_1 \tag{2.16}$$

$$L_0 = \tag{2.17}$$

$$L_1 = \lambda\phi_1(x)\phi_2(x)^2 \tag{2.18}$$

である。

粒子AのBとCへの崩壊

$$A \rightarrow B + C \quad (2.19)$$

を調べよう。遷移の確率振幅は、

$$M = \quad (2.20)$$

$$P = \Gamma T + P^{(d)} \quad (2.21)$$

相関関数

ここで、質量 m の相対論的な場の理論の相関関数を求めておく。2点関数の正エネルギー部分は、

$$\begin{aligned} \Delta_0(x_1 - x_2) &= \int \frac{d\vec{p}}{2E(p)(2\pi)^3} e^{ip(x_1 - x_2)} \\ &= iD^+(x_1 - x_2) (\text{Bogoriubov} - \text{Shirkov}) \\ &= i \left[\frac{1}{4\pi} \delta(\lambda) \epsilon(\delta t) + f_{short}(\lambda) \right], \\ E(p) &= \sqrt{\vec{p}^2 + m^2} \end{aligned} \quad (2.22)$$

となる。ここで、短距離部分 $f_{short}(\lambda)$ は、ベッセル関数 $J_1(x)$ 、ノイマン関数 $N_1(x)$ と変形ベッセル関数 $K_1(x)$ から、

$$\begin{aligned} f_{short} &= -\frac{im}{8\pi\sqrt{-\lambda}} \theta(-\lambda) \{N_1(m\sqrt{-\lambda}) - i(\delta t)J_1(m\sqrt{-\lambda})\} \\ &\quad -\theta(\lambda) \frac{im}{4\pi^2\sqrt{\lambda}} K_1(m\sqrt{\lambda}), \\ \lambda &= (x_1 - x_2)^2, \delta t = \delta x^0 \end{aligned} \quad (2.23)$$

と表せる。 $\delta(\lambda)$ は、光円錐上 $(t_1 - t_2)^2 - (\vec{x}_1 - \vec{x}_2)^2 = 0$ ($c = 1$) 以外で零になり光円錐上に特異性を持つ (light cone singularity) 関数である。この特異関数は、時空座標の実関数であり振動しないし、大きな空間座標の差 $|\vec{x}_1 - \vec{x}_2|$ に逆比例してゆっくり減少する。このため、この領域の物理に影響を及ぼす。また、相対論的に不変な理論に特徴的にある被積分関数の指数関数の位相の特異な性質に起源がある。 p が大きい領域で、相対論的なエネルギー $E(p)$ は

$$E(p) \rightarrow p + \frac{m^2}{2p} \quad (2.24)$$

と振る舞うため、位相部分

$$p(x_1 - x_2) = E(p)(t_1 - t_2) - \vec{p}(\vec{x}_1 - \vec{x}_2) \quad (2.25)$$

は、 p が大きい領域で \vec{p} と $\vec{x}_1 - \vec{x}_2$ の間の角度 θ を使い

$$p(1 - \cos \theta) \quad (2.26)$$

と表せる。その結果、位相は $\cos \theta = 0$, $p \rightarrow \infty$ で零となる。位相が消える領域が、無限の領域にわたるため、この領域からの積分値は発散する。だから、2点関数は特異性を持つ関数となる。注意深く計算を行うと、積分はベッセル関数とデルタ関数で与えられる。つまり、この特異性は無限大の波数ベクトル（無限小の波長）を含む沢山の波の重ね合わせが示す回折の一つである。無限大の波数ベクトルは、超相対論的な運動に対応する。いかなる物体も、限りなく光速に近い座標系から見た時、エネルギーは同じ振る舞いを示す。だから、この特異性は、すべての物体で必ず現れる。（参照：Bogoriubov Shirkov 場の理論、他の一昔前（1950,1960年代）の相対論的場の理論の教科書が詳しい）

正エネルギー振動部分の相関関数を具体的に計算する。

$$\begin{aligned} D^+(x) &= \frac{1}{(2\pi)^3 i} \int d^4 k e^{ikx} \delta(k^2 - m^2) \theta(k^0) \quad (2.27) \\ &= \frac{1}{(2\pi)^3 i} \int d^3 k \frac{1}{2k^0} e^{ikx}, k^0 = \sqrt{\vec{k}^2 + m^2} \\ &= \frac{1}{(2\pi)^3 i} \int k^2 dk d\cos\theta d\phi \frac{1}{2k^0} e^{i(k^0 x^0 - kr \cos\theta)}, \\ &= \frac{1}{(2\pi)^3 i} \int_0^\infty k^2 dk 2\pi \frac{1}{2k^0} \frac{1}{-ikr} [e^{i(k^0 x^0 - kr \cos\theta)}]_{\cos\theta=-1}^{\cos\theta=+1}, \\ &= \frac{1}{2(2\pi)^2 r} \int_0^\infty k dk \frac{1}{k^0} [e^{i(k^0 x^0 - kr)} - e^{i(k^0 x^0 + kr)}], \\ &= \frac{1}{2(2\pi)^2 r} (-) \int_{-\infty}^\infty k dk \frac{1}{k^0} e^{i(k^0 x^0 + kr)}. \end{aligned}$$

If $m = 0$,

$$= \frac{1}{2(2\pi)^2 r} (-) \int_{-\infty}^\infty dk e^{i(k(x^0 + r))} = \frac{1}{2(2\pi)r} (-) \delta(x^0 + r). \quad (2.28)$$

For general case of $m \neq 0$, we write

$$D^+(x) = \frac{1}{4\pi r} \frac{\partial}{\partial r} f(x), \quad (2.29)$$

where

$$\begin{aligned} f(x) &= f(x^0, r) = \frac{i}{2\pi} \int_{-\infty}^\infty \frac{e^{i(k^0 x^0 + kr)}}{k^0} dk, \quad (2.30) \\ k^0 &= \sqrt{\vec{k}^2 + m^2}, k = \sqrt{\vec{k}^2}, r = \sqrt{\vec{x}^2} \end{aligned}$$

By changing the variable from (k^0, k) to ϕ

$$\begin{aligned} k &= msh\phi, k^0 = mch\phi; \quad (k^0)^2 - k^2 = m^2; \quad -\infty \leq \phi \leq \infty \\ dk &= mch\phi = k^0 d\phi \end{aligned} \quad (2.31)$$

$$f(x) = \frac{i}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} d\phi e^{im(x^0 ch\phi + rsh\phi)} \quad (2.32)$$

Four cases of space time regions, $\lambda = (x^0)^2 - r^2$

$$\begin{aligned} 1. & x^0 > 0, x^0 > r; x^0 = \sqrt{\lambda}ch\phi_0, r = \sqrt{\lambda}sh\phi_0, \\ 2. & x^0 > 0, x^0 < r; x^0 = \sqrt{-\lambda}sh\phi_0, r = \sqrt{-\lambda}ch\phi_0, \\ 3. & x^0 < 0, |x^0| > r; x^0 = -\sqrt{\lambda}ch\phi_0, r = \sqrt{\lambda}sh\phi_0, \\ 4. & x^0 < 0, |x^0| < r; x^0 = -\sqrt{-\lambda}sh\phi_0, r = \sqrt{-\lambda}ch\phi_0, \end{aligned} \quad (2.33)$$

Bessel functions,

$$\begin{aligned} 1. & \frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty}^{\infty} d\phi e^{im\sqrt{\lambda}ch(\phi+\phi_0)} = \frac{1}{2} H_0^{(1)}(m\sqrt{\lambda}) \\ & = \frac{1}{2} J_0(m\sqrt{\lambda}) + \frac{i}{2} N_0(m\sqrt{\lambda}), \\ 2. & \frac{i}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} d\phi e^{im\sqrt{-\lambda}sh(\phi+\phi_0)} = \frac{i}{\pi} K_0(m\sqrt{-\lambda}) \\ 3. & \frac{i}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} d\phi e^{-im\sqrt{\lambda}ch(\phi-\phi_0)} = \frac{1}{2} H_0^{(2)}(m\sqrt{\lambda}) \\ & = \frac{1}{2} J_0(m\sqrt{\lambda}) - \frac{i}{2} N_0(m\sqrt{\lambda}), \\ 4. & \frac{i}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} d\phi e^{-im\sqrt{-\lambda}sh(\phi-\phi_0)} = \frac{i}{\pi} K_0(m\sqrt{-\lambda}) \end{aligned} \quad (2.34)$$

from which it follows that

$$\begin{aligned} f(x) = \phi(x^0, \lambda) &= \frac{1}{2i} N_0(m\sqrt{\lambda}) - \frac{1}{2} \epsilon(x^0) J_0(m\sqrt{\lambda}), \text{ for } \lambda > 0 \\ & \frac{i}{\pi} K_0(m\sqrt{-\lambda}), \text{ for } \lambda < 0 \end{aligned} \quad (2.35)$$

$$J_0(z) = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{z^{2k}}{2^{2k} (k!)^2} \quad (2.36)$$

$$\pi N_0(z) = 2J_0(\ln z/2 + C) - 2 \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k z^{2k}}{2^{2k} (k!)^2} \left[\sum_{m=1}^k \frac{1}{m} \right]$$

$$K_0(z) = \frac{\pi i}{2} [J_0(iz) + iN_0(iz)]$$

$$J_0(z) = 1 - (z/2)^2 + O(z^4), \quad (2.37)$$

$$N_0(z) = \frac{2}{\pi} \left[1 - \left(\frac{z}{2}\right)^2 \right] \ln \frac{z}{2} + \frac{2}{\pi} C + O(z^2)$$

$$K_0(z) = - \left[1 + \left(\frac{z}{2}\right)^2 \right] \ln \frac{z}{2} - C + O(z^2)$$

$f(x), \lambda \approx 0$

$$1. f(x) = \frac{1}{2} + \frac{i}{2} \times \frac{2}{\pi} \left[1 - \left(\frac{z}{2}\right)^2 \right] \ln \frac{z}{2} \quad (2.38)$$

$$2. f(x) = \frac{i}{\pi} (-) \left[1 + \left(\frac{z}{2}\right)^2 \right] \ln \frac{z}{2}$$

1. にある $\frac{1}{2}$ が 2 . にはない。つまり、 $f(x)$ は $\frac{1}{2}\theta(r - x^0)$ の形の不連続関数となっている。

$$\frac{\partial}{\partial r} \frac{1}{2} \theta(r - x^0) = \frac{1}{2} \delta(r - x^0) \quad (2.39)$$

結果は、

$$D^{(+)}(x) = \frac{1}{4\pi} \epsilon(x^0) \delta(\lambda) - \frac{im}{8\pi\sqrt{\lambda}} \theta(\lambda) [N_1(m\sqrt{\lambda}) - i\epsilon(x^0)J_1(m\sqrt{\lambda})] \quad (2.40)$$

$$+ \theta(-\lambda) \frac{im}{4\pi^2\sqrt{-\lambda}} K_1(m\sqrt{-\lambda})$$

2.3.2 $v = constant$ の波動で、cut off momentum がある場合

$$\xi([\vec{p}]) = E(p)t - \vec{p}\vec{x} \quad (2.41)$$

$$\frac{\partial}{\partial p_i} \xi(\vec{p}) = v_i t - x_i = 0$$

$$v_i t = x_i$$

$$E = \vec{v}\vec{p}; |p| \leq \frac{\pi}{d} \quad (2.42)$$

Ref. ishikawa-nozaki-sentoku-tobita

2.3.3 Imaginary mass

$D^+(\delta t, \delta \vec{x}; im)$

$$D^+(\delta t, \delta \vec{x}; im) = \frac{1}{i^2(2\pi)^4} \int d^4q \left[\frac{1}{q_0^2 - \vec{q}^2 + m^2 - i\epsilon} - \frac{1}{q_0^2 - \vec{q}^2 + m^2 + i\epsilon} \right] e^{iq \cdot \delta x} \theta(q_0)$$

$$= \frac{\epsilon(\delta t)}{4\pi} \delta(\lambda) - \frac{m}{8\pi\sqrt{-\lambda}} \theta(-\lambda) \left[N_1(m\sqrt{-\lambda}) - i\epsilon(\delta t) J_1(m\sqrt{-\lambda}) \right]$$

$$+ \theta(\lambda) K_1(m\sqrt{\lambda}). \quad (2.43)$$

The integrand vanishes in $q^2 = q_0^2 - \vec{q}^2 > 0$, and $D^+(\delta t, \delta \vec{x}; im)$ decreases exponentially at $\lambda > 0$, oscillates at $\lambda < 0$, and has a singularity at the light cone $\lambda = 0$ of the universal form.

2.3.4 外線が有限の運動量をもつ

運動量 \vec{p} の相関関数 $D^+(\delta t, \delta \vec{x}; p, m)$

$$D^+(\delta t, \delta \vec{x}; p, m) = \frac{1}{i^2(2\pi)^4} \int d^4 q \left[\frac{1}{q_0^2 - \vec{q}^2 - m^2 - i\epsilon} - \frac{1}{q_0^2 - \vec{q}^2 - m^2 + i\epsilon} \right] e^{i(q-p)\cdot\delta x} \theta(q_0). \quad (2.44)$$

は次の (I) か (II) の表現が可能。それぞれが、異なる積分領域からの寄与をひろっている。

(I)

$$D^+(\delta t, \delta \vec{x}; p, m) = e^{-ip\cdot\delta x} D^+(\delta t, \delta \vec{x}, m), \quad p^2 = m_0^2. \quad (2.45)$$

$|\vec{q}| \rightarrow \infty$ からの,

$$D^+(\delta t, \delta \vec{x}; p, m) = e^{-ip\cdot\delta x} \frac{\epsilon(\delta t)}{4\pi} \delta(\lambda) = \frac{\epsilon(\delta t)}{4\pi} \delta(\lambda) e^{-i(p_0 - |\vec{p}| \cos \theta)\delta t}, \quad (2.46)$$

は δt について 振動する。

(II) $|\vec{q} - \vec{p}| \rightarrow \infty$ から,

$$D^+(\delta t, \delta \vec{x}; p, m) = D_\infty^+(\delta t, \delta \vec{x}; p, m) + D_{finite}^+(\delta t, \delta \vec{x}; p, m), \quad (2.47)$$

$D_\infty^+(\delta t, \delta \vec{x}; p, m)$ と $D_{infy}^+(\delta t, \delta \vec{x}; p, m)$ は $p_0 \leq q_0$ と $0 \leq q_0 \leq p_0$, に対応。For $\tilde{m}^2 = m_0^2 - m^2 > 0$, δx に共役な変数 $r = q - p$ で積分, 分母を $2p \cdot r$ で展開,

$$D_\infty^+(\delta t, \delta \vec{x}; p, m) \quad (2.48)$$

$$= \frac{1}{i^2(2\pi)^4} \int d^4 r \left[\frac{1}{r^2 + m_0^2 + 2p \cdot r - m^2 - i\epsilon} - \frac{1}{r^2 + m_0^2 + 2p \cdot r - m^2 + i\epsilon} \right] e^{ir\cdot\delta x}$$

$$= D_m(\xi) D_\infty^+(\delta t, \delta \vec{x}; i\tilde{m}),$$

$$\tilde{m} = \sqrt{m_0^2 - m^2}, \quad \xi = -2ip \cdot \frac{\partial}{\partial \delta x}, \quad (2.49)$$

$$D_m(\xi) = \sum_{l=0}^{\infty} \frac{\xi^l}{l!} \left(\frac{\partial}{\partial \tilde{m}^2} \right)^l,$$

$$D_m(\xi) D_\infty^+(\delta t, \delta \vec{x}; i\tilde{m}) = \frac{\epsilon(\delta t)}{4\pi} \delta(\lambda) + D_m(\xi) \left[-\frac{\tilde{m}}{8\pi\sqrt{-\lambda}} \theta(-\lambda) \left\{ N_1(\tilde{m}\sqrt{-\lambda}) - i\epsilon(\delta t) J_1(\tilde{m}\sqrt{-\lambda}) \right\} + \theta(\lambda) \frac{\tilde{m}}{4\pi^2\sqrt{\lambda}} K_1(\tilde{m}\sqrt{\lambda}) \right]. \quad (2.50)$$

$D_\infty^+(\delta t, \delta \vec{x}; p, m)$ は light-cone singularity と regular terms からなる。前者は p と m によらない。ただし series converges の領域はこれらによる。

The integral over the region $-p_0 \leq r_0 \leq 0$ is written as,

$$D_{finite}^+(\delta t, \delta \vec{x}; p, m) = \frac{1}{i(2\pi)^3} \int \frac{d\vec{q}}{E(\vec{q})} e^{i(q-p)\cdot\delta x} \theta(p_0 - E(\vec{q})). \quad (2.51)$$

For $\tilde{m}^2 < 0$, $D^+(\delta t, \delta \vec{x}; p, m) = 0$.

高スピン成分

$D^+(\delta t, \delta \vec{x}; p, m)_{\alpha_1, \alpha_2, \dots}$ of multiple Lorentz indices

$$\begin{aligned} D^+(\delta t, \delta \vec{x}; p, m) &= \frac{1}{i^2(2\pi)^4} \int d^4 q q_{\alpha_1} q_{\alpha_2} \cdots \left[\frac{1}{q^2 + m^2 - i\epsilon} - \frac{1}{q^2 + m^2 + i\epsilon} \right] e^{i(q-p)\cdot\delta x} \theta(q_0) \\ &= \left(p_{\alpha_1} - i \frac{\partial}{\partial \delta x^{\alpha_1}} \right) \left(p_{\alpha_2} - i \frac{\partial}{\partial \delta x^{\alpha_2}} \right) \cdots D^+(\delta t, \delta \vec{x}; p, m), \text{ for } \tilde{m}^2 \geq 0, \\ D^+(\delta t, \delta \vec{x}; p, m) &= 0, \text{ for } \tilde{m}^2 \leq 0. \end{aligned} \quad (2.52)$$

2.3.5 多粒子状態からの相関関数

$D^+(\delta t, \delta \vec{x}; p, m)_{\alpha_1, \alpha_2, \dots}$ of many-body states are expressed with the mass spectrum, $\rho(m^2)$, as

$$\int dm^2 \rho(m^2) D^+(\delta t, \delta \vec{x}; p, m), \quad (2.53)$$

where

$$\rho(m^2) = \int d(\text{phasespace}) \delta \left(m^2 - \left(\sum_l p_l \right)^2 \right). \quad (2.54)$$

Two-particles

For the neutrino and electron,

$$\Delta_{e, \nu_\mu}(\delta x) = \frac{1}{(2\pi)^6} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\vec{p}_e d\vec{p}_{\nu_\mu}}{E_e E_{\nu_\mu}} (p_\mu \cdot p_{\nu_e}) (p_e \cdot p_{\nu_\mu}) e^{i(p_e + p_{\nu_\mu} - p_\mu)\cdot\delta x}, \quad (2.55)$$

$$= \frac{1}{(2\pi)^6} \int d^4 Q (p_\mu \cdot p_{\nu_e}) \frac{Q^2 - m_e^2}{2} F(Q) e^{i(Q - p_\mu)\cdot\delta x},$$

$$F(Q) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\vec{p}_e d\vec{p}_{\nu_\mu}}{E_e E_{\nu_\mu}} \delta^{(4)}(p_e + p_{\nu_\mu} - Q)$$

$$= 2\pi \left(1 - \frac{m_e^2}{Q^2} \right) \theta(Q_0) \theta(Q^2 - m_e^2). \quad (2.56)$$

Substituting $\int dm^2 \delta(m^2 - Q^2) = 1$, we have

$$\Delta_{e,\nu_\mu}(\delta x) = \frac{p_\mu \cdot p_{\nu_e}}{2(2\pi)^2} \int dm^2 \left(m^2 - 2m_e^2 + \frac{m_e^4}{m^2} \right) iD^+(\delta t, \delta \vec{x}; p_\mu, m). \quad (2.57)$$

For the two neutrino

$$\begin{aligned} \Delta_{\nu_\mu, \nu_e}(\delta x) &= \frac{1}{(2\pi)^6} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\vec{p}_{\nu_\mu} d\vec{p}_{\nu_e}}{E_{\nu_\mu} E_{\nu_e}} (p_\mu \cdot p_{\nu_e})(p_e \cdot p_{\nu_\mu}) e^{i(p_{\nu_\mu} + p_{\nu_e} - p_\mu) \cdot \delta x}, \quad (2.58) \\ &= \frac{p_\mu^\alpha p_e^\beta}{(2\pi)^6} \int d^4 Q e^{i(Q - p_\mu) \cdot \delta x} F_{\alpha, \beta}(Q), \\ F_{\alpha, \beta}(Q) &= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\vec{p}_{\nu_\mu} d\vec{p}_{\nu_e}}{E_{\nu_\mu} E_{\nu_e}} \delta^{(4)}(p_{\nu_\mu} + p_{\nu_e} - Q) (p_{\nu_e})_\alpha (p_{\nu_\mu})_\beta \\ &= \frac{\pi}{6} (g_{\alpha, \beta} Q^2 + 2Q_\alpha Q_\beta) \theta(Q_0) \theta(Q^2). \quad (2.59) \end{aligned}$$

Finally, we have the expression using m^2

$$\begin{aligned} \Delta_{\nu_\mu, \nu_e}(\delta x) &= \frac{1}{12(2\pi)^5} \int dm^2 \theta(m^2) \int d^4 Q \delta(Q^2 - m^2) \theta(Q_0) \theta(Q^2) \\ &\quad \times (Q^2 (p_\mu \cdot p_e) + 2(Q \cdot p_\mu)(Q \cdot p_e)) e^{i(Q - p_\mu) \cdot \delta x} \\ &= \frac{i}{12(2\pi)^2} \int dm^2 \left(m^2 (p_\mu \cdot p_e) + 2p_\mu \cdot \left(p_\mu - i \frac{\partial}{\partial \delta x} \right) p_e \cdot \left(p_\mu - i \frac{\partial}{\partial \delta x} \right) \right) \\ &\quad \times D^+(\delta t, \delta \vec{x}; p_\mu, m). \quad (2.60) \end{aligned}$$

第3章 相互作用する場と波動:1 QED

光は電荷と電磁気相互作用する。電子は電荷を帯びた素粒子であり、電子と光子からなる多粒子系は、電子場 $\psi(x)$ と光子場 $A_\mu(x)$ からなる量子電気力学のラグランジアン

$$L = L_0 + L_1, \tag{3.1}$$

$$L_0 = \bar{\psi}(x)(p\gamma - m)\psi(x) - \frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu}$$

$$L_1 = +ej^\mu(x)A_\mu(x)$$

で記述される。電子と光子は、電子による電流

$$j^\mu(x) = \bar{\psi}(x)\gamma^\mu\psi(x) \tag{3.2}$$

を通して、局所的に相互作用する。ラグランジアン L_1 は、電子場の2次と光子場の積の形の相互作用項を表す。この物理系は、相対論的に不変であり、時空の座標の平行移動、回転、ローレンツ変換に対する対称性と、エネルギー、運動量、角運動量保存則を満たす。

QEDの量子論は、電子場と光子場を力学変数とし、多電子や多光子状態を波動関数とする。波動関数は、量子場の理論のシュレーディンガー方程式を見だし、遷移は因果律を満たす。

3.1 自由場

3.2 電磁相互作用

3.3 コンプトン散乱

3.4 低エネルギー極限

第4章 相互作用する場と波動:2 QFD

4.1 弱い相互作用

弱い相互作用は、電荷や電流とは関係ない相互作用であり、ベータ崩壊や、ニュートリノに相互作用を与える。

4.2 ニュートリノ

ニュートリノは、スピン $\hbar/2$ で電荷を持たない素粒子である。スピンは、電子と同じであり、電気的には光子と同じである。また、質量は、両者の中間であるが、電子の質量よりも6桁以上小さい。そのため、相対論的なシュレーディンガー方程式であるディラック方程式で記述される。

運動量が p である電子の波としての波長、ド・ブロイ波長、は $\lambda = \frac{\hbar}{p}$ であり、大きな運動量では極めて短くなる。電子は、古典力学では粒子（質点）のように振る舞う。では、ニュートリノも、古典極限で粒子のように振る舞うのであろうか？

では、

電子は、固体中、空気中、真空中でいつも粒子のように振る舞うのだろうか？

電子とニュートリノの相違点は？

波の典型的な長さスケールとして、下に挙げるいくつかがある。

1. ドブロイ波長 $\lambda = \frac{\hbar}{p}$ 、運動量 p の波の波長
2. コンプトン波長 $\frac{\hbar}{mc}$ 、運動量 $p = mc$ のドブロイ波長
3. ブーストコンプトン波長 $\frac{\hbar}{mc} \frac{E}{mc^2}$ エネルギー E にブーストされたコンプトン波長

1のドブロイ波長は、質量には依存しない。しかし、2、3の長さは、質量に大きく依存する。これら3つの長さによって決定される物理を明らかにする。

第5章 相互作用する場と波動;3 重力

5.1 重ね合わせと非線形相互作用

5.2 長距離極限は古典極限か？

第6章 複合場の遷移

安定なミクロな状態には、クォークと反クォークからなる中間子、3個のクォークからなる核子、核子の陽子と中性子からなる原子核、原子核と電子からなる原子、さらに多原子からなる分子等様々な形態がある。これらは、複数の構成要素が引力により結合した束縛状態であり、結合エネルギーは、素粒子・原子核の GeV や MeV から、分子の meV やより低いエネルギーまで、10桁いじょうの広い範囲にわたる。引力のポテンシャルエネルギーと相対運動のエネルギーは、質量による静止エネルギーと比較して、素粒子では同じ程度であるが、他の多くの場合は、遥かに小さい。素粒子を除いて、他は相対運動について非相対論的な状態で記述される。重心が静止して速さが零であるときの束縛状態エネルギー（質量） Mc^2 は、構成要素の相対運動についてのハミルトニアン固有値であり、非相対論的な状態では、質量による静止エネルギーに結合エネルギーが加わる。一方、重心が速さ v で運動している座標系でのエネルギーや運動量は、 $E = \frac{Mc^2}{\sqrt{1-(v/c)^2}}$, $\vec{P} = \frac{Mc^2\vec{v}/c}{\sqrt{1-(v/c)^2}}$ となる。この関係は、非相対論的な束縛状態でも相対論的な局所場と同様な関係式 $E^2 - \vec{P}^2 = (Mc^2)^2$ を満たす。これらの複合状態間の遷移は、局所場間の遷移と同様に、量子力学の摂動論で解明できる問題である。複合状態間の遷移の確率は、重心運動の波動関数と内部状態の波動関数の両方から決定される。フェルミの黄金律への補正項 $P^{(d)}$ は、重心に関する波動関数が空間的に大きく広がった状況で、重要になる。その時、波動関数の重なりによる相互作用エネルギーが大きく変化し、運動エネルギー非保存の遷移確率が大きくなる。この場合の運動エネルギーは、重心運動エネルギーと内部状態エネルギーの和であり、相互作用エネルギーは、遷移の前後の状態間の相互作用に起因するエネルギーである。非相対論的な束縛状態の遷移確率に相対論的な重心運動が寄与することになる。この状況は、例えば希薄なガスにおける状態遷移で実現する。

6.1 束縛状態の重心運動

相対論的に共変な形で重心運動と内部運動を分離して扱うことより、黄金律の補正項まで含めた遷移確率が計算される。束縛状態は、たとえ静止系で非相対論的であっても、運動系での重心運動は相対論的になる。これらの効果は、基底状態の光の吸収や、励起状態の放射に現れる。特に、運動エネルギー非保存の現象が、（遠）赤外線からガンマ線までの広いエネルギーにわたり発現する。

参考論文 (相対論的集団座標)

K. Ishikawa, Nucl.Phys. **B107**, 238,253 (1975);Prog. Theor. Phys. **58**, 1283 (1977).

重心運動と相対運動を相対論的に分離するため、相対論的な集団変数 [15] を導入する。時空座標 x_μ は、物体や状態に無関係に定義され、空間に静止した一つの座標軸でみた時空の座標を示す。もう一つの座標系 (τ, σ^l) を、物体や状態の静止系で定義する。両座標は、関係式

$$\begin{aligned} x_\mu &= a_\mu(\tau) + b_\mu^r(\tau)\sigma^r \\ b_\mu^r b^{r'\mu} &= -\delta_{r,r'} \end{aligned} \quad (6.1)$$

で結びつく。計算の便宜上、さらに b_μ^r と直交する規格化されたベクトル b_μ^0 を加え、全体が

$$b_\mu^\lambda b^{\lambda'\mu} = g_{\lambda,\lambda'} \quad (6.2)$$

を満たす。上の式の逆から

$$\sigma^r = -b_\mu^r(x^\mu - a^\mu) \quad (6.3)$$

である。

新座標系は、中心座標 $a_\mu(\tau)$ と方向やローレンツ収縮度、 b_μ^r 、で規定される。前者は4個の自由度、後者は6個の自由度を含み、全体がポアンカレ群の10個の変数に対応する。 b_μ^r は、6個のパラメタ $\theta_i; i = 1, 6$ で、

$$\begin{aligned} b_\mu^0(\theta_i) &= (1, 0, 0, 0)U(\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_6) \\ b_\mu^1(\theta_i) &= (0, 1, 0, 0)U(\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_6) \\ b_\mu^2(\theta_i) &= (0, 0, 1, 0)U(\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_6) \\ b_\mu^3(\theta_i) &= (0, 0, 0, 1)U(\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_6) \end{aligned} \quad (6.4)$$

と表すと、直交規格化の条件を満たす。ここで、 $U(\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_6)$ は、4行4列の行列

$$U(\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_6) = e^{i\theta_1 L_{xy}} e^{i\theta_2 L_{xz}} e^{i\theta_3 L_{xy}} e^{i\theta_4 L_{0z}} e^{i\theta_5 L_{xz}} e^{i\theta_6 L_{xy}} \quad (6.5)$$

$$(6.6)$$

$iL_{xy}, iL_{xz}, iL_{0z}$ は、

$$iL_{xy} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$iL_{xz} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$iL_{0z} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

である。スピン $\hbar/2$ の粒子では、

$$S = e^{i\sigma_{\mu\nu}\theta_{\mu\nu}}, \sigma_{\mu\nu} = [\gamma_\mu, \gamma_\nu]/4 \quad (6.7)$$

$$S_{rot}(\theta_1) = \cos \theta_1/2 + i\sigma_3 \sin \theta/2 \quad (6.8)$$

$$S_{Lor}(\theta_4) = \cosh \theta_4/2 - \sigma_{03} \sinh \theta_4/2$$

$$\sigma_{ij} = \begin{pmatrix} \sigma_k & 0 \\ 0 & \sigma_k \end{pmatrix}$$

$$\sigma_{0k} = \begin{pmatrix} 0 & \sigma_k \\ \sigma_k & 0 \end{pmatrix}$$

物体の静止系でのスカラー場、ベクトル場、スピノール場 $\tilde{\phi}(\tau, \sigma^r)$, $\tilde{A}_\xi(\tau, \sigma_r)$, $\tilde{\psi}(\tau, \sigma_r)$ は空間静止系での場 $\phi(x)$, $A_\mu(x)$, $\psi(x)$ と a_μ , b_μ^r で

$$\phi(x) = \tilde{\phi}(\tau, \sigma) \quad (6.9)$$

$$A_\mu(x) = b_\mu^\xi \tilde{A}_\xi(\tau, \sigma_r)$$

$$\psi(x)_\xi = S_{\xi\zeta} \tilde{\psi}(\tau, \sigma_r)_\zeta$$

$$S^\dagger \gamma_\mu S = b_\mu^r \gamma_r \quad (6.10)$$

と表される。これらの場で、作用積分が

$$\begin{aligned} S &= \int dx_0 d\vec{x} L(A_\mu(x), \psi(x), \dots, \phi(x), \dots) \\ &= \int d\tau d\vec{\sigma} \frac{\partial(x_0, \vec{x})}{\partial(\tau, \vec{\sigma})} L'(\tilde{A}_\xi(\tau, \vec{\sigma}), \dots, \tilde{\phi}(\tau, \vec{\sigma})) \end{aligned} \quad (6.11)$$

ここで、

$$\begin{aligned}\frac{\partial(x_0, \vec{x})}{\partial(\tau, \vec{\sigma})} &= \\ \frac{\partial}{\partial x_0} \phi(x) &= \frac{D}{D\tau} \tilde{\phi} \\ \frac{\partial A_i(x)}{\partial x_0} - \frac{\partial A_0(x)}{\partial x_i} &= \frac{D}{D\tau} \tilde{A}_r - \frac{\partial}{\partial \sigma_r} \tilde{A}_0 + \frac{1}{h^0} b_r^\nu b_\nu^\xi \tilde{A}_\xi\end{aligned}\quad (6.12)$$

また、

$$\begin{aligned}h^0 &= b_\mu^0 (\dot{a}^\mu + \dot{b}_i^\mu \sigma_i), \\ h^r &= b_\mu^r (\dot{a}^\mu + \dot{b}_i^\mu \sigma_i), \\ \frac{D}{D\tau} &= \frac{1}{h^0} \frac{\partial}{\partial \tau} - \sum_r \frac{h^r}{h^0} \frac{\partial}{\partial \sigma_r}\end{aligned}\quad (6.13)$$

と関係し、スカラー場に依存する作用積分は、

$$\begin{aligned}S &= \int d^4x [(\frac{\partial \phi(x)^*}{\partial x_\mu} - ie A_\mu \phi^*)(\frac{\partial \phi(x)}{\partial x_\mu} + ie A_\mu \phi) - m^2 \phi^* \phi(x) - \frac{\lambda}{3} \phi(x)^3] \\ &= \int d\tau L(a_\mu, \theta_i, \dot{a}_\mu, \dot{\theta}_i \tilde{\phi}(\tau, \sigma_i))\end{aligned}\quad (6.14)$$

$$\begin{aligned}L(a_\mu, \theta_i, \dot{a}_\mu, \dot{\theta}_i \tilde{\phi}(\tau, \sigma_i)) &= \int d^3\sigma h^0 [(\frac{D\tilde{\phi}^*(\tau, \sigma)}{D\tau} - ie \tilde{A}_0 \tilde{\phi}^*)(\frac{D\tilde{\phi}(\tau, \sigma)}{D\tau} + ie \tilde{A}_0 \tilde{\phi}) \\ &- \sum_r ((\frac{\partial \tilde{\phi}^*(\tau, \sigma)}{\partial \sigma_r} - ie \tilde{A}_r \tilde{\phi}^*)(\frac{\partial \tilde{\phi}(\tau, \sigma)}{\partial \sigma_r} + ie \tilde{A}_0 \tilde{\phi})) - \frac{\lambda}{3} (\tilde{\phi}(\tau, \sigma))^3]\end{aligned}\quad (6.15)$$

となる。フェルミ場とベクトル場に依存する作用は、ここでは書かない。

6.2 Constraints (拘束条件)

集団座標で記述される運動と、物体系における場の変数で記述される運動を分離するため、もともと場で書かれた作用積分を新たに導入した集団座標と場で表した。この作用積分(6.14)を使い、物理量を計算する。ここで、新たな力学変数の自由度は、場の演算子と無関係ではないことに注意を払う必要がある。両者の関係は、上の作用積分から座標に共役な運動量を定義すると、

$$\begin{aligned}P_\mu &= \frac{\partial L}{\partial \dot{a}_\mu} = -b_\mu^\xi \tilde{P}_\xi \\ \omega_i &= \frac{\partial L}{\partial \dot{\omega}_i} = \frac{1}{2} b_\mu^\xi \frac{\partial \dot{b}^{\mu\eta}}{\partial \dot{\theta}_i} \tilde{L}_{\xi\eta}\end{aligned}\quad (6.16)$$

$$E_0 = \frac{\partial L}{\partial \dot{\tilde{A}}_0} = 0 \quad (6.17)$$

$$E_r = \frac{\partial L}{\partial \dot{\tilde{A}}_r} = \frac{D}{D\tau} \tilde{A}_r - \frac{\partial}{\partial \sigma_r} \tilde{A}_0 + \frac{1}{h^0} b_r^\nu \dot{b}_{\nu\epsilon} \tilde{A}_\epsilon$$

$$\pi^* = \frac{D\tilde{\phi}}{D\tau} + ie\tilde{A}_0\tilde{\phi} \quad (6.18)$$

$$\pi = \frac{D\tilde{\phi}^*}{D\tau} - ie\tilde{A}_0\tilde{\phi}^*$$

と自動的に導かれる。条件式 (6.16) は、物理系の運動量が物体系における運動量を変換して得られ、(6.17) は同様に物理系の回転・ローレンツ変換の生成子が、物体系における生成子の変換であることを示す。これらは、ポアンカレ群に対応している。また、条件式 (6.17) は、ゲージ場でいつも成立する関係式であり、 \tilde{A}_0 が独立な自由度ではないことを示す。ゲージ場は、secondary 条件

$$\nabla \vec{E} - \rho = 0 \quad (6.19)$$

を満たす。この力学系は、拘束条件がとじた代数を構成している、第一種の拘束系である。ゲージ固定条件を課して、余分の自由度を消去できる。うまいゲージ固定条件を使えば、計算は簡単である。

ソリトンの量子化に際しては、場の微小震動のなかの零固有値モードを消去することで、物体に固定した座標系とするゲージ固定条件を取る。ソリトンの古典解の空間微分や、角度微分で表せる零エネルギー解に直交する場の空間が構成出来、物体に固定した座標系における場の自由度を表す。ソリトンに無関係な、束縛状態でも、零固有値モードに直交する場の空間を構成することで、同じ方法が使える。

多くの状態は、クーロン相互作用による引力で結合した束縛状態である。ゲージ場の拘束条件がクーロン相互作用の具体的な形を決める。だから、零固有値モードの同定は、ゲージ場の拘束条件に着目して行われる。

$$(\tilde{A}(\sigma), \tilde{\phi}(\sigma), \tilde{\psi}(\sigma)) \quad (6.20)$$

平行移動

$$\int d\sigma [\tilde{A}_r \tilde{A}_r^{zero} + \tilde{p}hi(\sigma) \tilde{\phi}^{zero} + \sigma \psi^\dagger \psi^{zero}] = 0 \quad (6.21)$$

$$A_r^{zero} = \frac{\partial}{\partial \sigma_j} \tilde{A}_j^{classical}, \psi^{classical} = \quad (6.22)$$

回転

6.3 電磁遷移

電流演算子の期待値を、相対論的に共変な形で計算する。前節の集団座標を使う。

$$\langle p_1 | j_\mu(0) | p_2 \rangle = \quad (6.23)$$

座標 $x_\mu(0) = 0$ は、物体固定座標系では、

$$a_\mu = -b_\mu^r \sigma_r, \quad (6.24)$$

$$\sigma_r = b_\mu^r a^\mu \quad (6.25)$$

である。また、 a_μ, b_μ^r は系の運動量 p_μ と関係する。このため、物体固定座標 σ^r の関数 $f(\sigma^r)$ を含む演算子の期待値は、運動量の変化 $p_\mu^1 - p_\mu^2$ の相対論的に共変な関数となる。

6.4 局所場近似

ここで調べる複合場の電磁遷移では、放射場の波長は複合場の内部波動関数の広がりよりもはるかに長い。そのため、遷移行列要素を2重極部分や、4重極部分で計算する局所場近似が "黄金律" を満たす項 Γ に対して使われてきた。 Γ の満たす運動エネルギー保存則から、束縛状態のエネルギー差が Γ からの放射のエネルギーを決める。補正項 $P^{(d)}$ は運動エネルギー保存則を破り連続スペクトルを与える。スペクトルは、束縛状態のエネルギー差から零エネルギーにわたる。 $P^{(d)}$ からの放射の波長は Γ からの放射よりも長くなる。そのため、 $P^{(d)}$ の計算でも、局所場近似は良い近似になっている。複合場の遷移の計算には、 ϕ^3 相互作用におけるスカラーの遷移や、QEDにおける遷移で前の章で行った方法や結果をそのまま使える。

第7章 まとめ

関連図書

- [1] H. Lehman, K. Symanzik, and W. Zimmermann, *Il Nuovo Cimento* (1955-1965). **1**, 205 (1955).
- [2] F. Low, *Phys. Rev.* **97**, 1392 (1955).
- [3] M. L. Goldberger and Kenneth M. Watson, *Collision Theory* (John Wiley & Sons, Inc. New York, 1965).
- [4] R. G. Newton, *Scattering Theory of Waves and Particles* (Springer-Verlag, New York, 1982).
- [5] J. R. Taylor, *Scattering Theory: The Quantum Theory of non-relativistic Collisions* (Dover Publications, New York, 2006).
- [6] K. Ishikawa, *Quantum Mechanics of Fields (場の量子力学)* (Baifuukan, Tokyo, 2007).
- [7] K. Ishikawa and T. Shimomura, *Prog. Theor. Phys.* **114**, 1201 (2005) [hep-ph/0508303].
- [8] K. Ishikawa and Y. Tobita. *Prog. Theor. Phys.* **122**, 1111 (2009) [arXiv:0906.3938[quant-ph]].
- [9] K. Ishikawa and Y. Tobita, *AIP Conf. proc.* **1016**, 329(2008); arXiv:0801.3124 [hep-ph].
- [10] K. Ishikawa and Y. Tobita, arXiv:1106.4968[hep-ph].
- [11] A. Asahara, K. Ishikawa, T. Shimomura, and T. Yabuki, *Prog. Theor. Phys.* **113**, 385 (2005) [hep-ph/0406141]; T. Yabuki and K. Ishikawa. *Prog. Theor. Phys.* **108**, 347 (2002).
- [12] P. A. M. Dirac. *Pro. R. Soc. Lond. A* **114**, 243 (1927).
- [13] L. I. Schiff. *Quantum Mechanics* (McGRAW-Hill Book COMPANY, Inc. New York, 1955).
- [14] N. N. Bogoliubov and D. V. Shirkov. *Introduction to the Theory of Quantized Fields* (John Wiley & Sons, Inc. New York, 1976).
- [15] K. Ishikawa, *Nucl.Phys.* **B107**, 238,253 (1975);*Prog. Theor. Phys.* **58**, 1283 (1977).