世界で最初の学会

メルセンヌを取り囲む人々

サイクロイドの話をめぐって

マラン・メルセンヌ (Marin Mersenne) 1588/9/8—1648/9/1

メルセンヌとはどういう人か



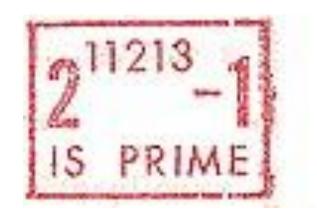
メルセンヌは15世紀後半から16世紀半ばの、フランスのミニム会修道士。その名は現在の数学の難問のひとつに残る。直接、間接的に交流した人たちのなかには、パスカル、トリチェリ、デカルト、フェルマー、ホイゲンスなどの錚々たる人物がいた

メルセンヌ素数

- Cogitata Physica-Mathematica(1644:物理数学の省察)でメルセンヌは次のような仮説を発表した。
- $M_n = 2^n 1 / t$ n = 2, 3, 5, 7, 13, 17, 19, 31, 67, 127, 257
- の時に素数になるが、それ以外のn<257の整数に対しては、 合成数である。
- 1947年、メルセンヌの仮説に間違いがあることが分かった。
 - M_{67} , M_{257} は素数ではない。 M_{61} , M_{89} , M_{107} は素数である。
- もっとも大きなメルセンヌ数はM₃₀₂₁₃₇₇ で909526桁の数 である(19歳のRoland Clarksonによる)。

メルセンヌ素数を探すのは計算的に も挑戦的

アラバマ大学数学科の郵便局で取り扱われた全ての郵便物にこのスタンプが使われた。





Donald B. Gillies (1928-1975)がスプートニク時代に計算機をつなげて使うアルゴリズムを開発し、その当時のスーパーコンピューターILLIAC IIを用い、その例題としてこのメルセンヌ素数を発見した(1964)。

メルセンヌ数は完全数と密接な関係

完全数とはその数を除く約数の和がその数 自身と同じになる数;

例えば6(=1+2+3)、28(=1+2+4+7+14)

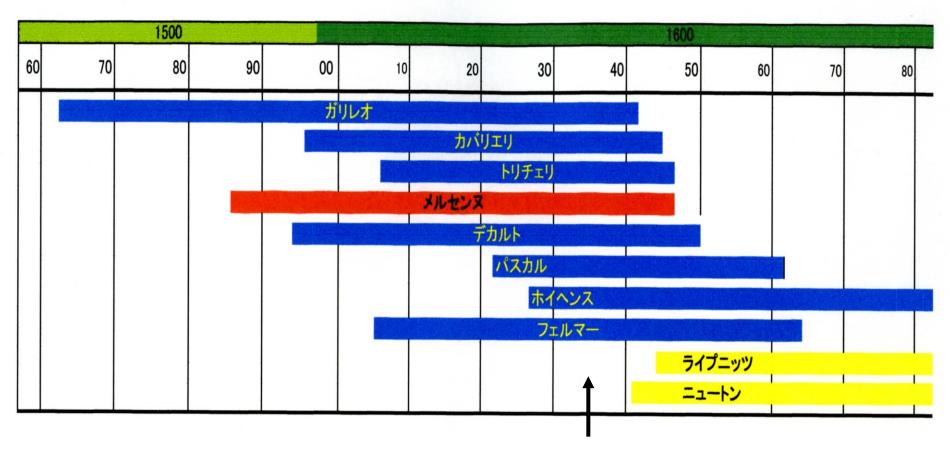
M_nがメルセンヌ素数ならば、2ⁿ⁻¹M_nは完全数である。これはユークリッドの時代から知られていた。

例えば $2^{1}(2^{2}-1)=6$ 、 $2^{2}(2^{3}-1)=28$

• オイラーは偶数の全ての完全数はメルセンヌ素数 に対応するものであることを証明した。

メルセンヌ・アカデミーの仲間

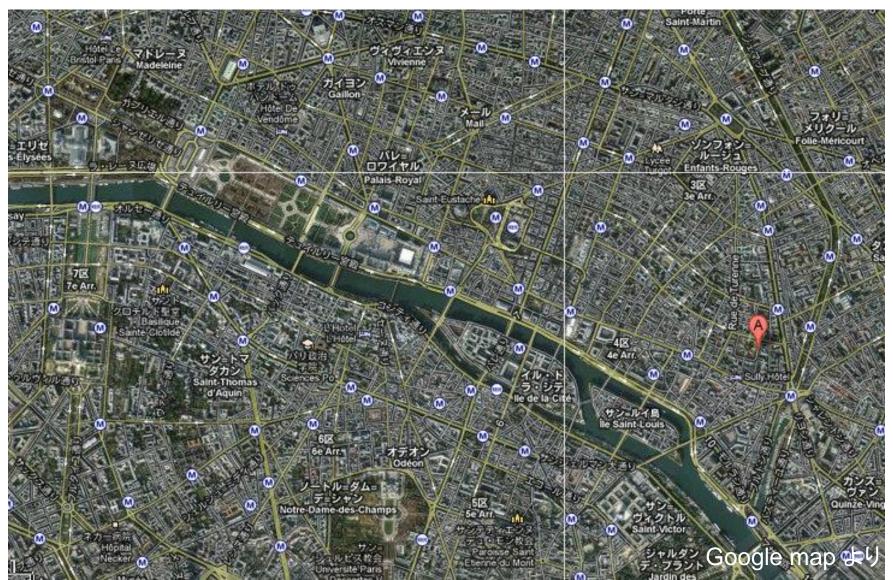
・メルセンヌはガリレオとニュートンを結ぶ学問の橋となった。



1635:メルセンヌ・アカデミーを創設

メルセンヌの住んでいた場所

・私が住んでいた街のすぐ近くだった。







・広場の中央に革命記念塔、後ろにオペラ座がある。

現在のヴォージェ広場

ルイ13世の館があった。後にビクトル・ユーゴーもここに住んだ。今はしゃれたカフェー、洋品店がある。



ヴォージュ広場

- この広場と館はアンリ4世によって、1605年から1612年にかけて作られた。したがってプラス・ロワイヤルと呼ばれていた。メルセンヌにとって、この広場は真新しいものであったに違いない。ミニム会の修道院もこの建設に伴って作られた可能性がある。
- フランス革命のあと、ヴォージュ広場と名前を変えた。 それはフランス革命委員会に税金を最初に供出し たボージュ県(Vosges:フランス北東部ロレーヌ地 方にある)に敬意を表して命名されたものという事だ。

メルセンヌの庵室

- ・メルセンヌは1619年からこの地域にあったミニム会の修道院に移り住んだ。
- ・メルセンヌと同時代のイギリスの有名な哲学 者トーマス・ホッブス(1588-1679)は、
- 「彼の庵室はすべての学校よりも重要であった。メルセンヌの周囲には学芸の星々が、それぞれに彼を軸として軌道を回っていた」と書いています。

ホイヘンスはライプニッツの先生

- 1672年ライプニッツはパリへ行った。そこでメルセンヌ・アカデミーの面々に刺激を受けた。
- ホイヘンスがライプニッツに与えた問題。3角数の逆数の和を求めよ。

$$S = 1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{6} + \frac{1}{10} + \frac{1}{15} + \frac{1}{21} + \cdots$$

ライプニッツは次のように解いた。まず上の式の両辺を2で割る。

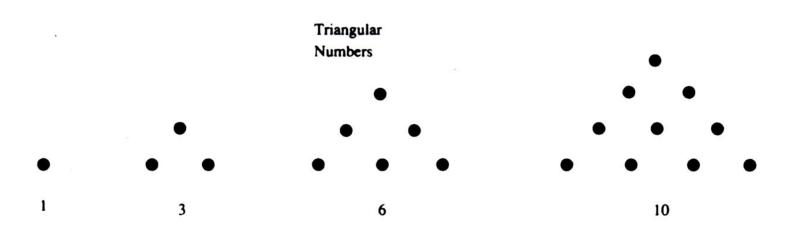
$$\frac{1}{2}S = \frac{1}{2} + \frac{1}{6} + \frac{1}{12} + \frac{1}{20} + \frac{1}{30} + \cdots$$

$$= (1 - \frac{1}{2}) + (\frac{1}{2} - \frac{1}{3}) + (\frac{1}{3} - \frac{1}{4}) + (\frac{1}{4} - \frac{1}{5}) + \cdots$$

$$= 1$$

三角数とは

• 下のように三角形に並べた石の数



1, 3, 6, 10, 15, 21, ••••••

すなわち $A_n = A_{n-1} + n$ となっているような数列

ミニム会の経緯

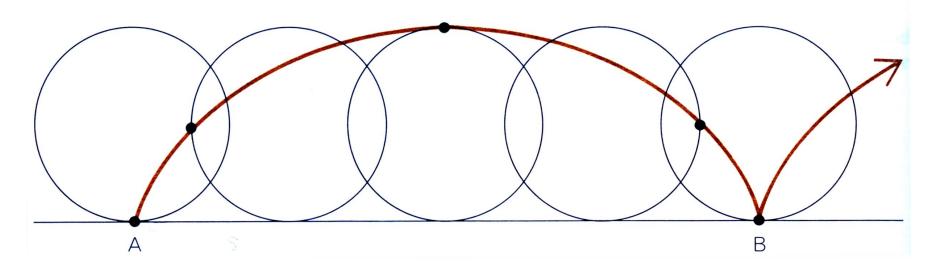
- ミニム会(もっとも小さな兄弟会)とは?
- フランチェスコ会:アッシジの聖フランチェスコによって創始されたカトリック教会の一派
 - アッシジに生まれたフランチェスコは、清貧をモットーに、12人の弟子たちとともにフランチェスコはイタリアの各地を宣教して巡った。この12人の仲間はやがて「小さき兄弟の修道会」を名乗るようになり、ローマ教皇からも1210年にその活動が認められ、「フランチェスコ会(小さき兄弟の修道会)」が成立します。このフランチェスコ会はローマ教皇や各国の王族の庇護もあり、次第にイタリア、フランスのみならずヨーロッパ諸国で信者を増やしていった。
- サンフランシスコの中心にある教会はサン・フランシスコ・デ・アシスは、アッシジのサン・フランチェスコという意味

ミニム会の経緯(2)

- もうひとりのフランチェスコ
- パオーラ(Paola)のフランチェスコと呼ばれる聖人で、アッシジのフランチェスコの誕生(1182)からほぼ230年後の1416年に、南イタリアのパオーラ(Paola)に生まれた人物。パオーラは南イタリアの代表的都市である、ナポリのさらに200kmほど南にある小さな町。長靴型のイタリアのつま先部分にあたる。
- アッシジの聖フランチェスコが創立したフランチェスコ会も、創立から200年もたった頃には、初期の質素、清廉、禁欲の精神から遠ざかっていたのでしょう。パオーラのフランチェスコは、アッシジのフランチェスコの目指した「小さな兄弟の会」をさらに、徹底しようとし、「もっとも小さな兄弟、ミニム」会を創立した。
- ミニム会はやがてカトリック教会の様々な会派のなかでも、各国の王侯によって支持されるようになり、メルセンヌの時代にはフランスではもっとも有力なキリスト教の会派になっていった。だから、メルセンヌの居たミニム会の庵も王宮広場の隣に作られたのであろう。

サイクロイドの話

- メルセンヌ・アカデミーの話をするには、サイクロイドの話が もっとも適切と考える。
- サイクロイド曲線は下の図のような曲線である。
- 1640年にガリレオの忠実な弟子であったイタリアの数学者、カヴァリエリ(Francesco Bonaventura Cavalieri、1598-1647:ミラノのブレラ美術館にその大理石像がある)に宛てた手紙のなかに、ガリレオはこの曲線について50年以上も考えつづけていたと書いてあり、この曲線をギリシャ語の円に近いものという意味で名づけたとあります。



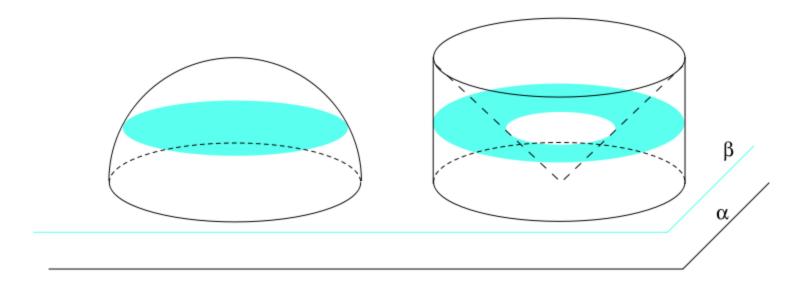
カバリエリの像

イタリア・ミラノの出身、この像はミラノのブレア美術館にある。



カバリエリの定理

・ 左の半球の体積と右の円柱から三角錐を切り抜いた物体の体積は等しい。 cs.wikipedia より



体積を薄く切って算出する方法が微積分が発明されるまえに、 考え出されていた。

サイクロイドに挑戦した人々

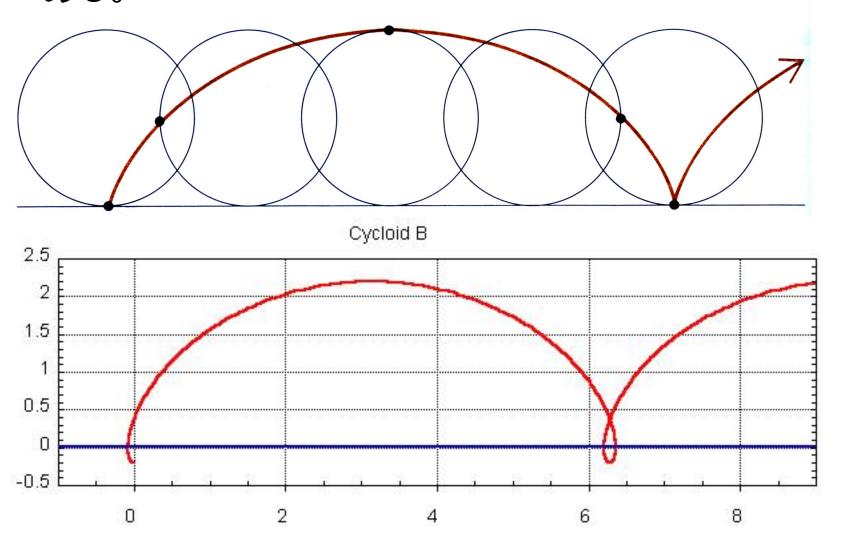
- Galileo, Pascal, Torricelli, Decartes, Fermat, Christopher Wren(ニュートンと同時代の建築家。ニュートンにプリンキピアを書く事を勧めた), John Wallis(∞の記号を発明), Huygens, Johann Bernoulli, Leibniz, Newtonなど。
- その美しさから「幾何学のヘレン」(ヘレンとは ギリシャ、スパルタの王妃。絶世の美女だっ たと知られる。トロイの王子パリスと結婚し、トロイの滅亡の原因となった。)

サイクロイドにまつわるパズル

- 東京から大阪にむけて走る新幹線の列車を 考えよ。
- この車両のなかで、一瞬だとしても静止している部分、あるいは大阪から東京の方向に逆向きに動いている部分はあるだろうか。

パズルの答え

等速運動で走る列車の車輪の動きはサイクロイドである。



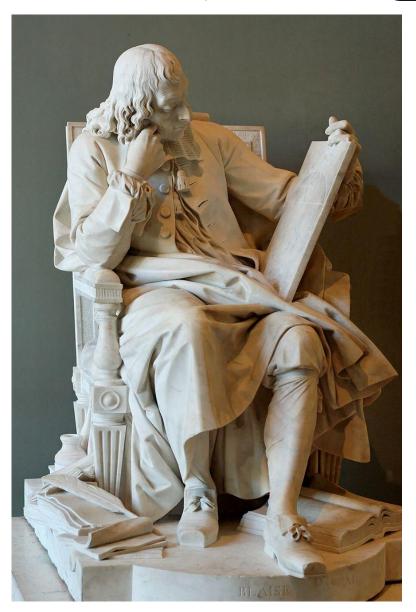
サイクロイドは土木学的も重要

- サイクロイドの形は上からの力に対してもっとも強い構造。
- ガリレオはその強さから、サイクロイドに興味をもったか?



長崎のめがね橋、Wikipediaから

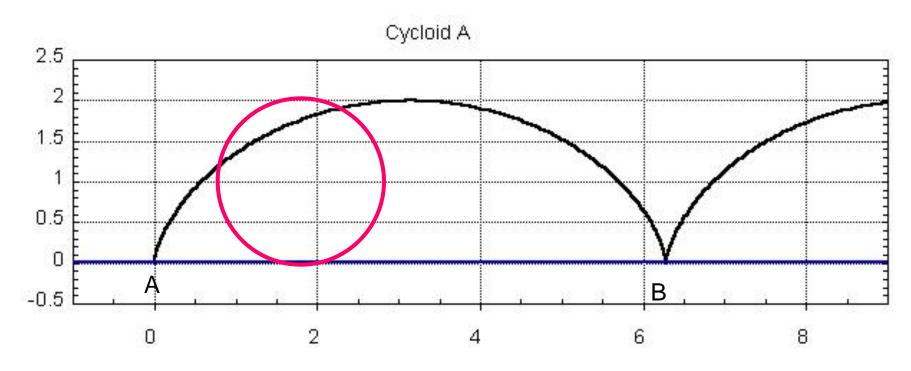
サイクロイドを眺めるパスカル



- 宗教的思索に没頭しようと決めたパスカルは数学の研究を止めた。しかしある日、ひどい歯痛に苦しめられたため、その痛みを忘れる為に、彼は数学の問題、サイクロイドについて研究した。
- この彫像はルーブル博物館にある。

サイクロイドの幾何学(1)

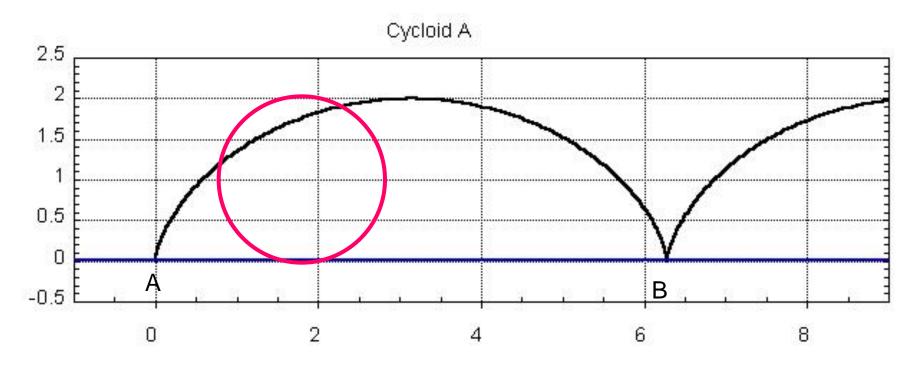
- サイクロイドの弧の長さは?
- 最初に正しい答えを与えたのは、イギリスのWren(1658)



ABの距離はもとの円の直径のπ倍、すなわちこの図では6.28

サイクロイドの幾何学(1)

- サイクロイドの弧の長さは?
- 最初に正しい答えを与えたのは、イギリスのWren(1658)

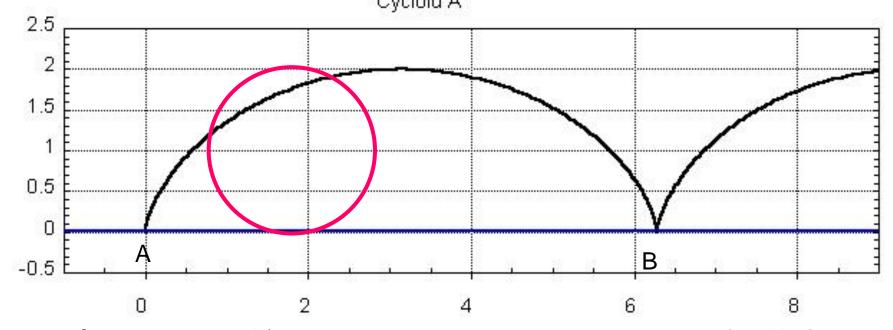


ABの距離はもとの円の直径のπ倍、すなわちこの図では6.28

答え: 円の直径の4倍!、この図では長さ8

サイクロイドの幾何学(2)

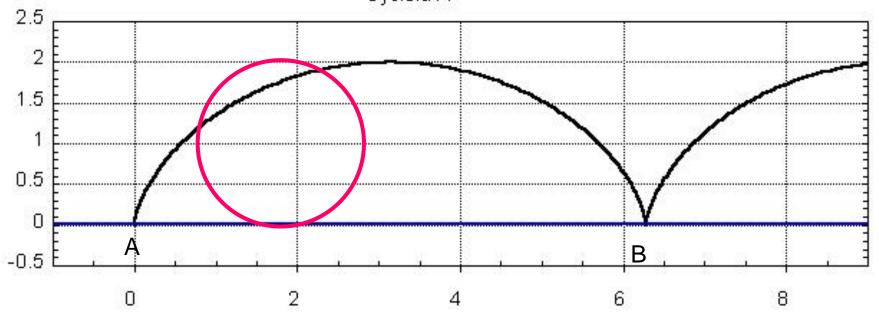
- サイクロイドの弧の下の面積は?
- ガリレオはもとの円の面積のπ倍と考えた。 紙を切って重さを測った。



最初に正しい答えを与えたのは、フランスの数学者 Rovervalとイタリアの Torricelli

サイクロイドの幾何学(2)

- サイクロイドの弧の下の面積は?
- ガリレオはもとの円の面積の π 倍($\pi^2 r^2$)と考えた。 紙を切って重さを測った。

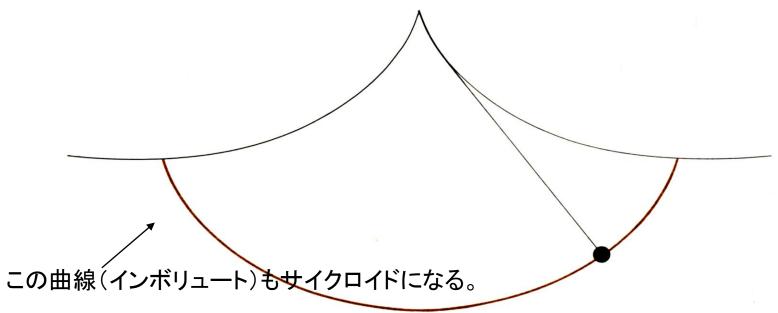


最初に正しい答えを与えたのは、フランスの数学者Gillesとイタリアの Torricelli

答え:円の面積のちょうど3倍、3πr²

サイクロイドの力学(1)

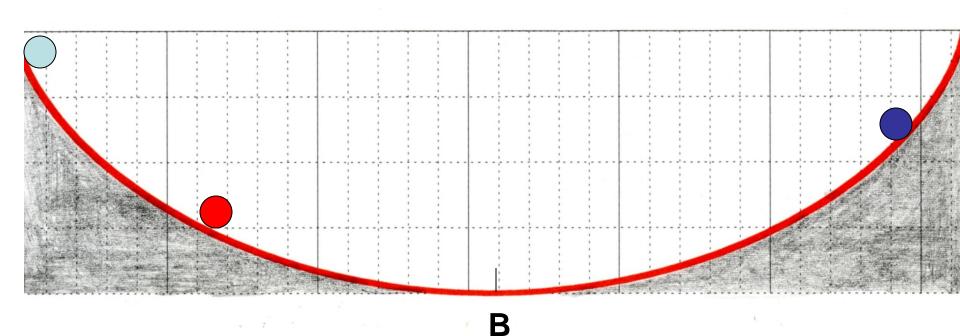
- オランダの物理学者ホイヘンス(1673)はサイクロイドの等時性に気がついた。
- 振り子の等時性はよく知られているが、本当は振り子の等時性が成り立つのは、その振幅が小さいときだけである。
- 大振幅の振り子でも等時性をもたらすのは、振り子の揺れに 下の図のように、サイクロイドで制限を加えると良い。



ホイヘンスは実際に世界で初のフレキシブル振り子の時計を作ったが、普及しなかった。

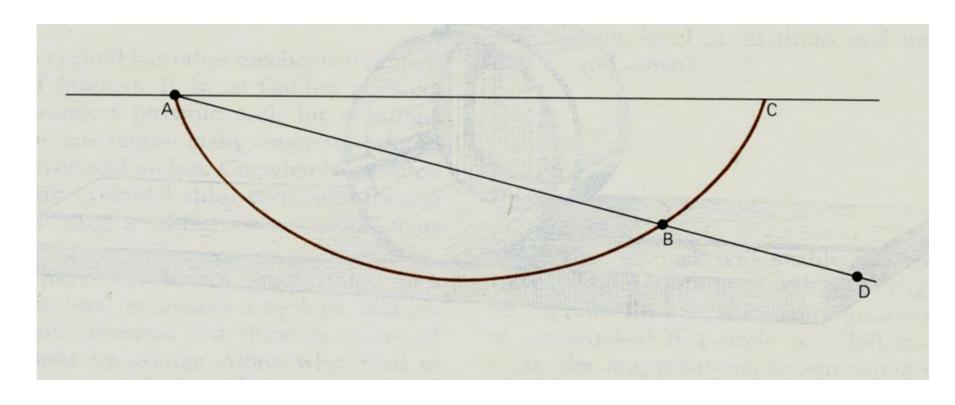
サイクロイドの力学(2)

• どのボールが一番先に底 B に到達するか?



最速降下線

AとBを結ぶ線のなかで、もっとも早く到達できる道筋はどれか?



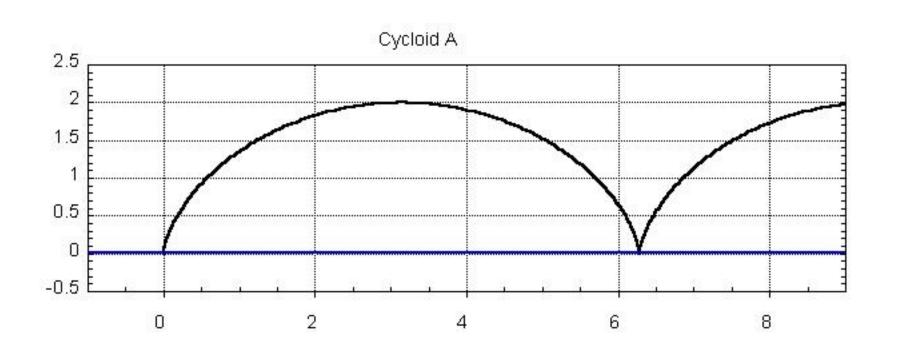
直線ABの坂を転がるよりも、サイクロイドに沿う道の方が早い。

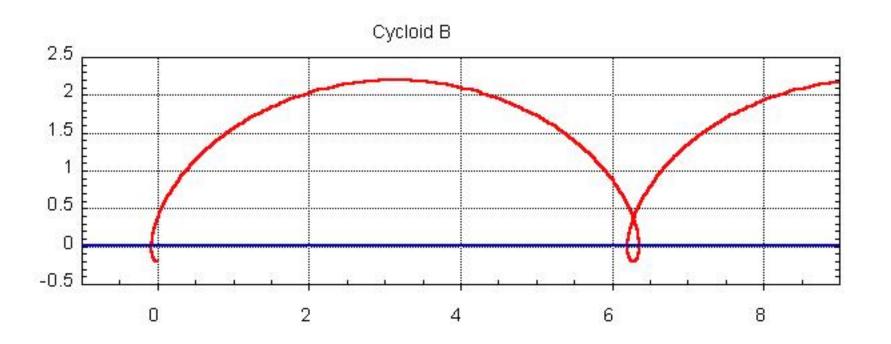
サイクロイドは面白い

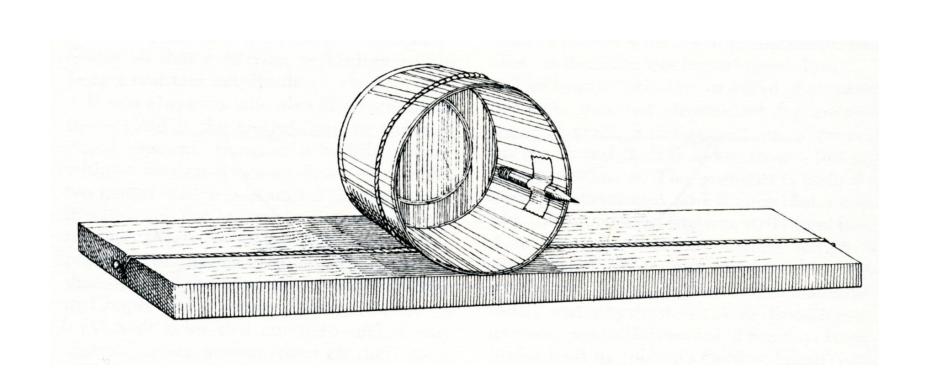
- 科学者の集まりは有益であることを最初に 示したのは、メルセンヌだった。
- ・メルセンヌ・アカデミーは後にフランス科学院となった。
- 我々も学会やセミナーで活発な意見交換をして、学問を楽しむべきであろう。

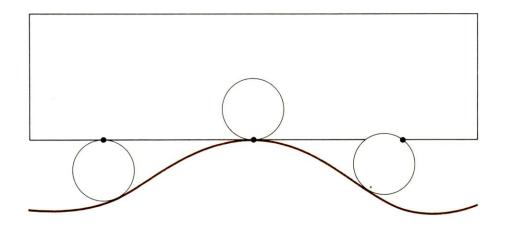
おしまい

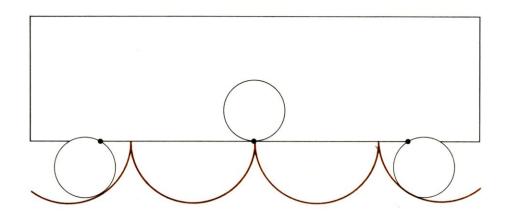
サイクロイドの弧の長さ











参考文献

- Portraits of Statisticians (2013/09/20)
 - http://www.york.ac.uk/depts/maths/histstat/people/mer senne.gif
- カバリエリの写真
 - Giovanni Antonio Labus, Monument to mathematician Bonaventura Cavalieri, signed and dated 1844, in the courtyard of the Palace of Brera at Milan. Picture by Giovanni Dall'Orto, January 19 2007.
- カバリエリの原理(2013/09/20)
 - http://upload.wikimedia.org/wikipedia/commons/c/c8/ Cavalieriho_princip.svg