

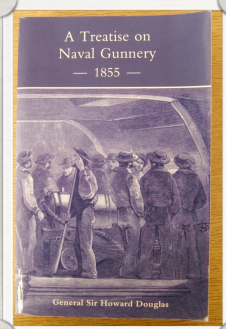
石の水切りのSPHシミュレーション

仙台高専機械システム工学科

永弘進一郎

物体と水面の斜め衝突：実験

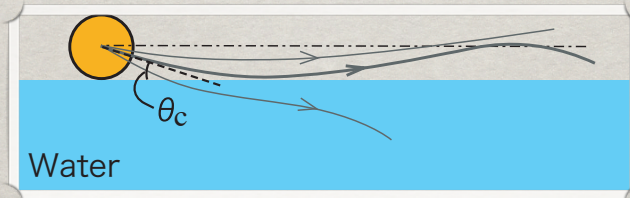
Weight[Cwt.]	distance[Yards]	Number of ricochet
84	2850	16
65	2900	32



反発の臨界角：

$$\theta_c = 18/\sqrt{\sigma}$$

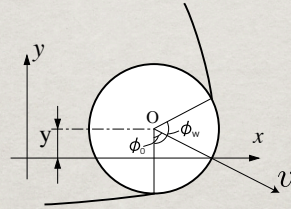
$$\sigma = \frac{\text{物体の密度}}{\text{流体の密度}}$$



反発の定義をどこかに入れる

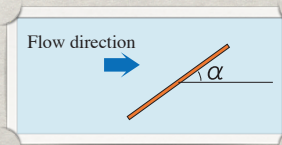
円柱衝突の理論

Johnson and Reid(1975)



$$m \frac{dv}{dt} = \int_{\text{surface}} p_n dS$$
$$p_n = \frac{\pi \sin \alpha}{4 + \pi \sin \alpha} \rho v^2$$

(Rayleighの式)



球でも円柱でも、結果は殆ど変わらず。

円柱衝突の理論

352

The Impact of a Solid on a Liquid Surface

By E. G. RICHARDSON
King's College, Newcastle upon Tyne
MS. received 17 February 1948

ABSTRACT. Part I consists of a study of the motion of a solid sphere when it strikes a liquid surface vertically. The shape of the air cavity formed is delineated and explained in terms of potential flow and the resistance experienced by the sphere in this stage is measured. These factors are found to scale on the basis of a Froude parameter. The pressure developed in the cavity is also measured and found to involve reverberations in the cavity of large amplitude. In Part II the impact forces on the sphere and other forms of projectile on entry into the liquid are studied and compared with theory. The mechanisms and forces involved when a sphere ricochets after entry at oblique angles are also discussed.

GENERAL INTRODUCTION

EXPERIMENTAL work on the impact of solids on water has been carried out with two objects in view: (i) to study the splash and, in one instance, the sounds associated with it; (ii) to measure the force of impact. During the latter part of the work, and from this aspect the author carried out the research at the Royal Aircraft Establishment in the period 1942-1943. This work was concerned with applications to water-entry ballistics and the impact of seaplanes on landing. It was planned as a research using the sphere as basic form of solid. The work is divided into two parts, in accordance with the above.

PART I. CAVITY FORMATION

§1. INTRODUCTION

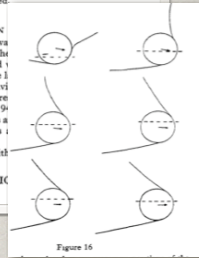
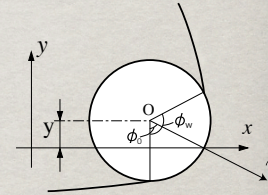


Figure 16

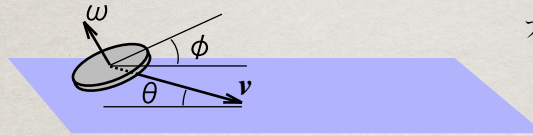


$$m \frac{dv}{dt} = \int_{\text{surface}} p_n dS$$



$$\theta_c = 17.8/\sqrt{\sigma}$$

物体と水面の斜め衝突：実験（２）



フルード数：

$$F = \frac{v^2}{gl} \sim 1$$

円板（石）に十分大きい回転を加えて水面へ衝突させる
→ ϕ はほとんど変化しない。

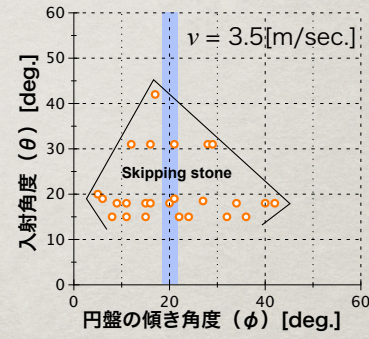
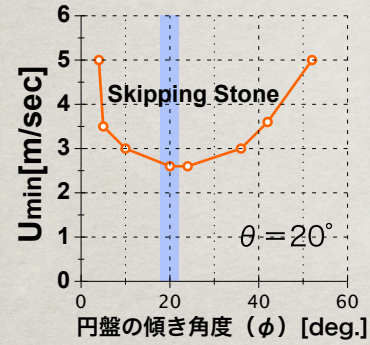
初期条件： 入射角度 θ
円板の水面に対する迎え角度 ϕ
衝突初期速度 v_0

円板の半径：5 [cm], 入射速度 ~ 3 [m/sec.]

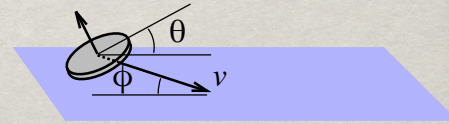
C. Clanet, F. Hersen and L. Bocquet. *Nature*, 427 (2004)

フロード数のオーダーの違いに注意。

石の水切りの実験



"Magic Angle" $\phi_m \sim 20^\circ$



C. Clanet, F. Hersen and L. Bocquet. *Nature*, 427 (2004)

衝突する物質が円盤になると、（パラメータが増える事などから）反発条件に新しい性質が現出すると言いうい方をする。

発表の項目

1, 数値計算手法 –SPH法

2, 水面と円柱の2次元衝突シミュレーション

円柱・流体表面の衝突シミュレーション。反発のベキ則と比較を行い、SPH法の衝突問題への妥当性と問題点を検証。

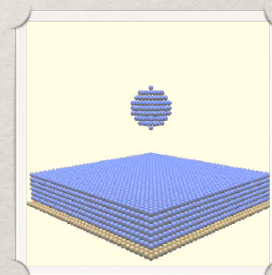
3, 水面と円板の3次元衝突とモデル解析

円板と水面の衝突の3次元シミュレーション。実験結果の再現。数値解析より得られた結果を元に、円板が受ける力の性質を調べ、衝突を単純化したモデルを解析する。

4, 結論、今後の課題

1, 数值計算手法 -SPH法

計算例：液滴と水面の衝突



自由表面を扱う数値計算手法

Lagrange描像に基づく手法

- ・ SPH(Smoothed Particle Hydrodynamics)法
- ・ MPS(Moving Particle Semi-implicit) 法
非圧縮性を保証した粒子法。

Euler描像に基づく手法

- ・ CIP(Cubic Interpolated Propagation)法
- ・ Level-set法



衝突を扱う都合上、運動量やエネルギーの保存が保証されるスキームが望ましい SPH法

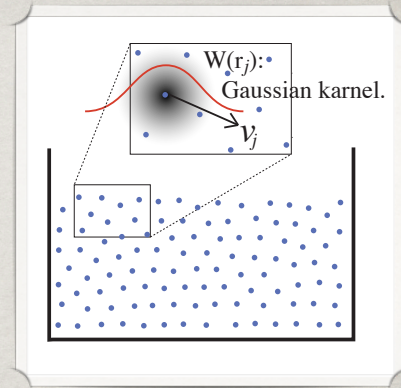
自由表面を扱うのは難しい=>なのでSPHを使う。というつながり

SPH法 (1)

これを用いて、任意の物理量Aを

$$\langle A \rangle(\mathbf{r}) = \sum_j \frac{m}{\langle \rho \rangle_j} A_j W(\mathbf{r} - \mathbf{r}_j)$$

$$\langle \nabla A \rangle(\mathbf{r}) = \sum_j \frac{m}{\langle \rho \rangle_j} A_j \nabla W(\mathbf{r} - \mathbf{r}_j)$$
$$\langle \rho \rangle_j \equiv \langle \rho \rangle(\mathbf{r}_j)$$



図を曇っぽくする

SPH法 (2)

Navier-Stokes方程式

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + (\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u} = -\frac{1}{\rho} \nabla p + \nu \nabla^2 \mathbf{u} + \left(\frac{\zeta}{\rho} + \nu/3 \right) \nabla \nabla \cdot \mathbf{u}$$



$$\langle A \rangle(\mathbf{r}) = \sum_j \frac{m_j}{\langle \rho \rangle_j} A_j W(\mathbf{r} - \mathbf{r}_j)$$

に基づく補間の手続き

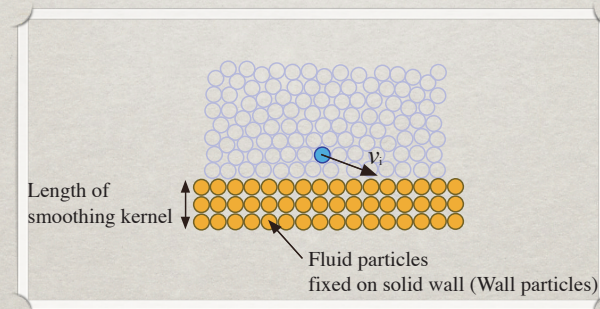
SPHの運動方程式

$$\frac{d}{dt} \langle \mathbf{u} \rangle_i = - \sum_j \frac{m_j}{\rho_i \rho_j} \left\{ p_i + p_j - \nu \xi \frac{\mathbf{u}_{ij} \cdot \mathbf{r}_{ij}}{r_{ij}^2} \right\} \nabla_i W_{ij}$$

圧力を決定する状態方程式： $p_i = \begin{cases} c^2 \rho_0 \left(\frac{\langle \rho \rangle_i}{\rho_0} - 1 \right) & \langle \rho \rangle_i \geq \rho_0 \\ = 0 & \langle \rho \rangle_i < \rho_0 \end{cases}$

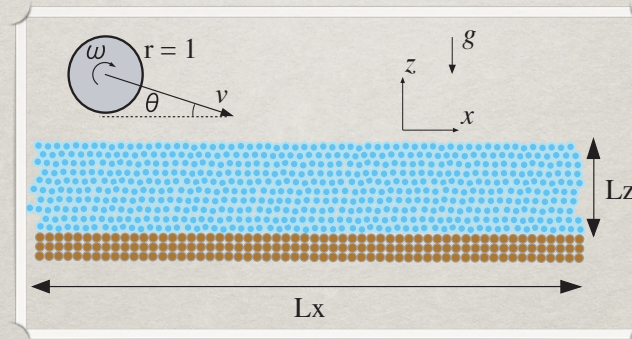
SPH法 (3) – 境界条件

固体の表面に粘性によって固定された流体粒子を仮定。
固定された粒子の受ける力の総和から壁の受ける力を
計算できる。



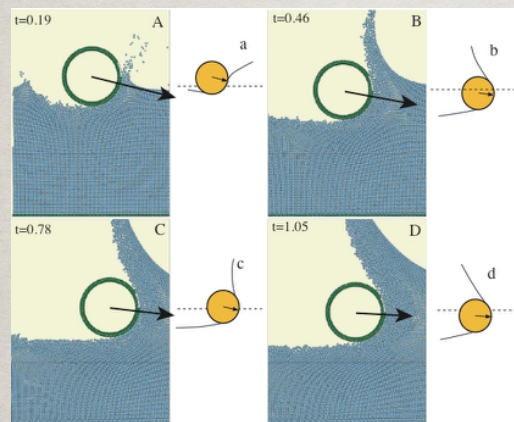
2, 水面と円柱の2次元衝突シミュレーション

円柱と水面の斜め衝突



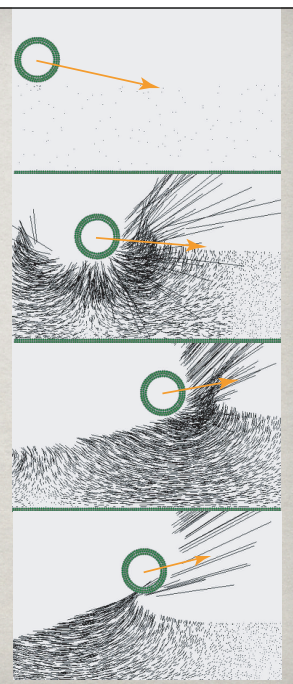
円柱と水面の衝突

—衝突の様子と速度プロファイル



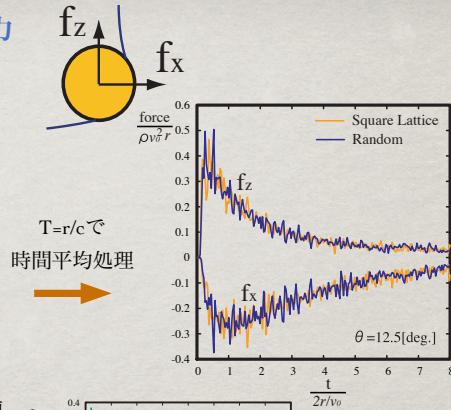
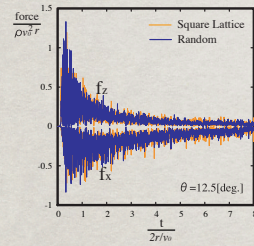
上図a-d; E. G. Richardson,

Proc. Phys. Soc. London, Sect. A **61** (1948)より引用

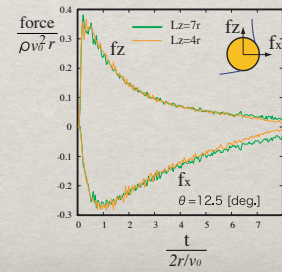


斜め衝突の間に円柱が受ける力

- 粒子の初期配置の影響
: 粒子の配置を正方格子とランダム配置



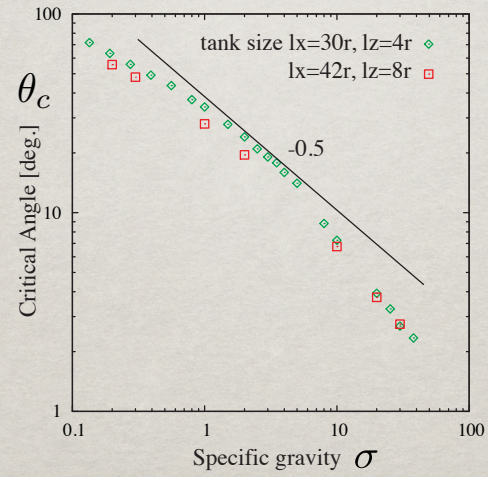
- 境界(底面)の影響: 深さの異なる水槽
用いたシミュレーションの結果



時間平均の結果を判るように

反発の臨界角度の再現性

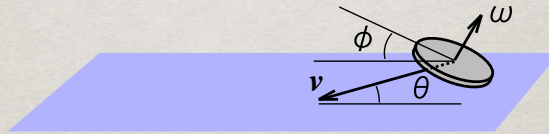
$$\theta_c = 18/\sqrt{\sigma}$$



レイノルズ数と比重に対してSPHの適用範囲はどこであるかを言う
回転の効果の話を加える

3, 水面と円板の3次元衝突とモデル解析

円板と水面の斜め衝突

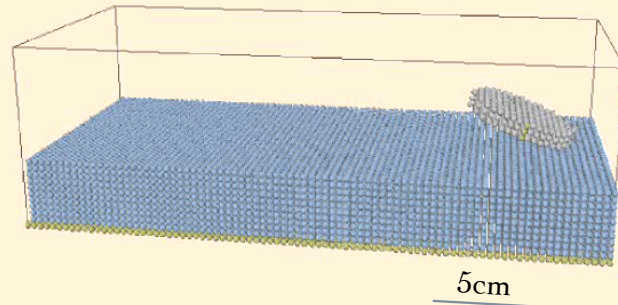


$$r = 2.5\text{cm}$$

$$\rho = 2.7\text{g/cm}^3$$

$$g = 980\text{cm/sec}^2$$

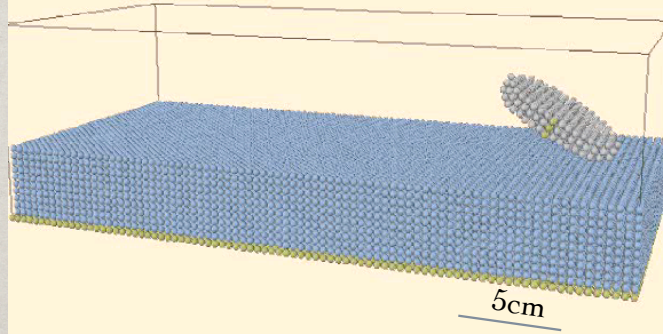
水面と円板の衝突の様子1
—円板が回転しながら衝突する場合



$\theta = 12.5^\circ$, $\phi = 20^\circ$, $\omega = 60$ [rounds/sec.]

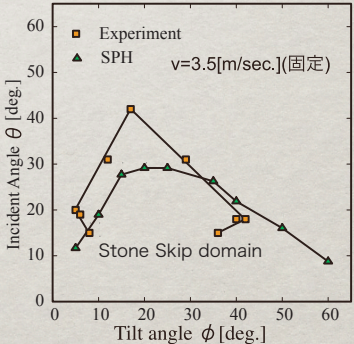
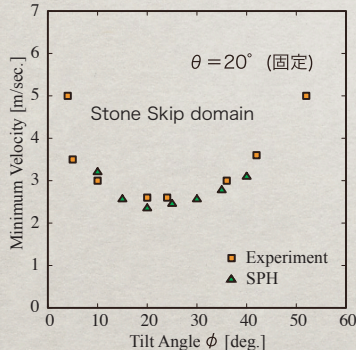
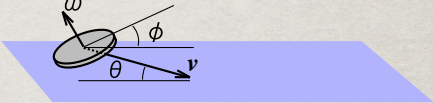
粒子数, 水槽の大きさを載せる

水面と円板の衝突の様子2
—円板に回転が無い場合

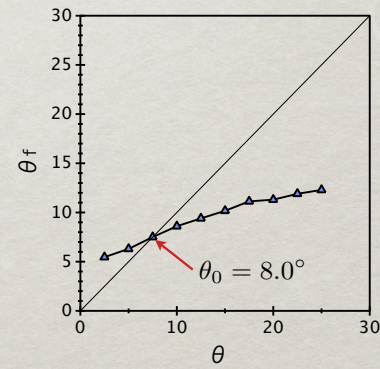
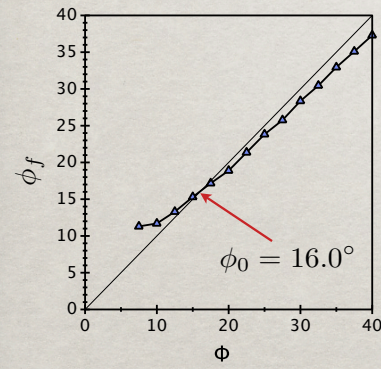
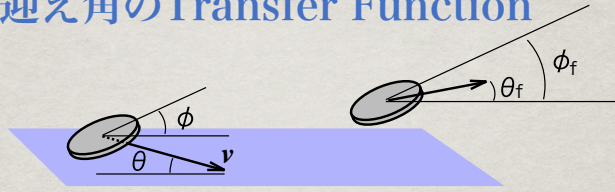


$$\theta = 12.5^\circ, \phi = 20^\circ, \omega = 0[\text{rounds/sec.}]$$

反発条件の実験との比較

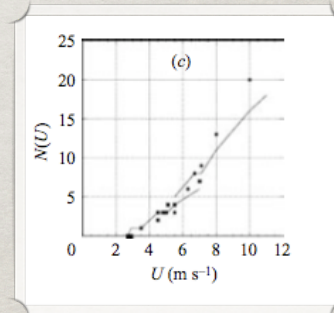
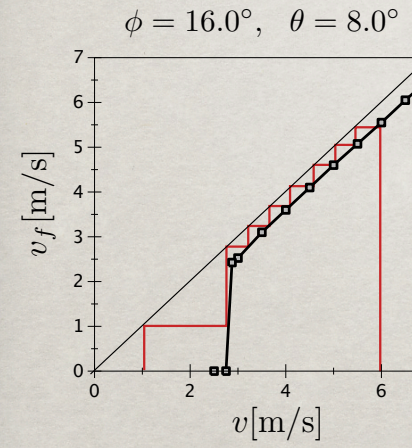


入射角・迎え角のTransfer Function



入射・脱出速度のTransfer function

→ 反発回数

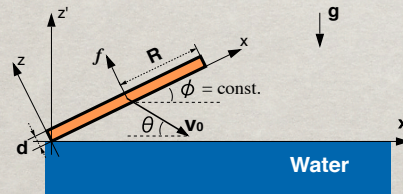


C. Clanet, F. Hersen and L. Bocquet. *JFM* (2005)

水面と円板の衝突のモデル解析

- 仮定：
- ・ 回転速度は十分大きい $\rightarrow \phi = \text{const.}$
 - ・ 衝突による水面の変形を無視。
 - ・ 粘性を無視して、円盤には
で表される圧力のみが働く。 $p \sim \rho(\mathbf{v} \cdot \mathbf{n})^2$
 - ・ 空気の影響は無視（その密度は水に比べて
0.001倍と軽いため。）

円板にかかる力：
$$f = \int_{\text{disk's face}} p n dS = \int_{\text{disk's face}} C_D \rho (\mathbf{v} \cdot \mathbf{n})^2 \mathbf{n} / 2 dS$$
$$= \frac{1}{2} C_D \rho (\mathbf{v} \cdot \mathbf{n})^2 S \mathbf{n}$$



空気の影響を無視する理由（密度が0.001なので）

衝突のODEモデル (1)

無次元化した運動方程式

$$\ddot{x} = -\frac{1}{F} \sin \phi \quad (\text{xz座標系})$$

$$\dot{z} = \kappa S(z') \dot{z}' - \frac{1}{F} \cos \phi$$

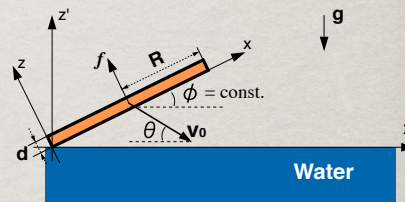
$$\kappa = \frac{C_D R \rho}{2\pi d \rho'}$$

(x, z) : 円盤下側の角の位置

$F = \frac{v_0^2}{gR}$: フロード数

$$S(z') = \frac{\pi}{2} - \arcsin \left(1 + \frac{z'}{\sin \phi} \right) - \left(1 + \frac{z'}{\sin \phi} \right) \sqrt{1 - \left(1 + \frac{z'}{\sin \phi} \right)^2}$$

流体にひたっている面積。



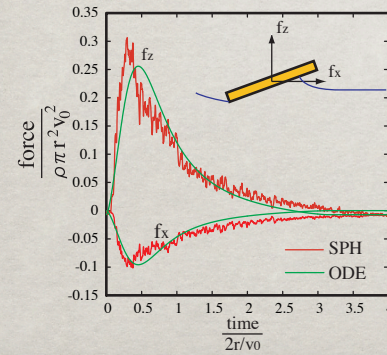
x, z は円盤の角の位置座標

ODEモデルと SPHシミュレーションの比較

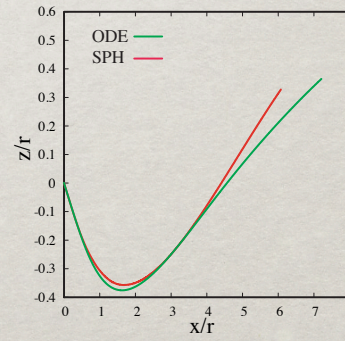
定数 κ の決定

$\kappa = 0.94,$
(Fitting parameter)

円板の受ける力

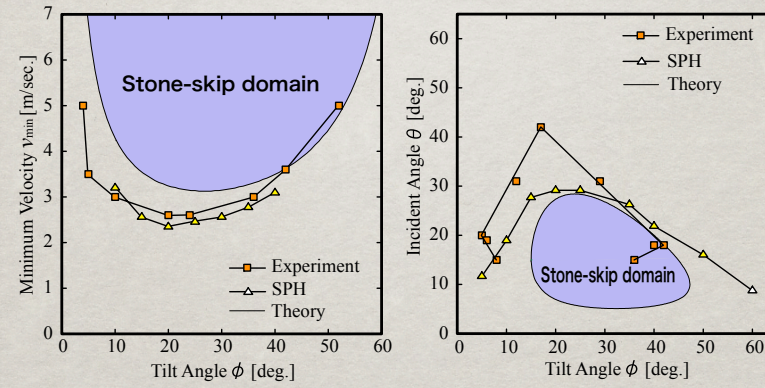


円板の軌道



C_Dをもう少し修正してあわせる。
紺とrp-るパラメタの定義

ODEモデルと
SPHシミュレーション及び実験との比較

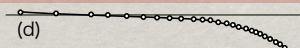
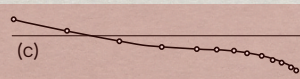
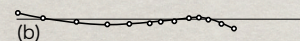
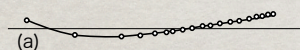


衝突のODEモデル—解析解

”反発”の定義…通常は「水面の高さを基準」にとる。位置条件

ここでは、「重力方向の速度を基準にとる。速度条件

「円盤の重力方向の速度が反転したら、
反発が 起こったものと、見なす。」



$$\ddot{x} = -\frac{1}{F} \sin \phi$$
$$\ddot{z} = \kappa S(z') \dot{z}^2 - \frac{1}{F} \cos \phi$$

変曲点の存在条件をしらべる。

球と水面の衝突の実験で得られた
衝突後の球の軌道。

E. G. Richardson, *Proc. Phys. Soc.*
London, Sect. A **61** (1948)

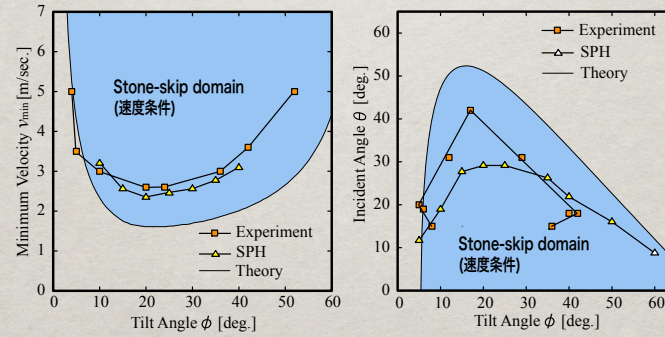
速度条件をとる意義について

速度条件を用いた時の反発条件：

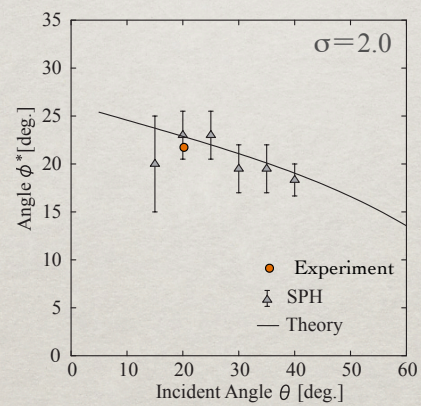
解析解と実験・シミュレーションの比較

$$v_{\min} = \frac{\sqrt{2gR}}{\cos(\theta + \phi)} \left\{ x^* \sin \phi + \frac{\sigma d \cos \phi}{C_D R \sin^2 \phi} \right\}^{\frac{1}{2}}$$

$$\theta_{\max} = \arccos \sqrt{\frac{2}{F} \left(x^* \sin \phi + \frac{\sigma d \cos \phi}{C_D R \sin^2 \phi} \right)} - \phi$$

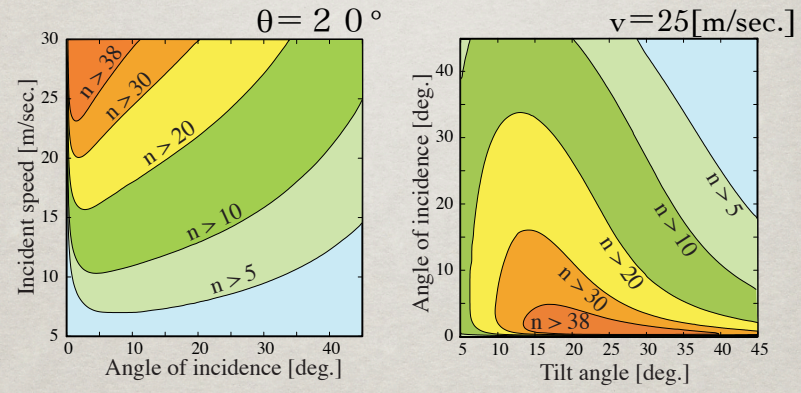


"Magic angle"と入射角度 θ の関係



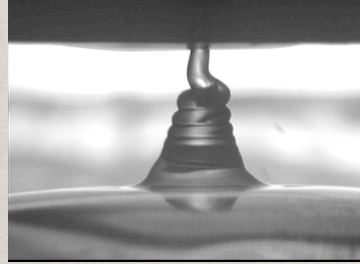
$\theta = 15$ でのエラーバーの長さについてなんでか

反発回数の見積もり

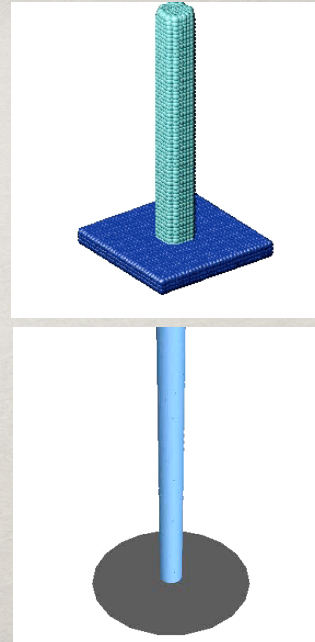


Fluid rope coiling

M. Maleki et al. PRL (2004)



S. Nagahiro & Y. Hayakawa
PRE(2008), JPSJ(2009)



Meandering instability

