ラフ集合と束

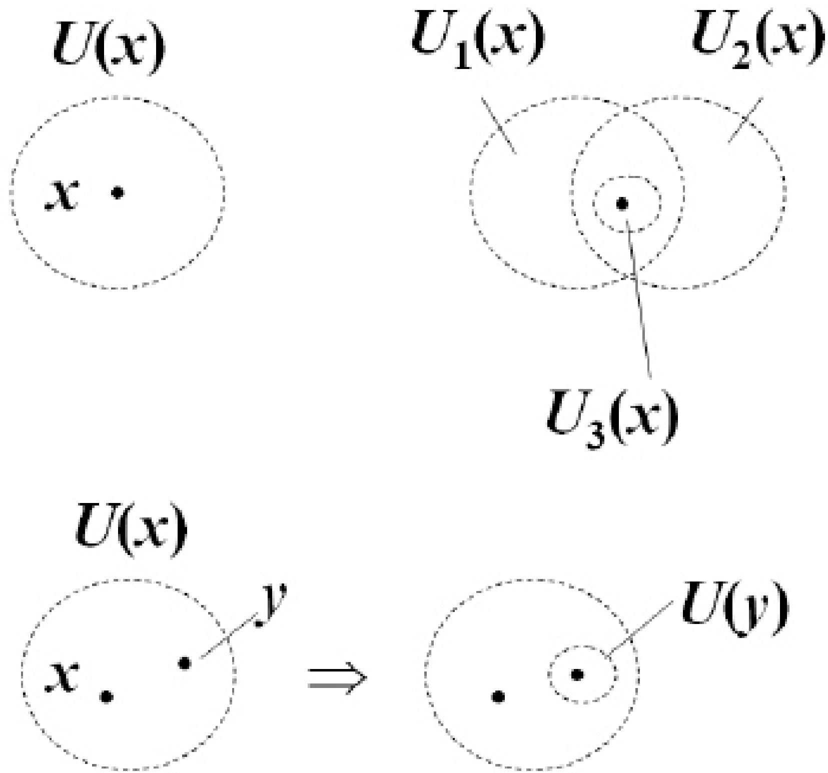
複数の写像の混在からもたらされる論理構造としての潜在性の表現

クラス4の起源

郡司P幸夫

位相空間

近傍系:



内点集合：

$$X^{\mathrm{int}} = \{x \in S \mid U(x) \subseteq X\}$$

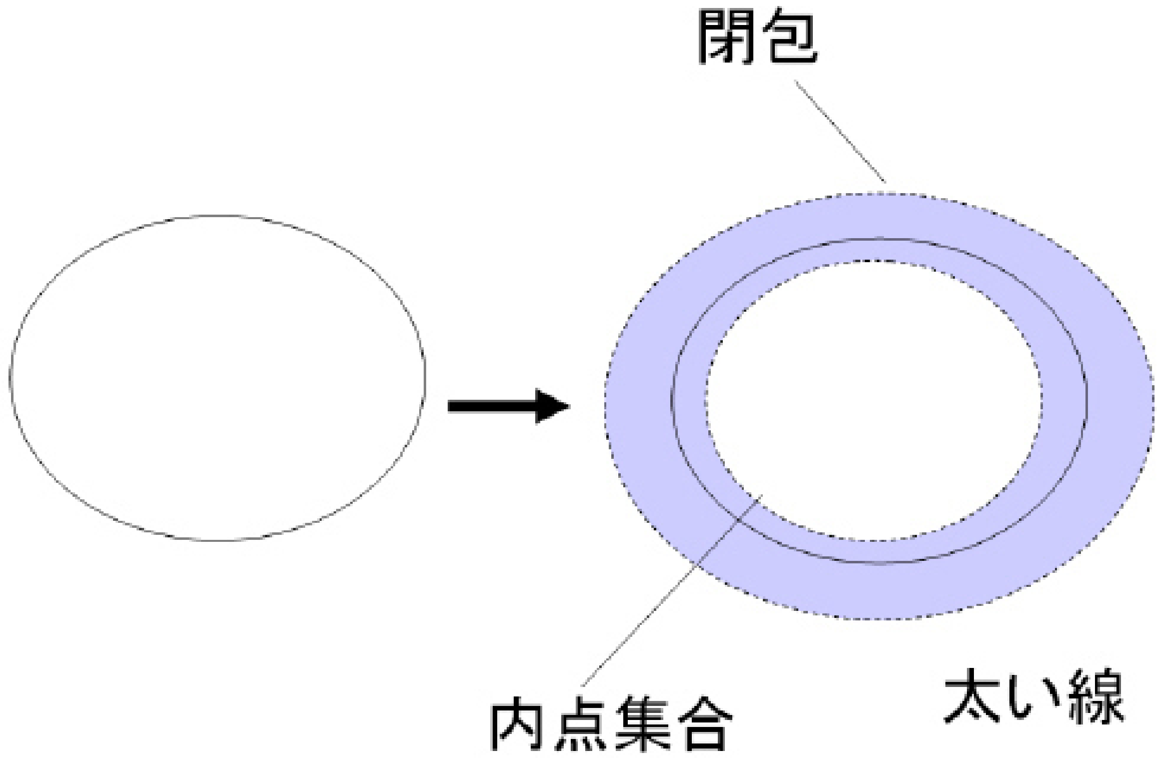
閉包：

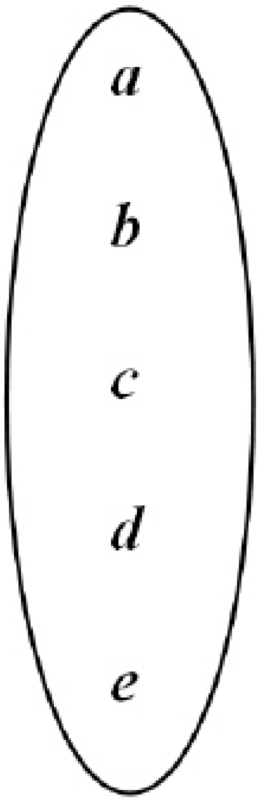
$$X^{\mathrm{cl}} = \{x \in S \mid U(x) \cap X \neq \emptyset\}$$

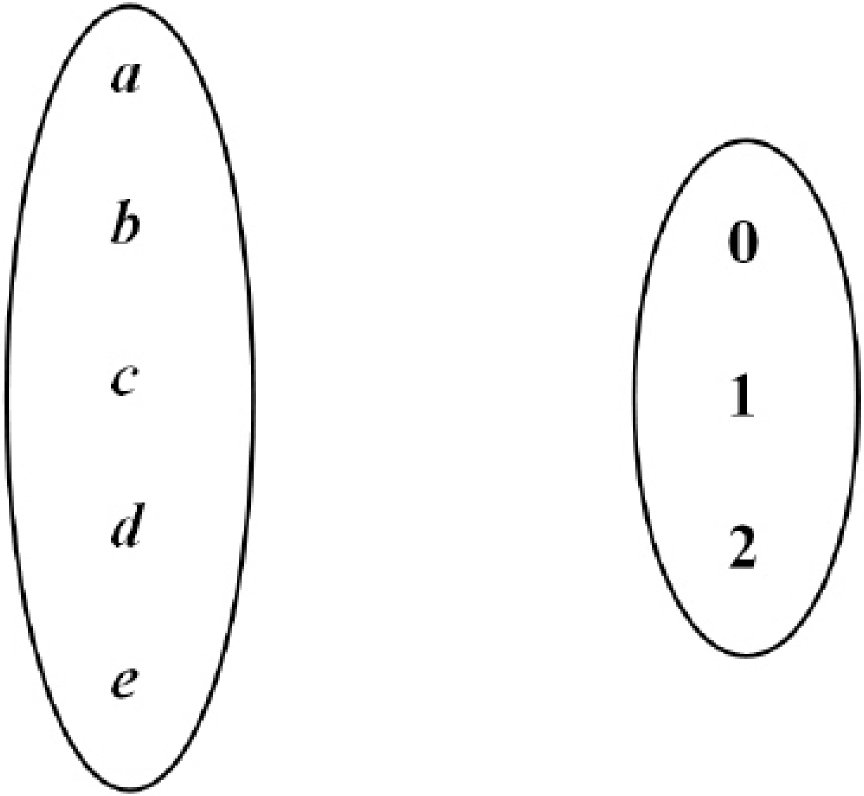
$$\Downarrow$$

和・交わり、否定　＋　新たな　操作

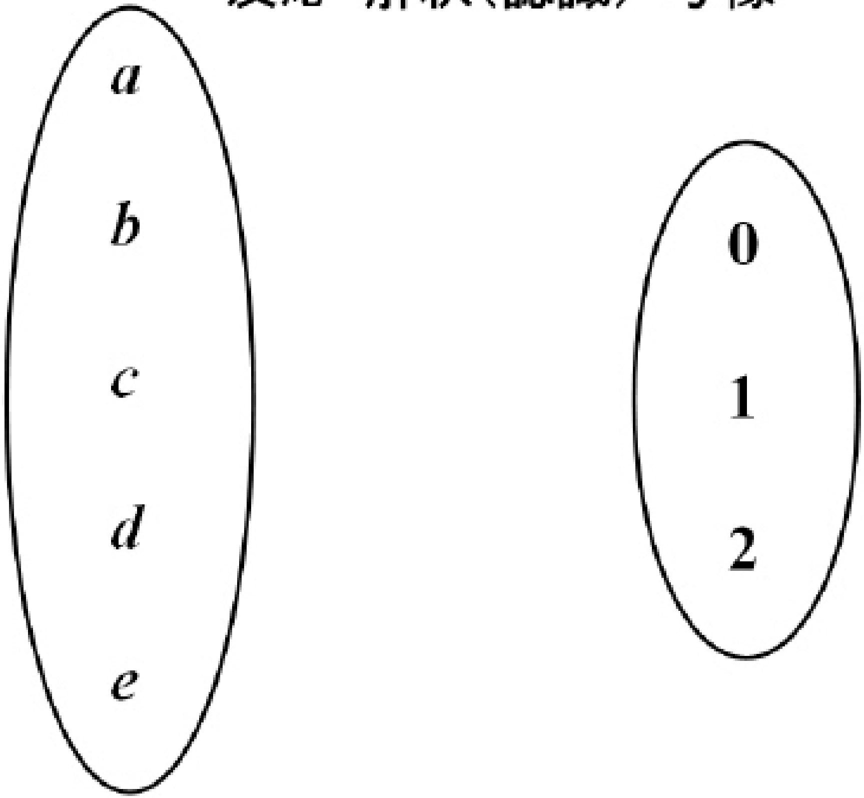
様相論理へ


閉包
太い線
内点集合

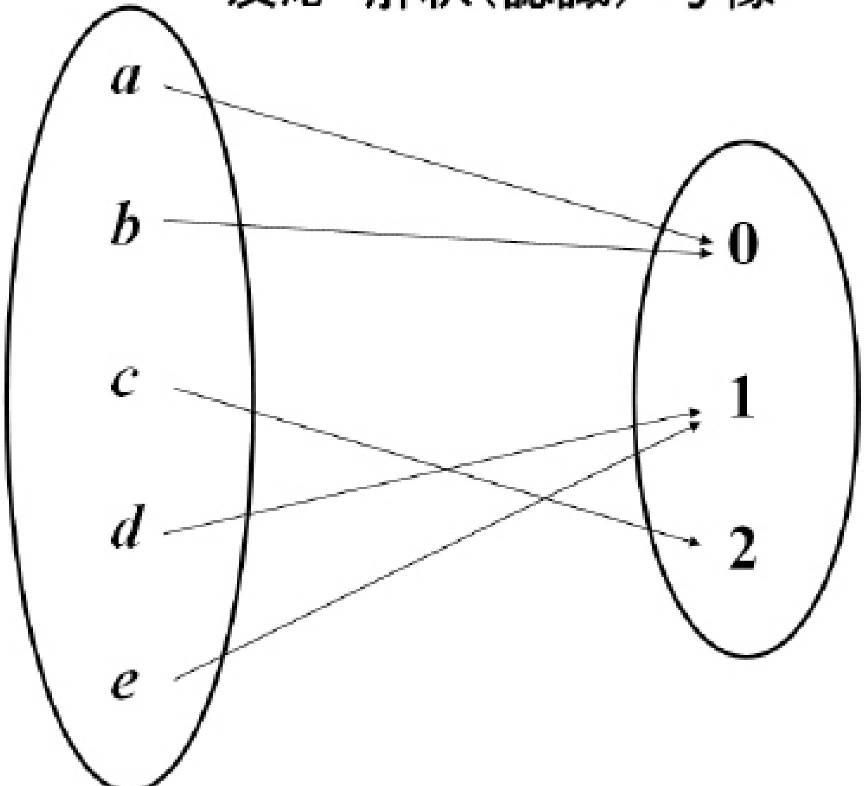

a
b
c
d
e


a
b
c
d
e
0
1
2

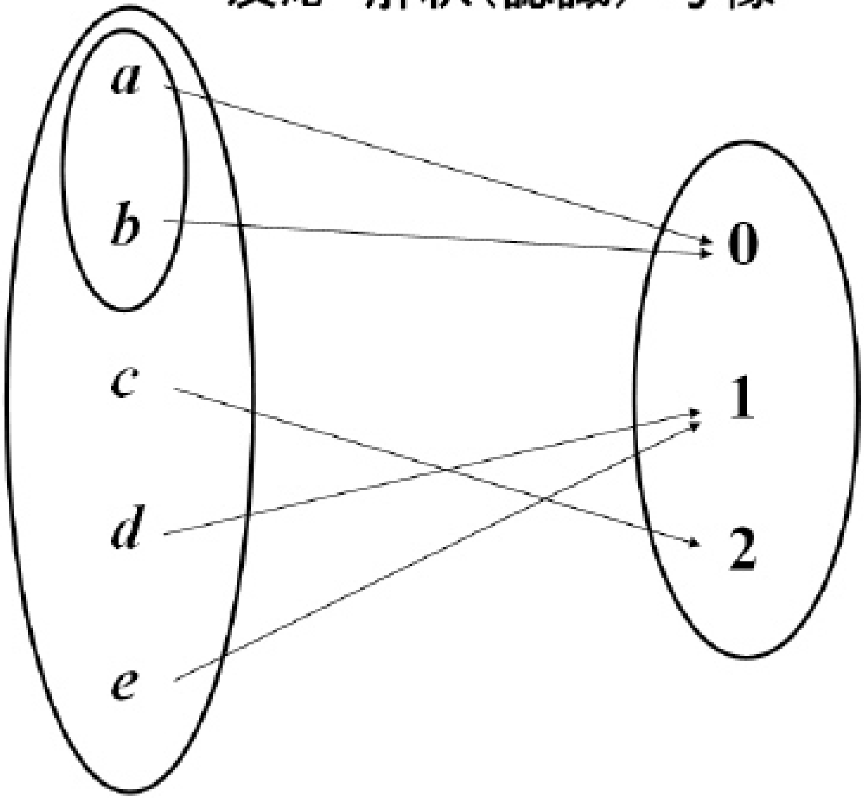
反応・解釈（認識）・写像



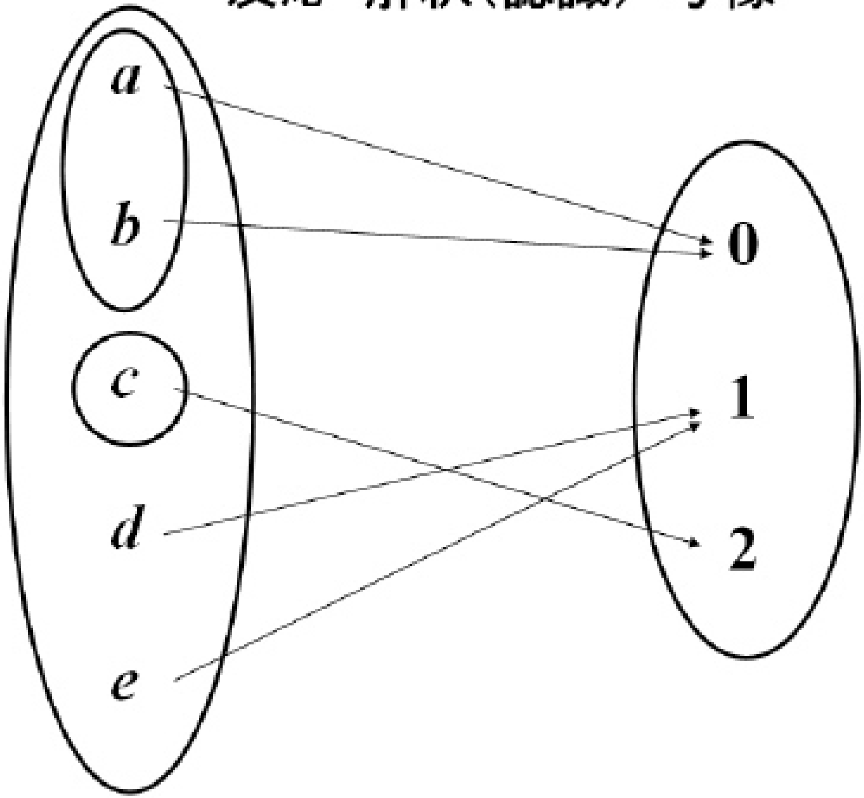
反応・解釈（認識）・写像



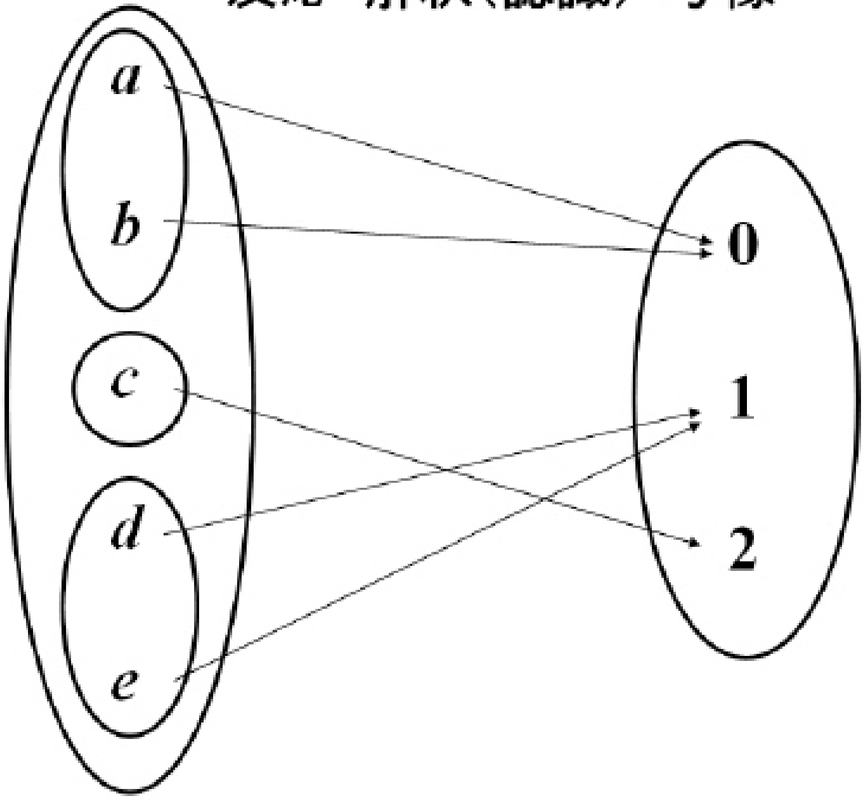
反応・解釈（認識）・写像



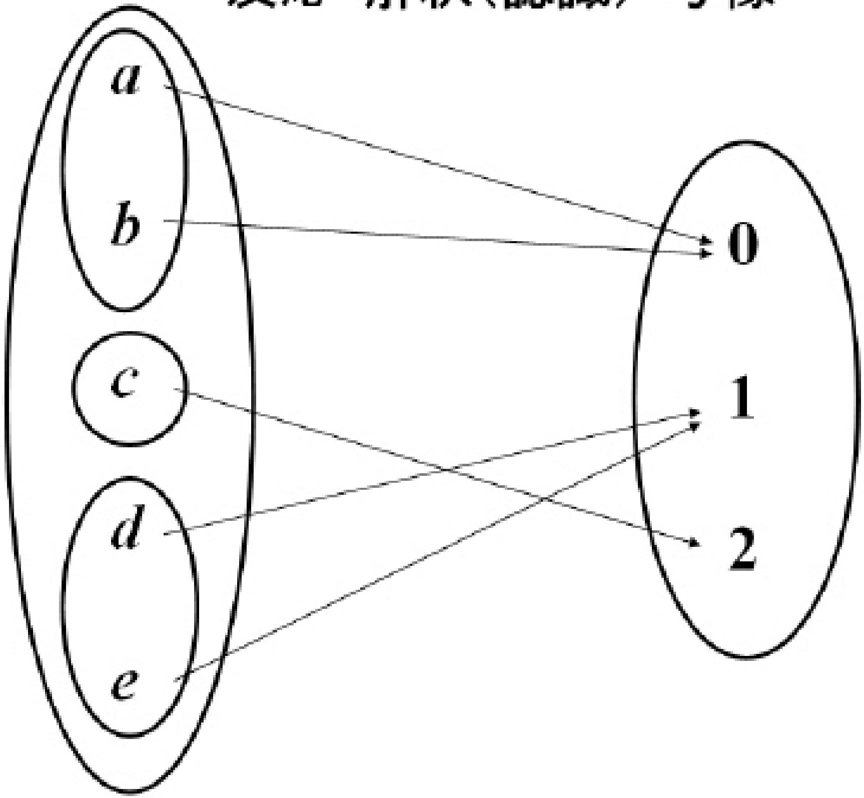
反応・解釈(認識)・写像



反応・解釈(認識)・写像

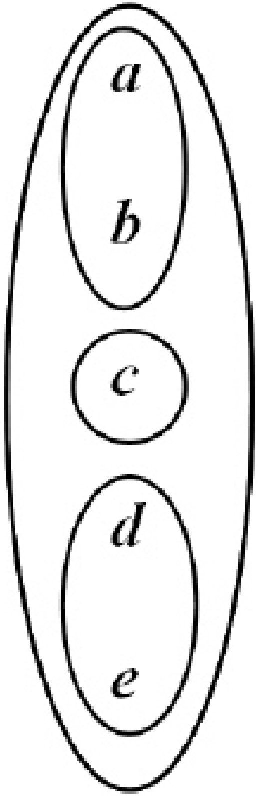


反応・解釈（認識）・写像



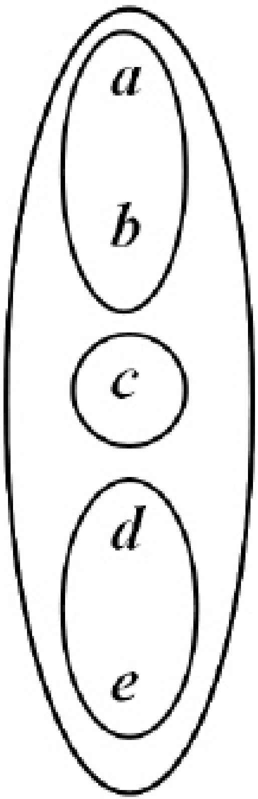
写像に誘導されるグループ　（同値類）

グループ（同値類）の意味

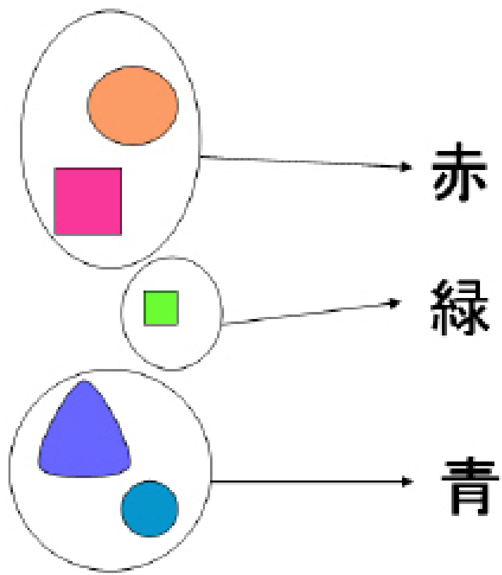


：グループ内の要素、例えばa, bは判別不能

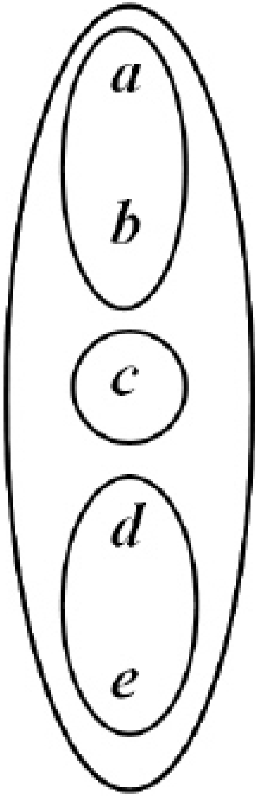
グループ（同値類）の意味



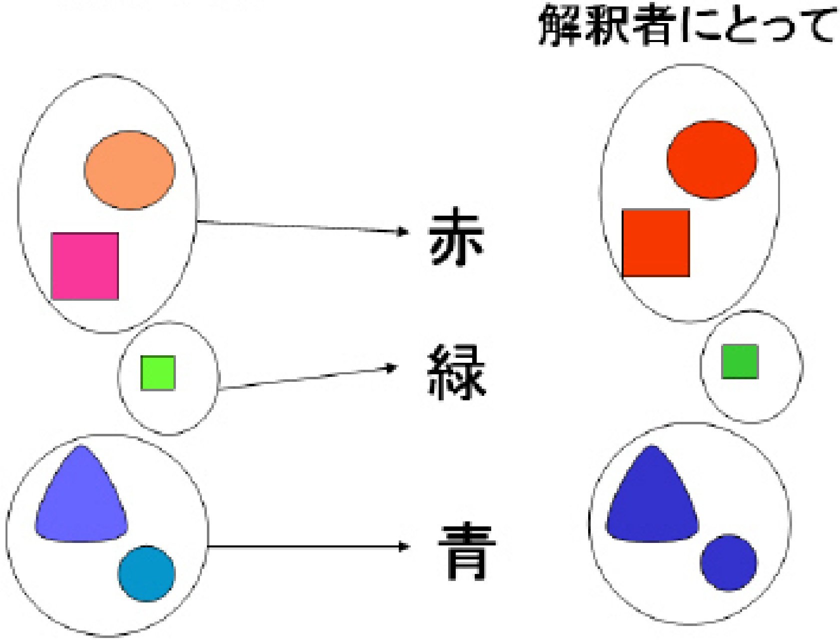
：グループ内の要素、例えばa, bは判別不能

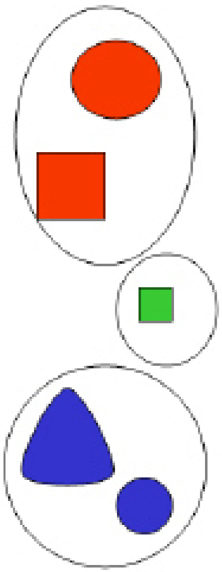


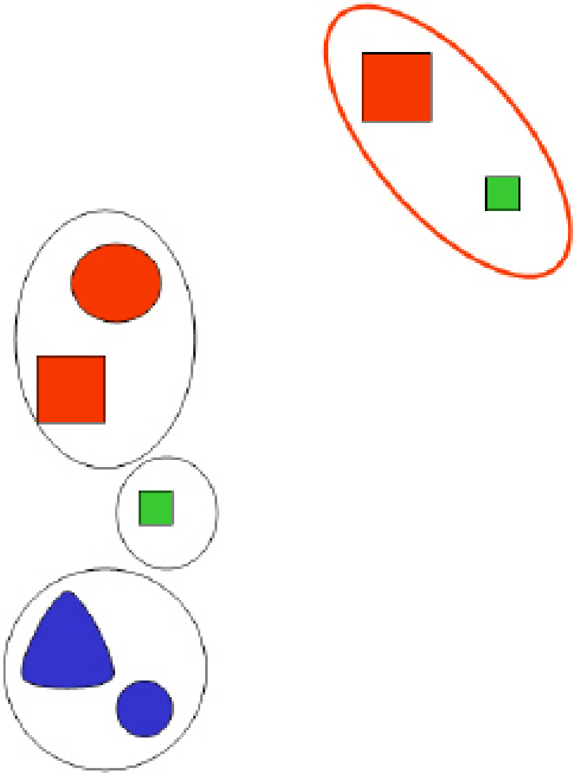
グループ（同値類）の意味



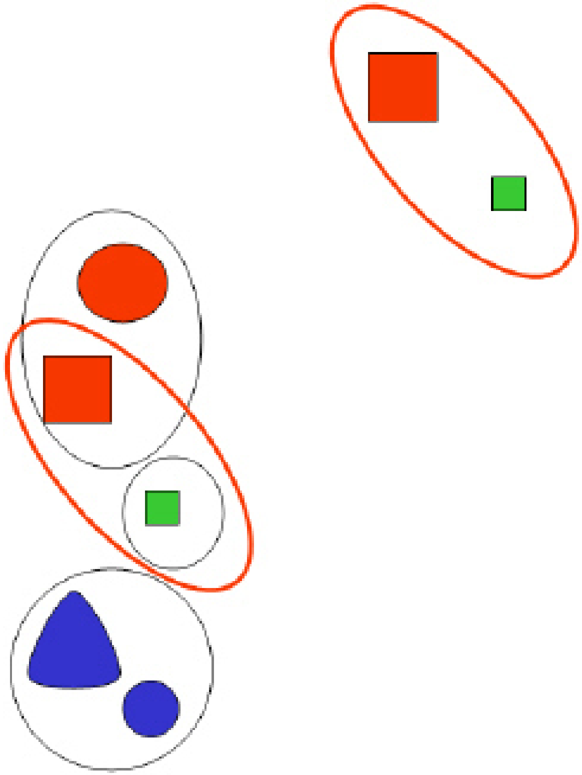
：グループ内の要素、例えばa, bは
判別不能



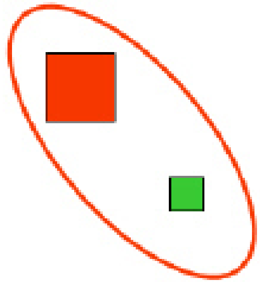




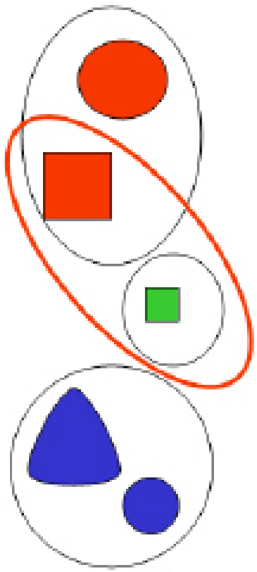
「四角形」は
この解釈系に、どのように
解釈されるか？



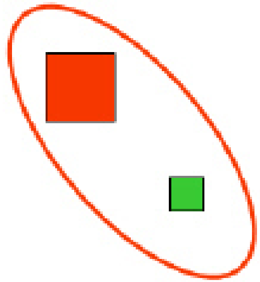
「四角形」は
この解釈系に、どのように
解釈されるか？



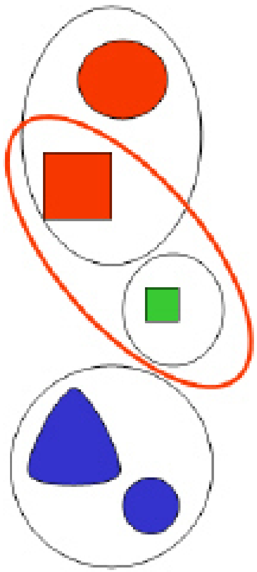
「四角形」は
この解釈系に、どのように
解釈されるか？



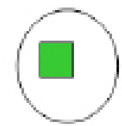
「緑」は、全て含まれるので、
“「緑」は、四角形”
とは、いえると考える（強い表現）

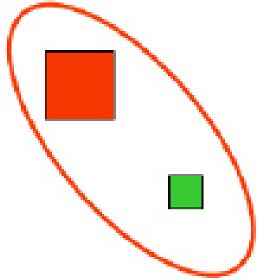


「四角形」は
この解釈系に、どのように
解釈されるか？

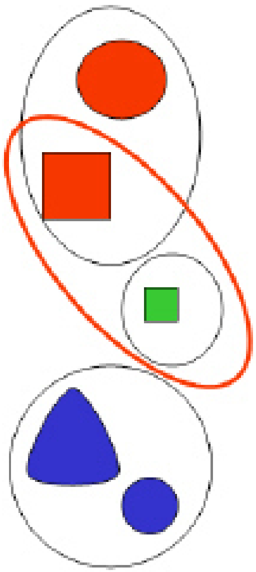


「緑」は、全て含まれるので、
“「緑」は、四角形”
とは、いえると考える（強い表現）

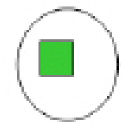




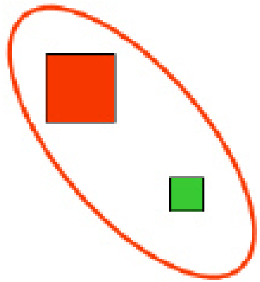
「四角形」は
この解釈系に、どのように
解釈されるか？



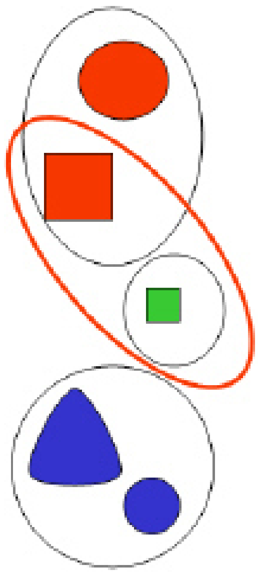
「緑」は、全て含まれるので、
“「緑」は、四角形”
とは、いえると考える（強い表現）



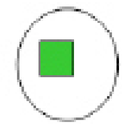
「緑」または「赤」は、
「四角形」に関与するので、
“「緑」または「赤」は、四角形“
とは、いえると考える（弱い表現）



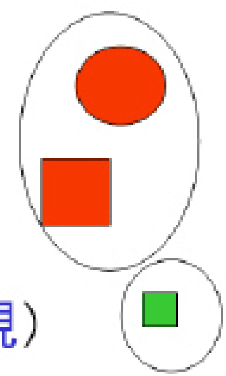
「四角形」は
この解釈系に、どのように
解釈されるか？



「緑」は、全て含まれるので、
“「緑」は、四角形”
とは、いえると考える（強い表現）

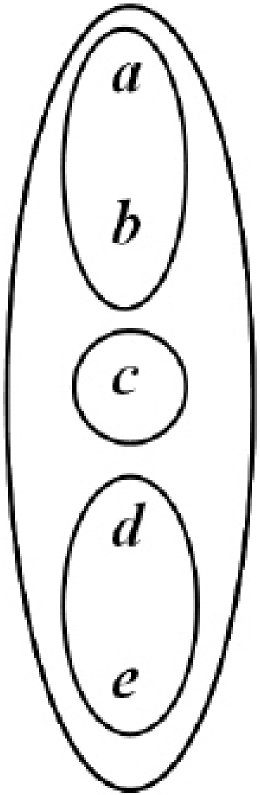


「緑」または「赤」は、
「四角形」に関与するので、
“「緑」または「赤」は、四角形“
とは、いえると考える（弱い表現）

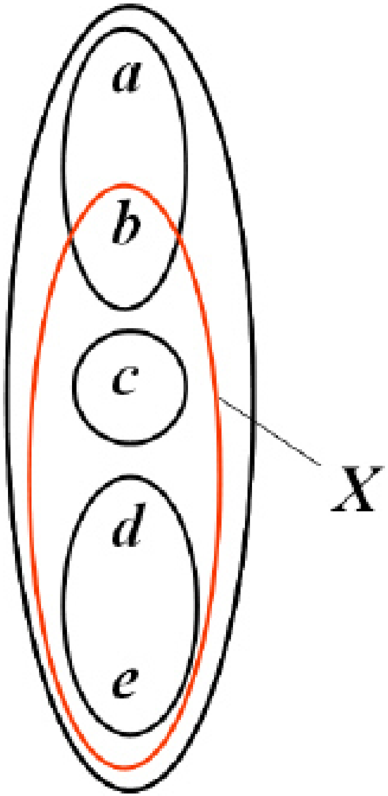


グルーピングを R とかくことにする

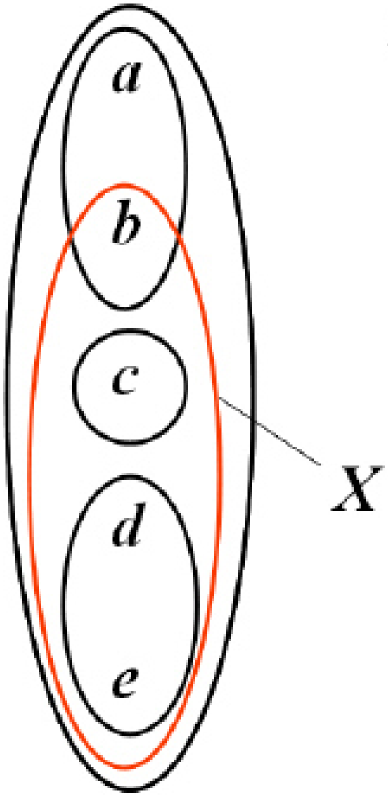
グルーピングを R とかくことにする



グルーピングを R とかくことにする



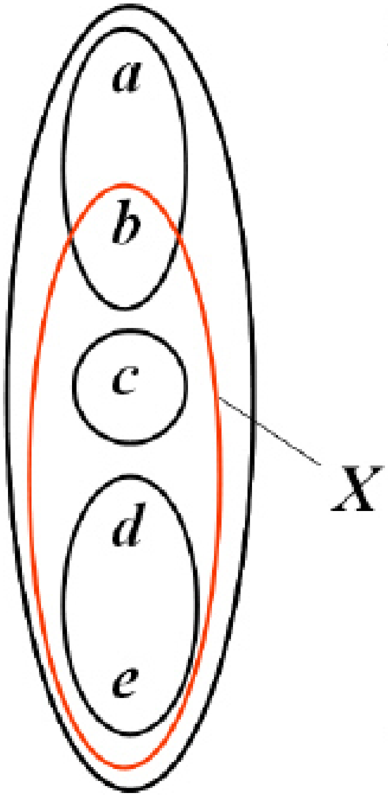
グルーピングを R とかくことにする



R による X の強い表現 ： $R_*(X)$

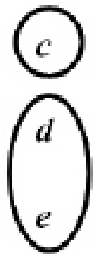
$$R_*(X) = \{ c, d, e \}$$

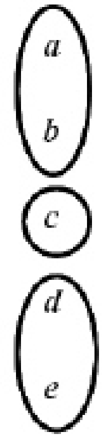
グルーピングを R とかくことにする



R による X の強い表現 ： $R_*(X)$

$$R_*(X) = \{\, c, d, e \,\}$$

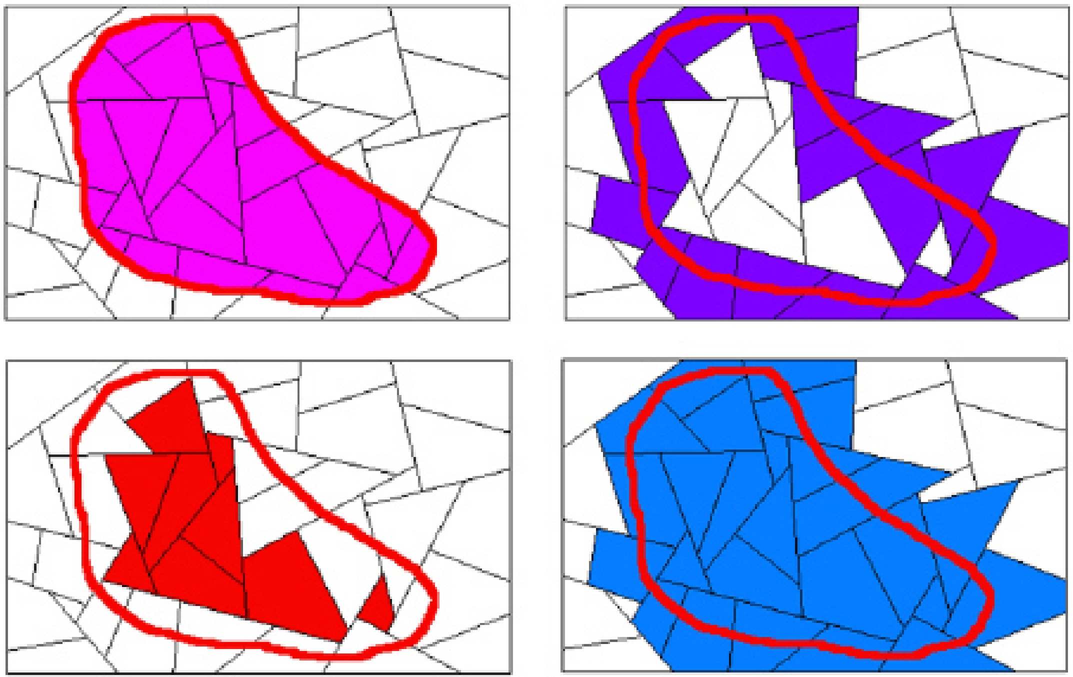




R による X の弱い表現 ： $R^*(X)$

$$R^*(X) = \{\, a, b, c, d, e \,\}$$

X　　　　X の R 上の輪郭（太線）



$R_*(X)$　　　　$R^*(X)$

Pawlak, Z., 1981, Information systems-theoretical foundations. Information Systems 6, 205-218.

Pawlak, Z., 1982, Rough Sets. Intern. J. Comp. Inform. Sci., 11, 341-356.

Birkhoff, G., 1967, Lattice Theory, Coll. Publ., XXV, American Mathematical Society.

Davey, B.A. and Priestley, H.A., 2002, Introduction to Lattices and Order, Cambridge University Press, 2nd edition, Cambridge.

Polkowski, L., 2002, Rough Sets, Mathematical Foundations, Physical-Verlag, Springer, Heidelberg.

Järvinen, J. 2007, Pawlak's information systems in terms of Galois connections and functional dependencies. Fundamenta Informaticae, 75, 315-330.

Yao, Y.Y., 2004, A comparative study of formal concept analysis and rough set theory in data analysis. Lecture Notes in Computer Science 3066, 59-68.

ラフ集合

集合Uが与えられている. $R \subseteq U \times U$を同値関係とする

$X \subseteq U$に対し、

$$R_*(X) = \{x \in U \mid [x]_R \subseteq X\} \quad （強い表現）$$
$$R^*(X) = \{x \in U \mid [x]_R \cap X \neq \emptyset\} \quad （弱い表現）$$

を定義する

ただし$[x]_R$はRに関する同値類で、$[x]_R = \{y \in U \mid xRy\}$.

$$R_*(X) \subseteq X \subseteq R^*(X)$$

$$R^*(\varnothing) = R_*(\varnothing) = \varnothing,\ R^*(U) = R_*(U) = U$$

$$R_*(X \cap Y) = R_*(X) \cap R_*(Y),\quad R^*(X \cup Y) = R^*(X) \cup R^*(Y)$$

$$X \subseteq Y \Rightarrow R_*(X) \subseteq R_*(Y),\quad R^*(X) \subseteq R^*(Y)$$

$$R_*(X \cup Y) \supseteq R_*(X) \cup R_*(Y),\quad R^*(X \cap Y) \subseteq R^*(X) \cap R^*(Y)$$

$$R_*(U - X) = U - R^*(X),\ R^*(U - X) = U - R_*(X)$$

$$R_*(R_*(X)) = R^*(R_*(X)) = R_*(X)$$
$$R^*(R^*(X)) = R_*(R^*(X)) = R^*(X)$$

ガロア接続

集合Uで$R\subseteq U\times U$を同値関係とする. $X\subseteq U$に対し、

$$R^*(X)\subseteq Y \iff X\subseteq R_*(Y)$$

証明

$R^*(X)\subseteq Y \Rightarrow X\subseteq R_*(Y)$を証明する
仮定$R^*(X)\subseteq Y$より$R_*(R^*(X))\subseteq R_*(Y)$.
また$R_*(R^*(X))= R^*(X)$だから$R^*(X)\subseteq R_*(Y)$を得る
他方、$X\subseteq R^*(X)$なので、$X\subseteq R_*(Y)$を得る

不動点の双対性

集合Uで$R \subseteq U \times U$を同値関係とする
このとき、$X \subseteq U$に対し、

$$R^*(X)=X \quad \Leftrightarrow \quad R_*(X)=X$$

が成り立つ

証明

$R^*(X)=X \Rightarrow R_*(X)=X$を証明する

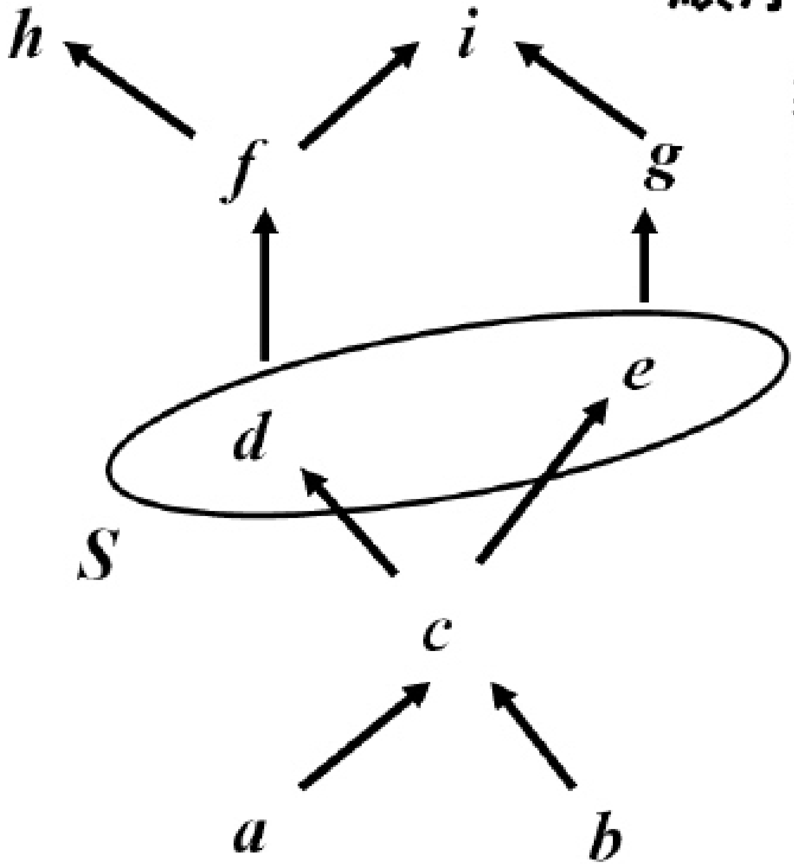
$X=R^*(X)$であるから、$R_*(X)=R_*(R^*(X))=R^*(X)=X.$

順序の中に論理を

集合Sの上界
:Sのすべての要素
以上の要素

集合Sの下界
:Sのすべての要素
以下の要素

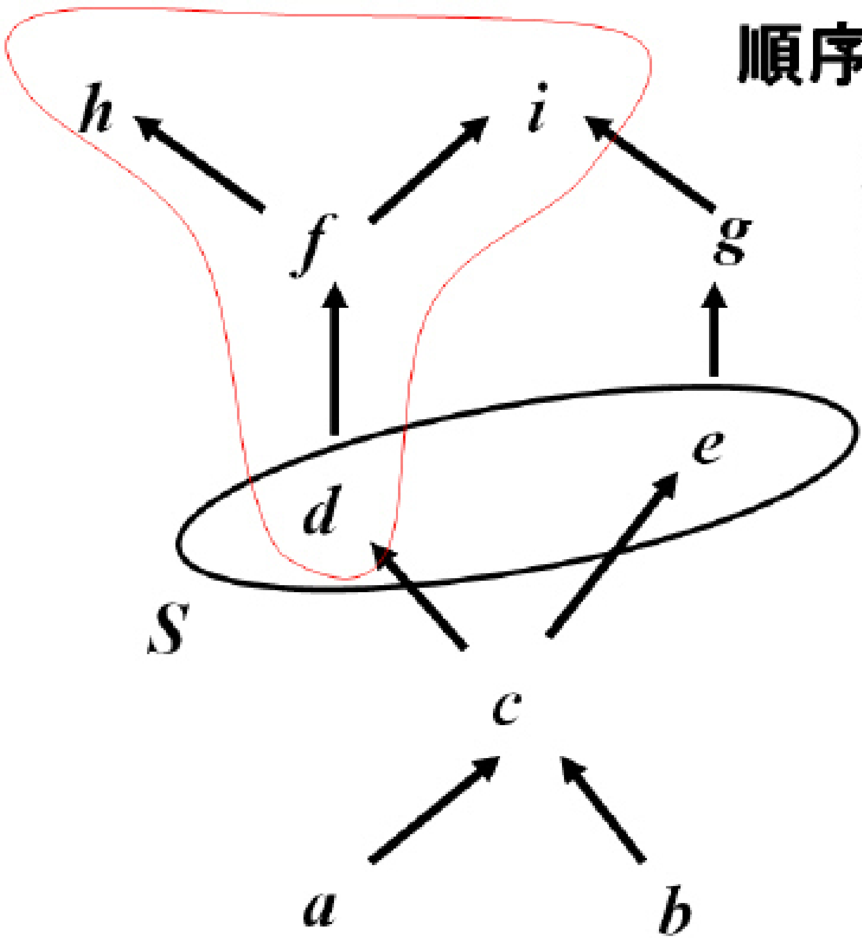
順序の中に論理を



集合Sの上界
:Sのすべての要素
以上の要素

集合Sの下界
:Sのすべての要素
以下の要素

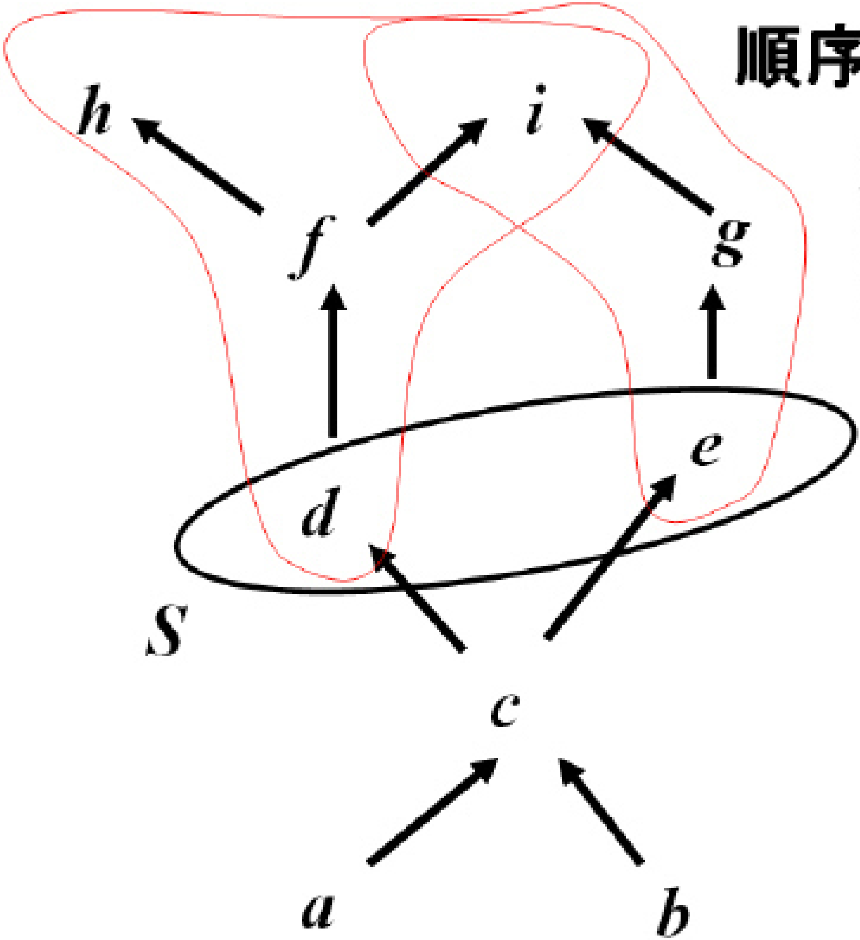
順序の中に論理を



集合Sの上界
:Sのすべての要素
以上の要素

集合Sの下界
:Sのすべての要素
以下の要素

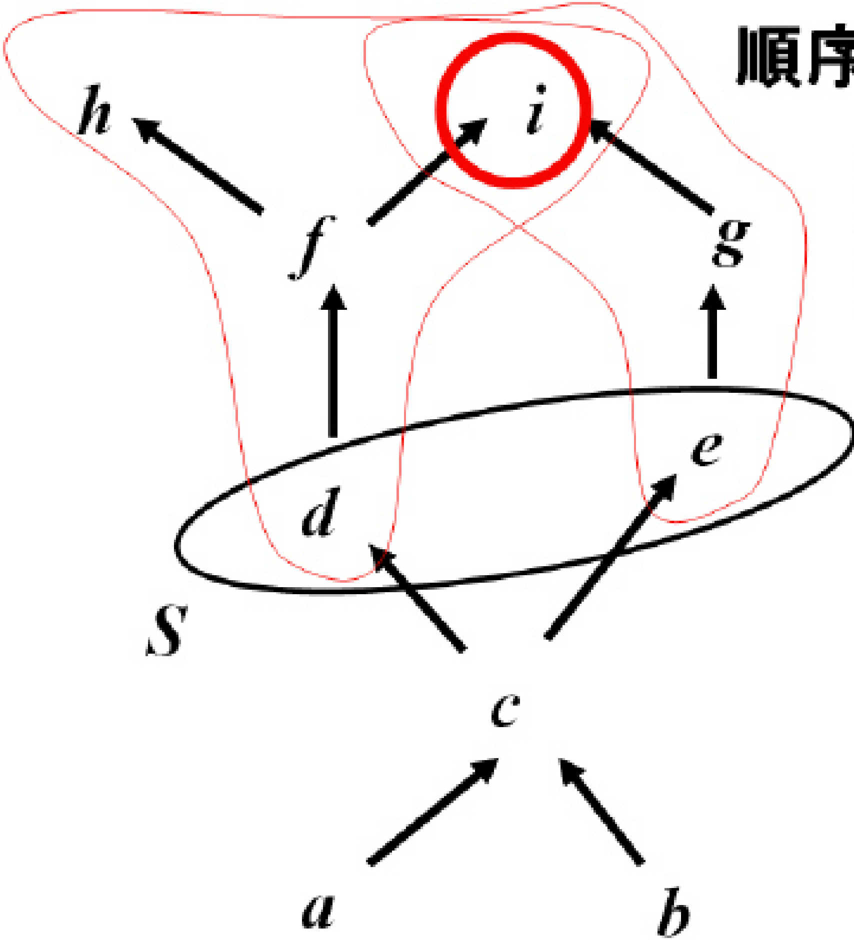
順序の中に論理を



集合Sの上界
:Sのすべての要素以上の要素

集合Sの下界
:Sのすべての要素以下の要素

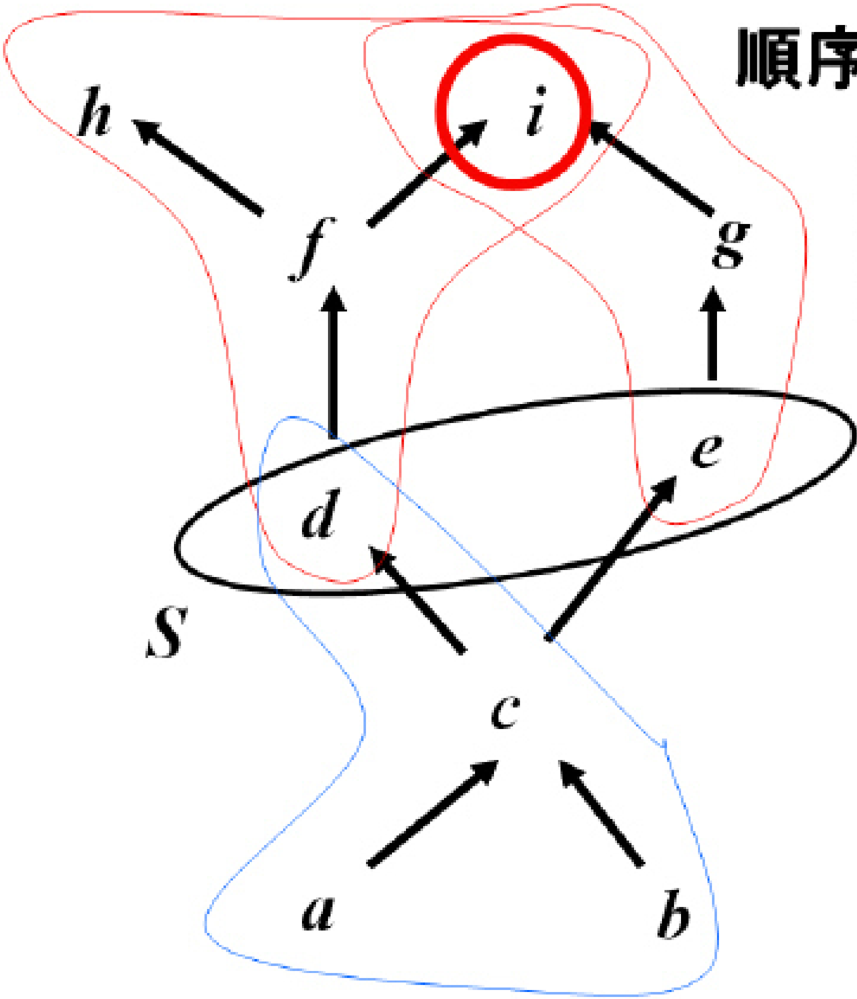
順序の中に論理を



集合Sの上界
:Sのすべての要素以上の要素

集合Sの下界
:Sのすべての要素以下の要素

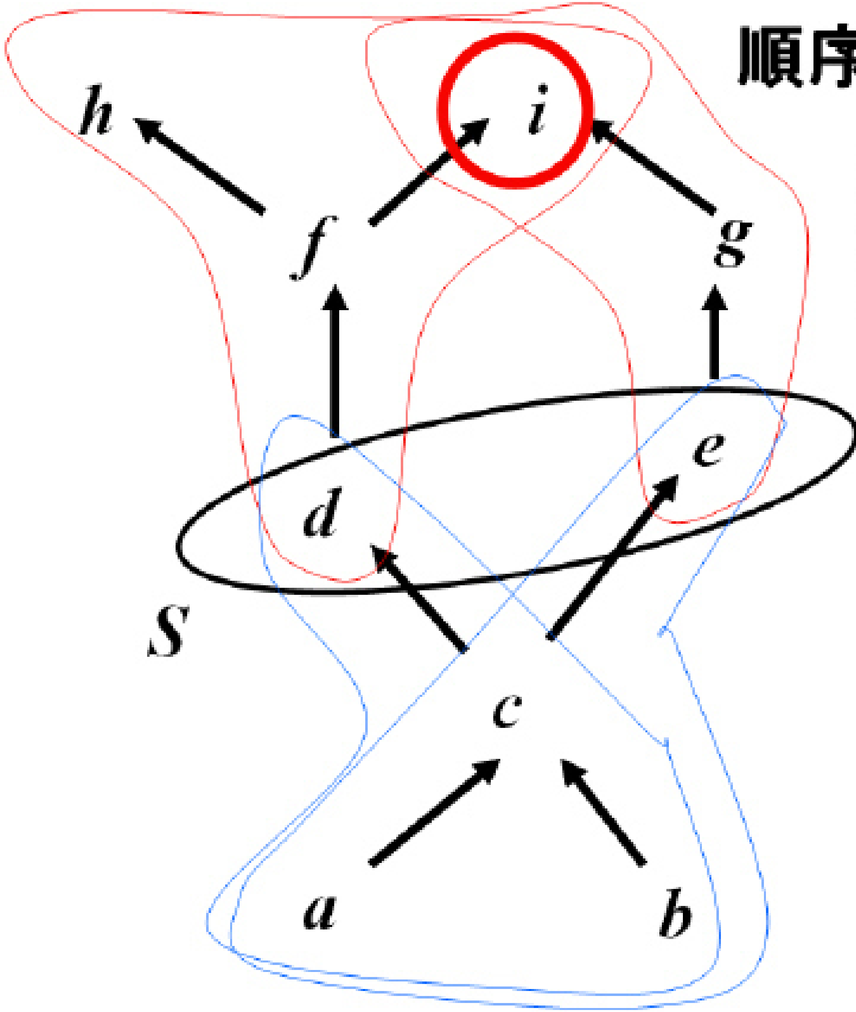
順序の中に論理を



集合Sの上界
:Sのすべての要素
以上の要素

集合Sの下界
:Sのすべての要素
以下の要素

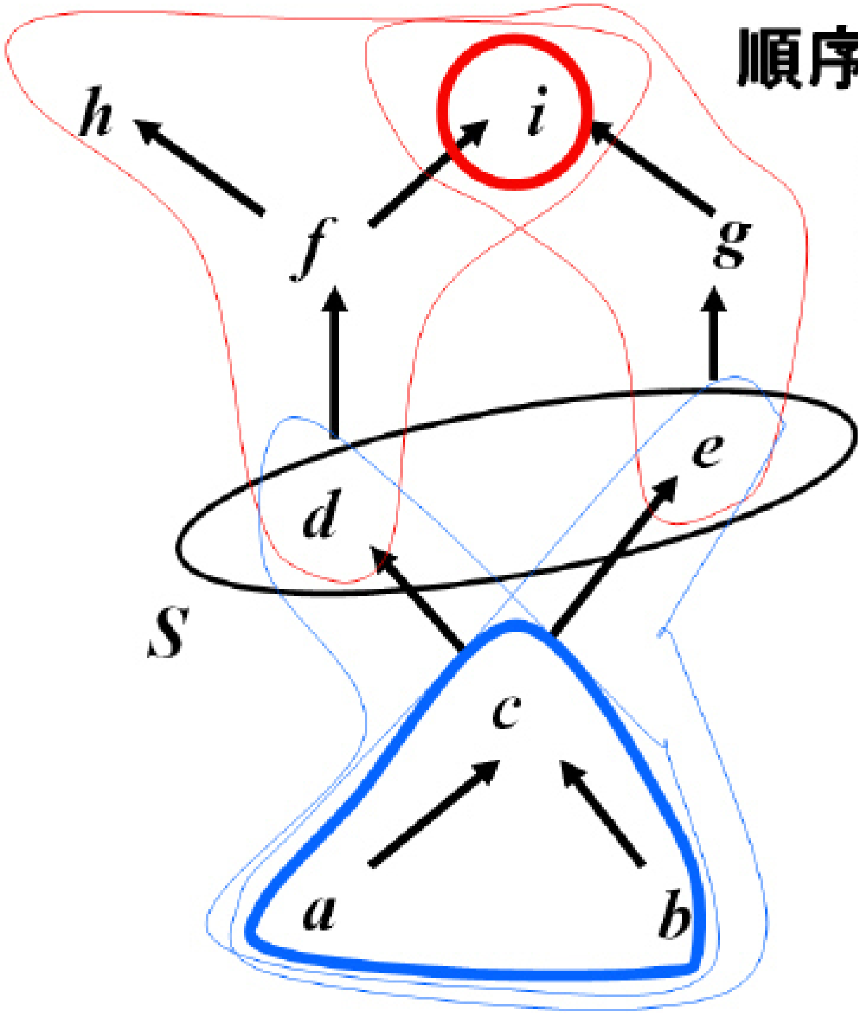
順序の中に論理を



集合Sの上界
:Sのすべての要素以上の要素

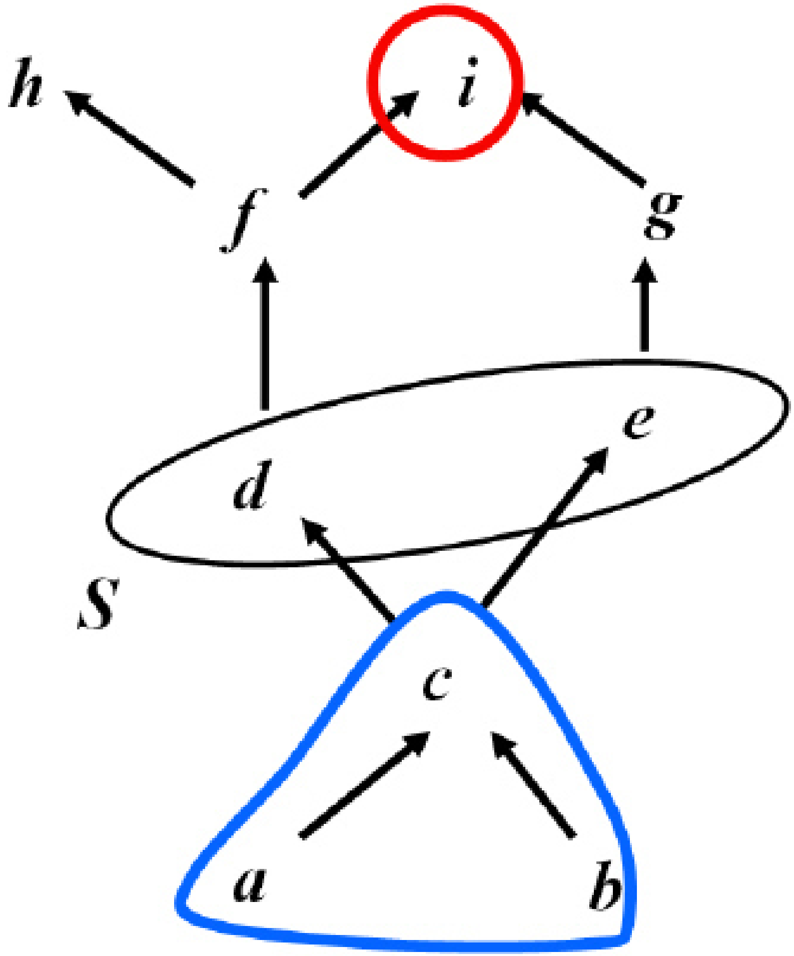
集合Sの下界
:Sのすべての要素以下の要素

順序の中に論理を



集合Sの上界
:Sのすべての要素以上の要素

集合Sの下界
:Sのすべての要素以下の要素

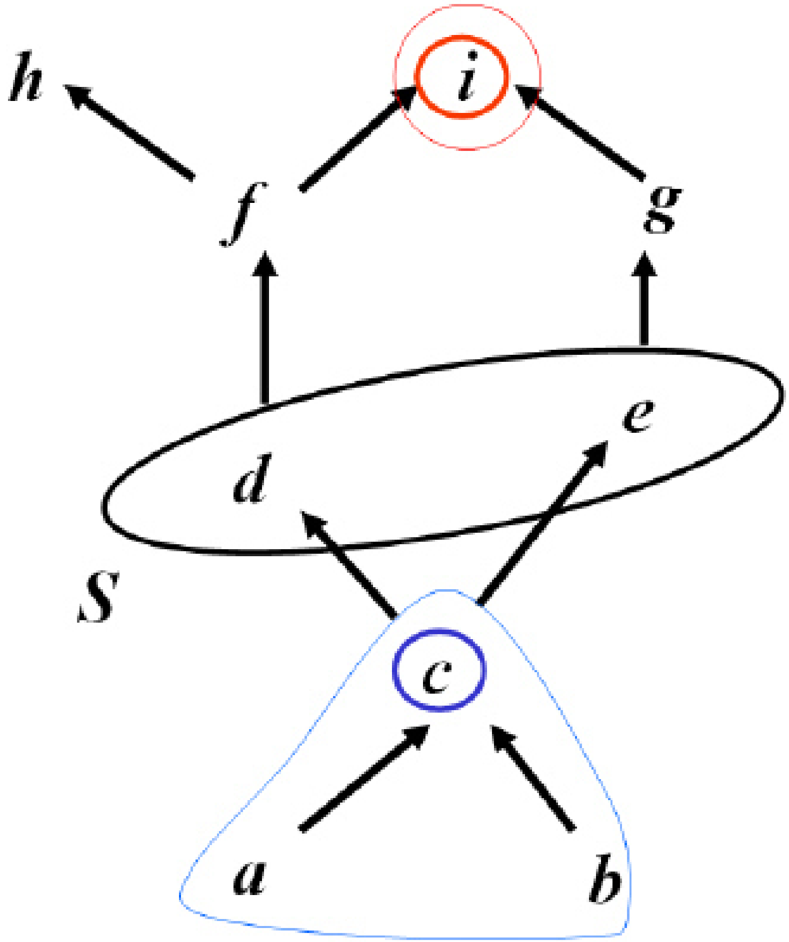


i はSの上界

$S^u = \{i\}$

a, b, cはSの下界

$S^l = \{a, b, c\}$



Sの上限：
最小の上界

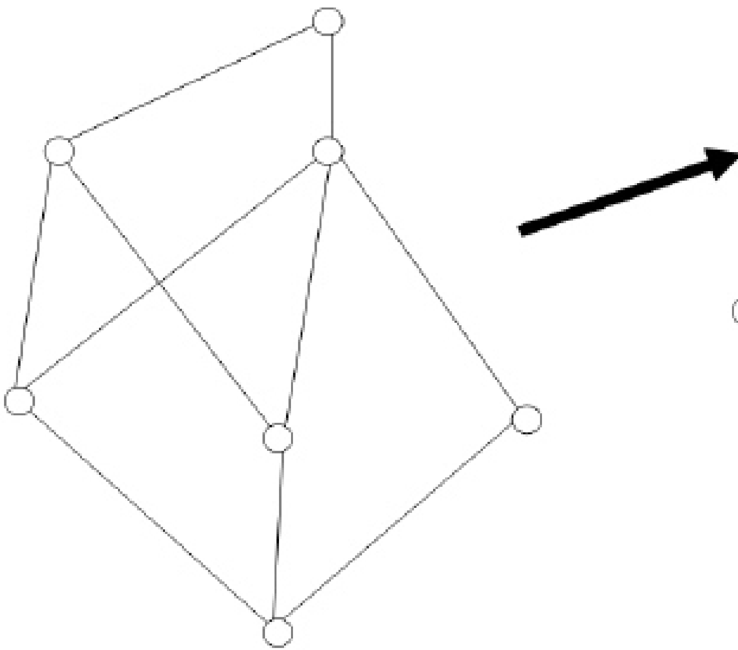
Sの下限：
最大の下界

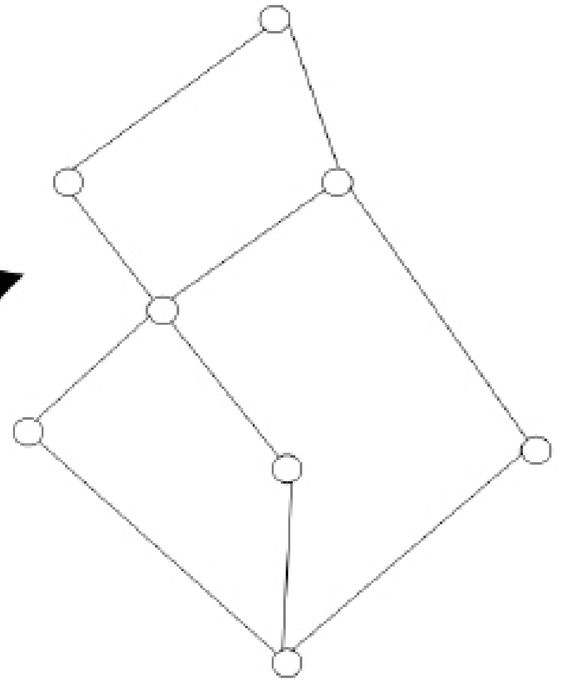
Sの上限＝i

Sの下限＝c

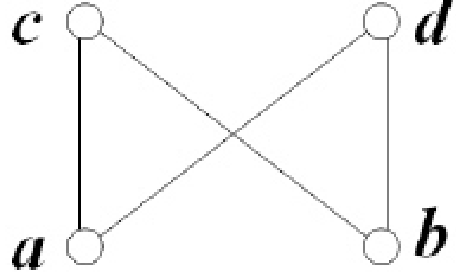
束　:⇔
任意の2元集合
の上限、下限に閉じて
いる順序集合

2要素集合 $\{x, y\}$ の
上限を、 $x \vee y$ 下限を $x \wedge y$
とかく。

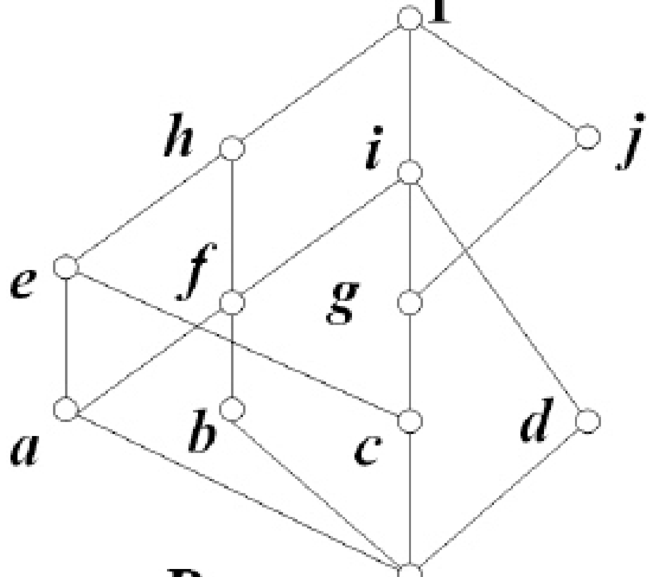




P



Q



R

どんな要素 x、y をとっても $\{x、y\}$ の上限・下限が存在する順序集合＝束

束の意味の二重性

$$x \vee y = x \quad \Leftrightarrow \quad x \geq y$$

上限、下限に
ついて閉じた
順序集合
$< P ;\ \leq >$
（集合的性格）

交換・結合・べき等
吸収律の成り立つ
二項演算について
閉じた集合
（代数的性格）

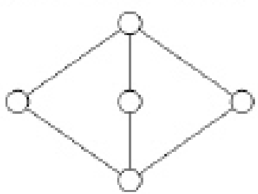
分配束

モジュラー束

モジュラーでも分配でもない束

$x \wedge (y \vee z) = (x \wedge y) \vee (x \wedge z)$

が成り立つ束

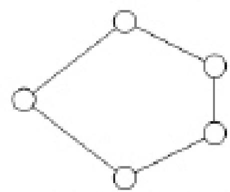


が部分束として存在しない

$x \geqq z \Rightarrow$

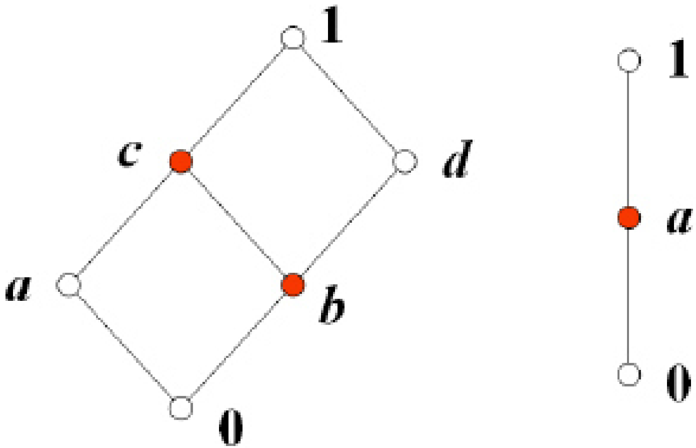
$x \wedge (y \vee z) = (x \wedge y) \vee z$

が成り立つ束

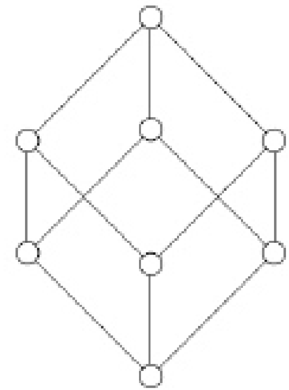


が部分束として存在しない

相補束：　任意の要素xに対し、
$x \wedge y=0$, $x \vee y=1$となる要素yが
存在する束 (yを補元と呼びx^cとかく）



非相補・分配束
（赤い元に補元なし）



相補分配束
（ブール代数）

オーソ(直)相補束： 任意元xに対し、直補元x'
が存在する
ただし直補元は以下を満たす

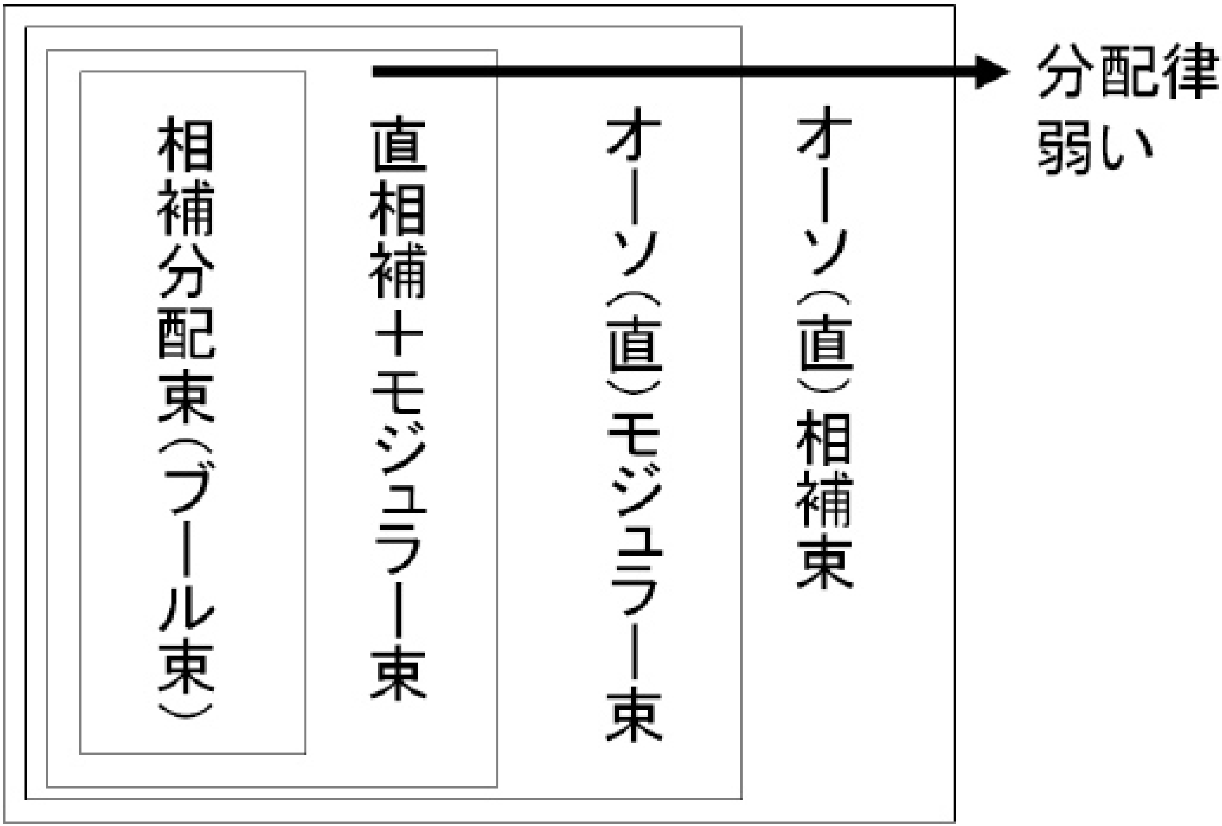
(i) $x \wedge x' = 0$, $x \vee x' = 1$

(ii) $(x')' = x$

(iii) $x \leq y \Rightarrow y' \leq x'$

オーソモジュラー束： $x \leq y \Rightarrow x \vee (x' \wedge y) = y$

相補束の中での分配性に関する系列



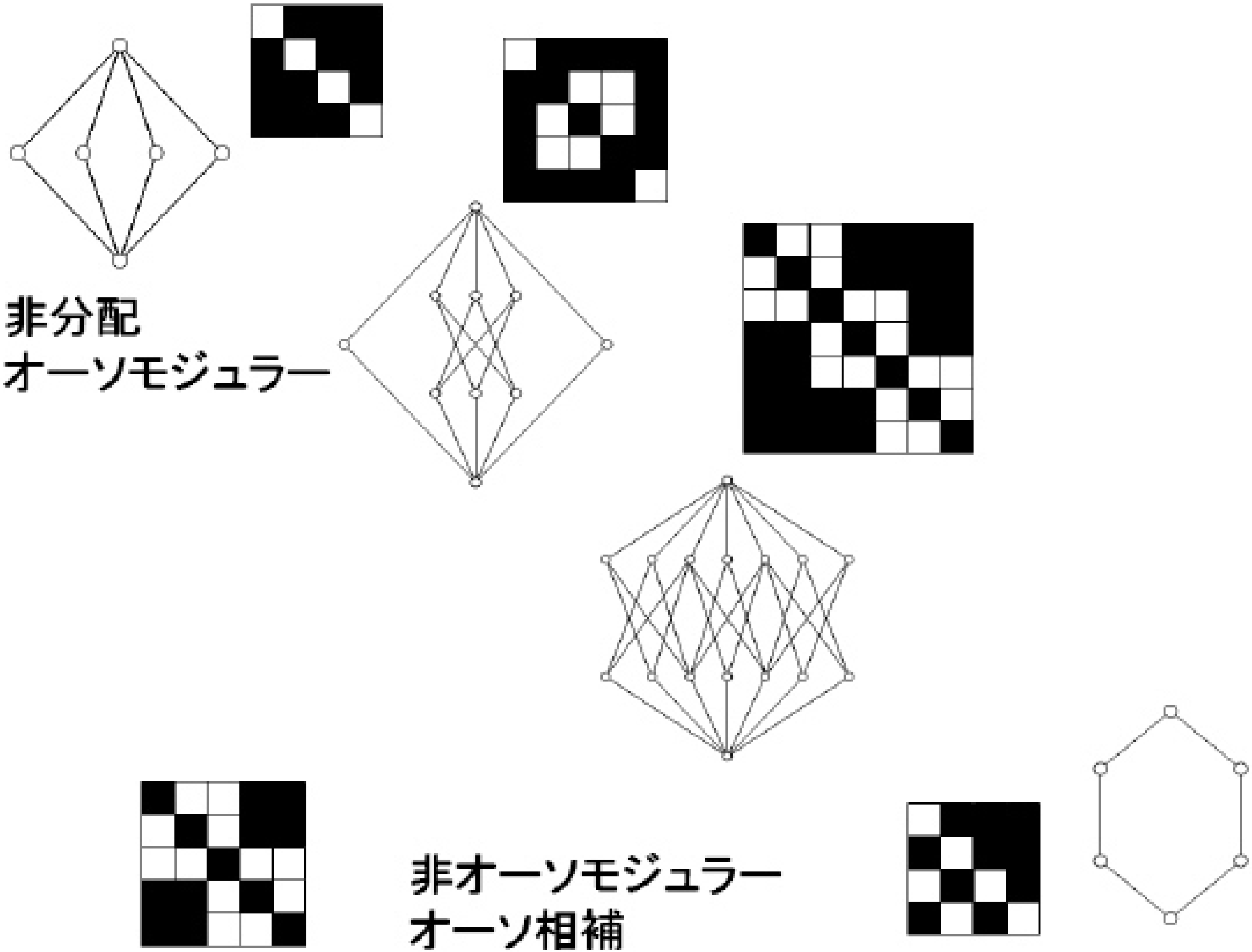
分配律の役割

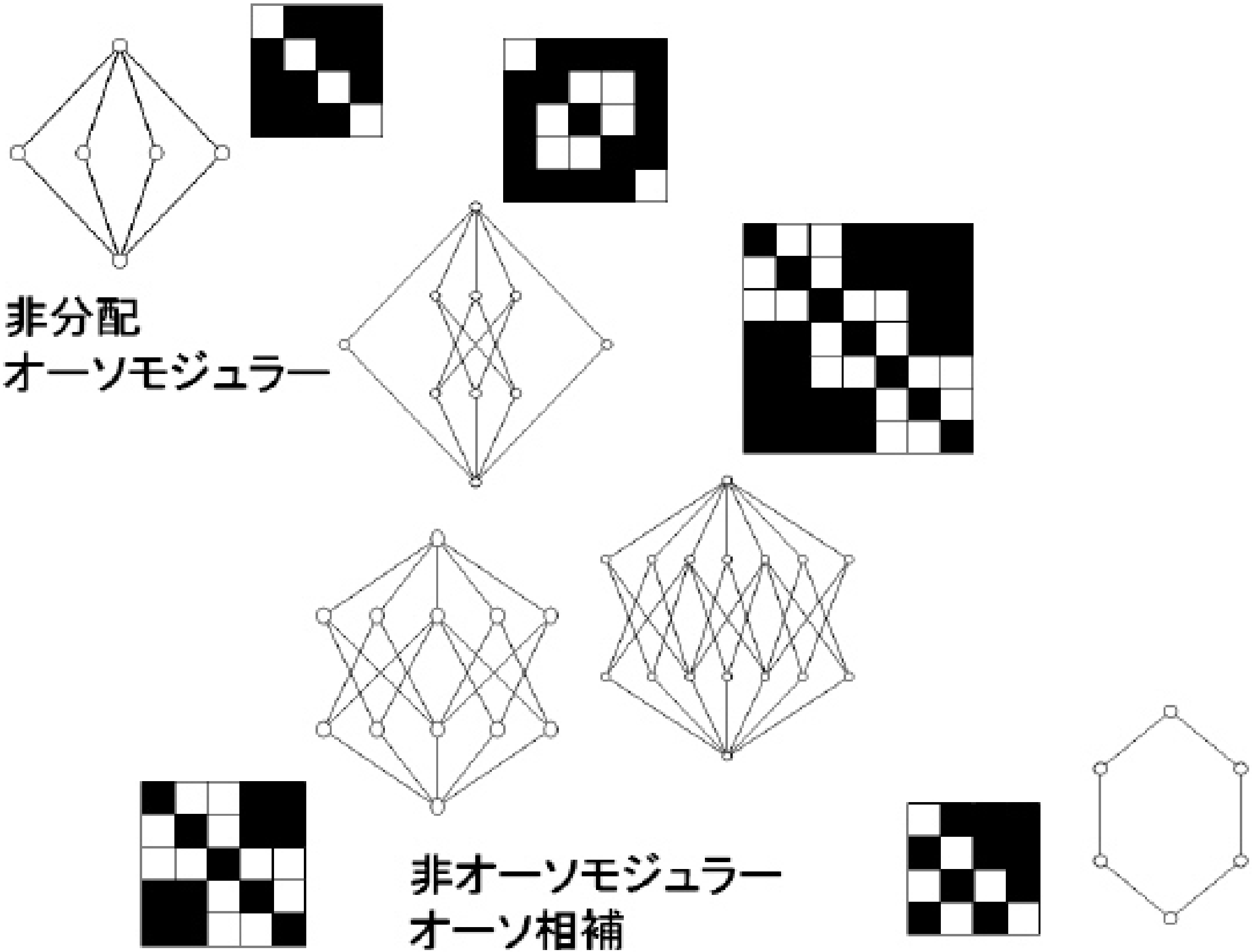
違う（場所にある）ものを同じ、といい、
同じものを、（コピーして）別のものにする

$$\boldsymbol{a \wedge (b \vee c) = (a \wedge b) \vee (a \wedge c)}$$

集合論的 原則： $\{a, b\} \cup \{b, c\} = \{a, b, c\}$
$\{a, b\} \cap \{b, c\} = \{b\}$

ものを要素に還元できる　（分配律成立）


非分配
オーソモジュラー
非オーソモジュラー
オーソ相補


非分配
オーソモジュラー
非オーソモジュラー
オーソ相補

不動点がつくる束

$P=\{X\subseteq U \mid R_*(X)=X\}$とするとき、
包含関係を順序関係とする$<P, \subseteq>$は集合束

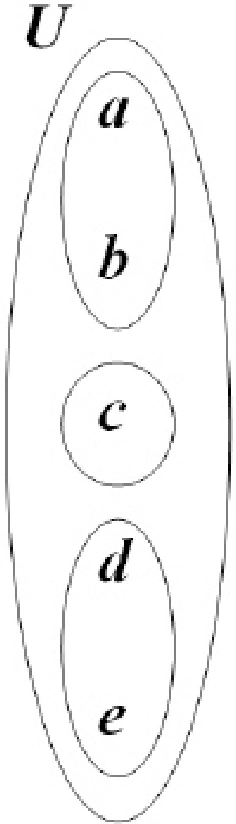
証明

集合束なので、下限は交、上限は和で定義される
$X, Y\in P$に対し、$R_*(X)=X$ および$R_*(Y)=Y$であるから

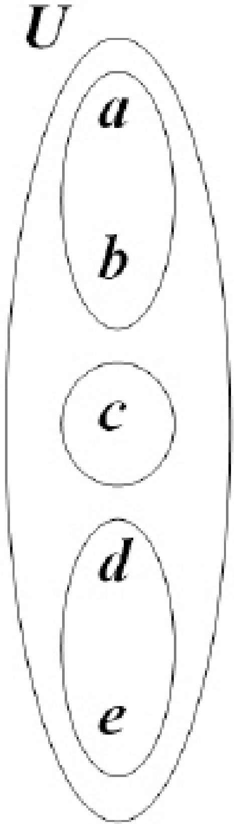
$$X\cap Y= R_*(X)\cap R_*(Y)= R_*(X\cap Y).$$

$$X\cup Y = R^*(X)\cup R^*(Y) = R^*(X\cup Y) \ \Rightarrow$$
$$X\cup Y = R_*(X\cup Y)$$

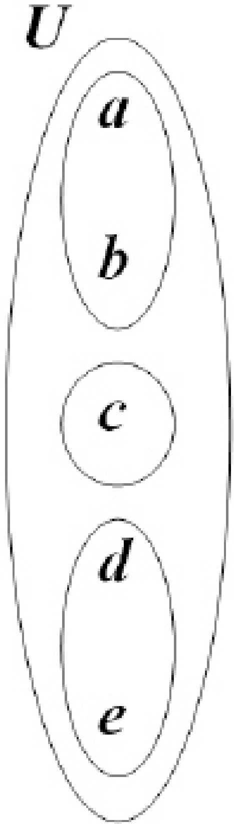
したがって$X\cap Y, X\cup Y\in P$で、
$<P, \subseteq>$は集合束であり、ブール代数である。


U
a
b
c
d
e

R に基づいた 論理の表現

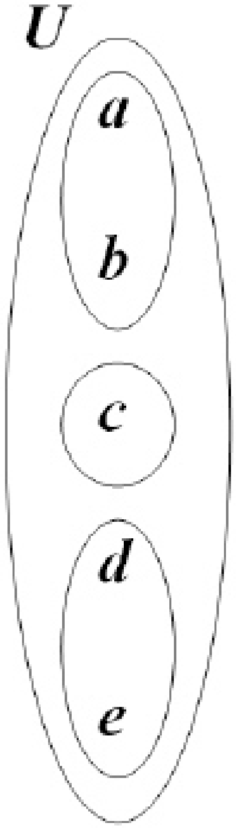


R に基づいた 論理の表現



$R_*R^*(X) = X$
なる X を集めて
構造をみる
（X は U の部分集合）

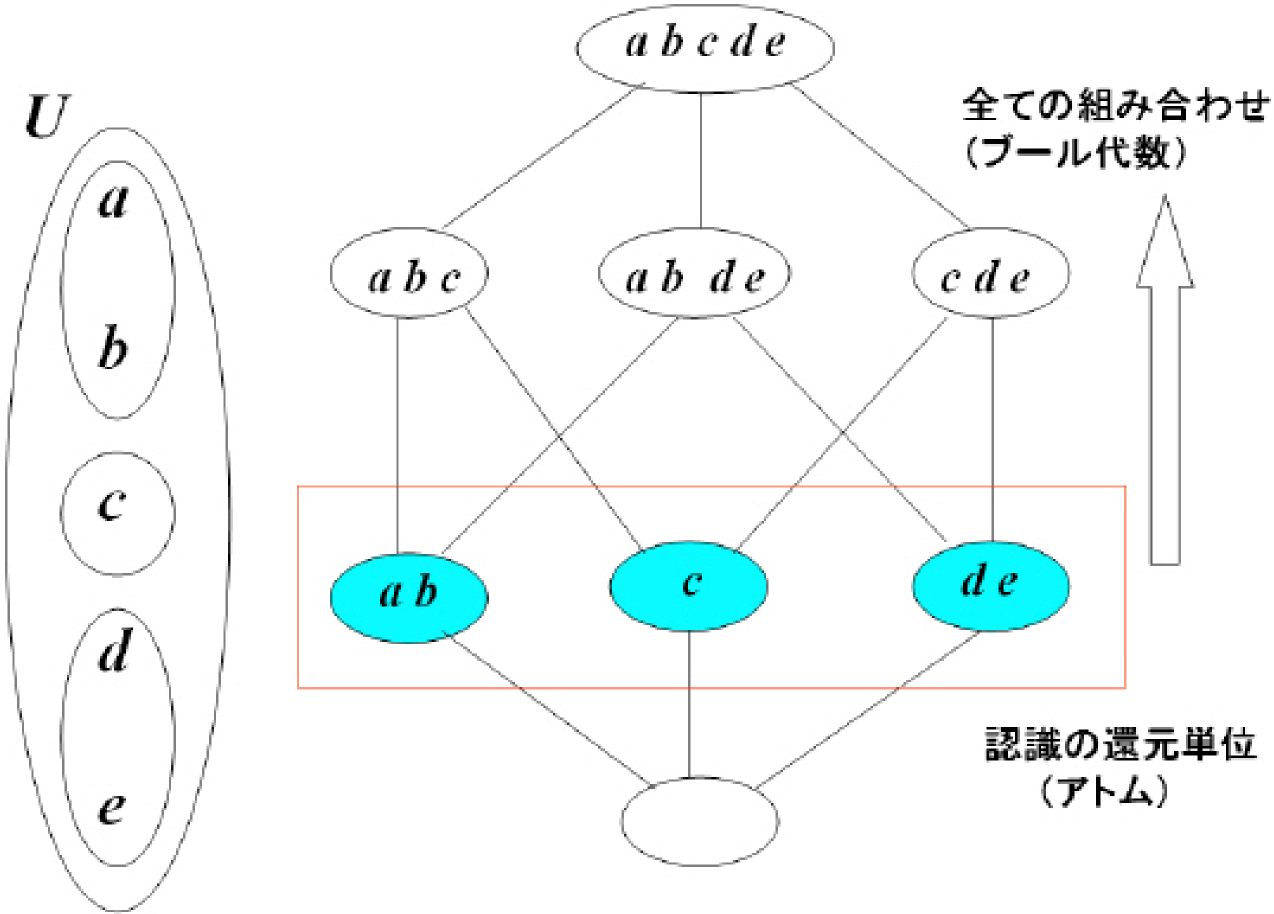
R に基づいた 論理の表現



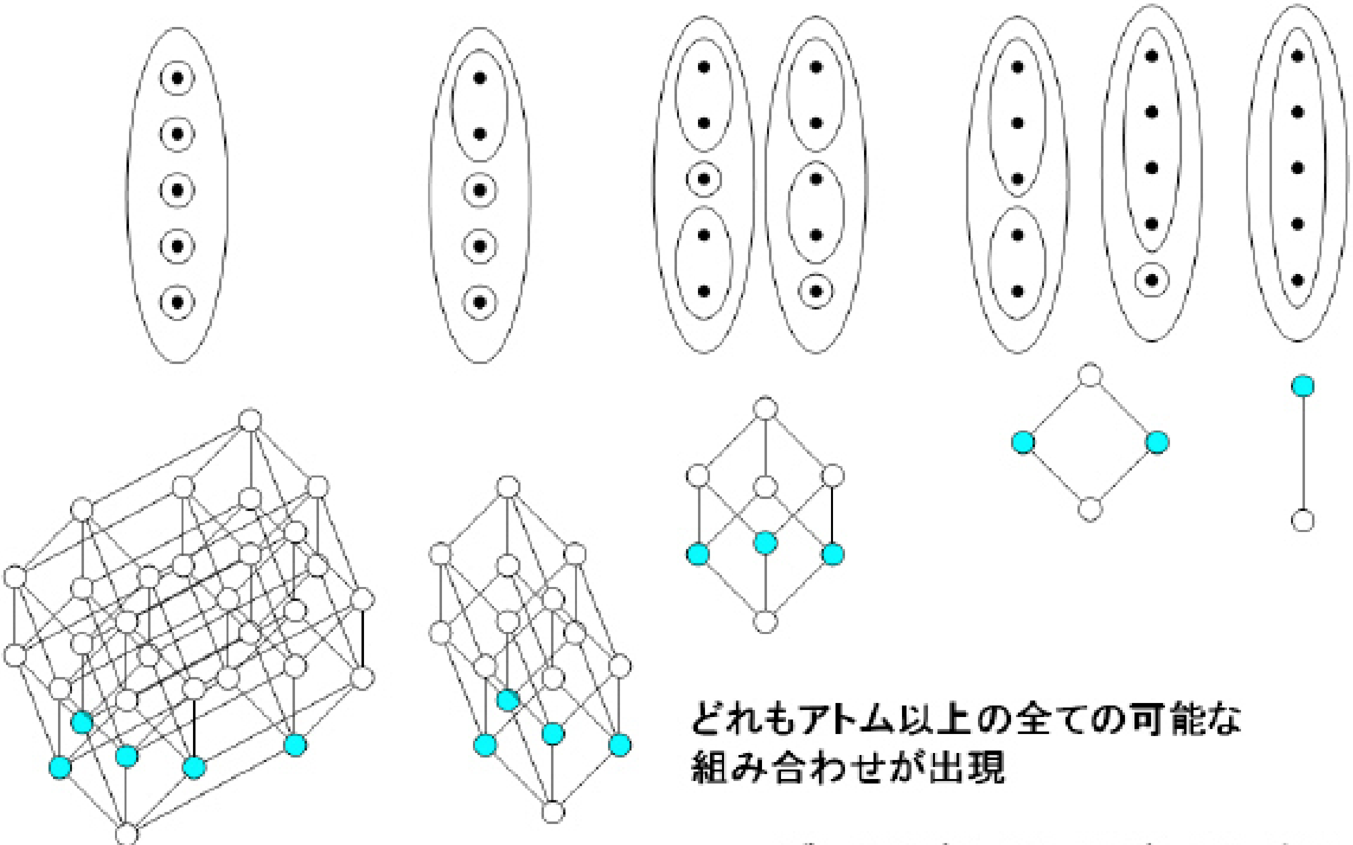
$$R_*R^*(X) = X$$

なる X を集めて
構造をみる
（X は U の部分集合）

XのR 認識における
太線を 結果的に 細くできる
表現を集める



U
a
b
c
d
e
a b c d e
a b c
a b d e
c d e
a b
c
d e
全ての組み合わせ
（ブール代数）
認識の還元単位
（アトム）



どれもアトム以上の全ての可能な
組み合わせが出現

→　ブール代数（内・外が区別可能）

同値関係の順序

集合Uで$R, S \subseteq U \times U$を同値関係とする
このとき、任意の$x, y \in U$に対して

$xRy \;\Rightarrow\; xSy$のとき、順序関係$R \leq S$と定義する

集合Uで$R, S \subseteq U \times U$を同値関係とし、$R \leq S$とする

このとき以下が成立する.

$$\text{(i)}\quad S_*(X) \subseteq R_*(X), \quad R^*(X) \subseteq S^*(X)$$
$$\text{(ii)}\quad S^*(X) \subseteq R_*(S^*(X)), \quad R^*(S_*(X)) \subseteq S_*(X)$$

順序のある同値関係の束

集合Uで$R, S \subseteq U \times U$を同値関係とし、$R \leq S$とする.

$$P = \{X \subseteq U \mid S_*(R^*(X)) = X\}$$

とするとき、包含関係を順序関係とする
$<P, \subseteq>$は集合束である.

反応・解釈（認識）・写像が、様々であっても、

一つの解釈系に、解釈が唯一つなら、

すべての解釈系の論理は、どれも同じ

（ブール代数）

世界に、多様性はない

異なる同値関係から誘導される擬閉包

集合Uで$R, S \subseteq U \times U$を同値関係とする.
ここで$T = S_* R^*$, $K = R^* S_*$すると、$X, Y \in U$に対して

$$X \subseteq Y \;\Rightarrow\; T(X) \subseteq T(Y),\ K(X) \subseteq K(Y)$$

$$T(T(X)) = T(X), \qquad K(K(X)) = K(X),$$

両義的描像：　ガロア接続成り立たない

集合Uで$R \subseteq U \times U$を同値関係とする. $X \subseteq U$に対し、

$$R^*(X) \subseteq Y \not\Leftrightarrow X \subseteq S_*(Y)$$

$S_*R^*(X) = X$　の集合を集めることで、見かけ上成立

$$R^*(X) \subseteq Y \Leftrightarrow X \subseteq S_*(Y)$$

定理　擬閉包不動点が誘導する束

集合Uで$R, S \subseteq U \times U$を同値関係とする.

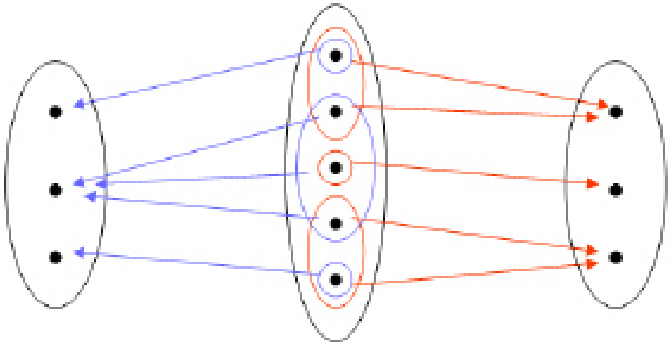
$$\boldsymbol{L}_T = \{X \subseteq U \mid T(X) = X\}, \quad \boldsymbol{P}_K = \{X \subseteq U \mid K(X) = X\}$$

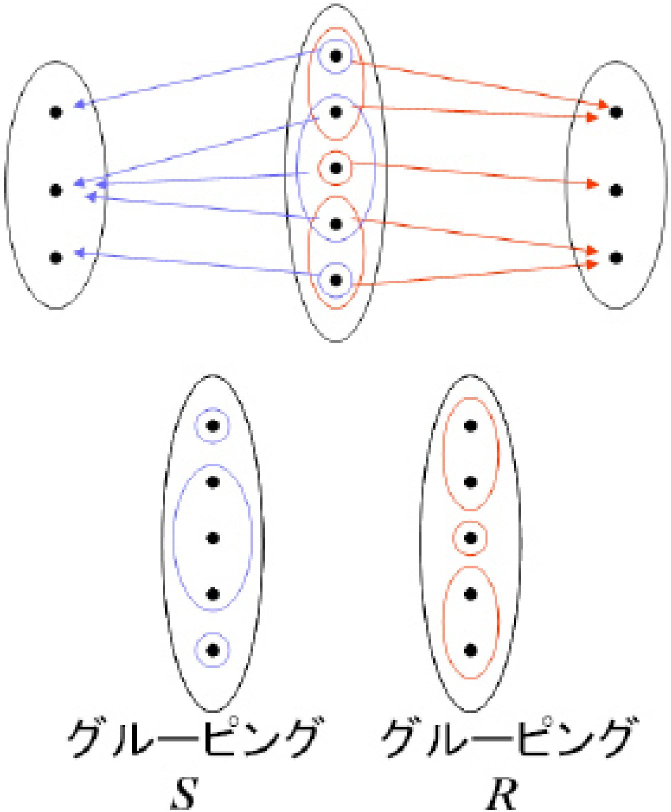
とするとき、$<\boldsymbol{L}_T, \subseteq>$, $<\boldsymbol{P}_K, \subseteq>$は束である.
ただし、$X, Y \in \boldsymbol{L}_T$に対して

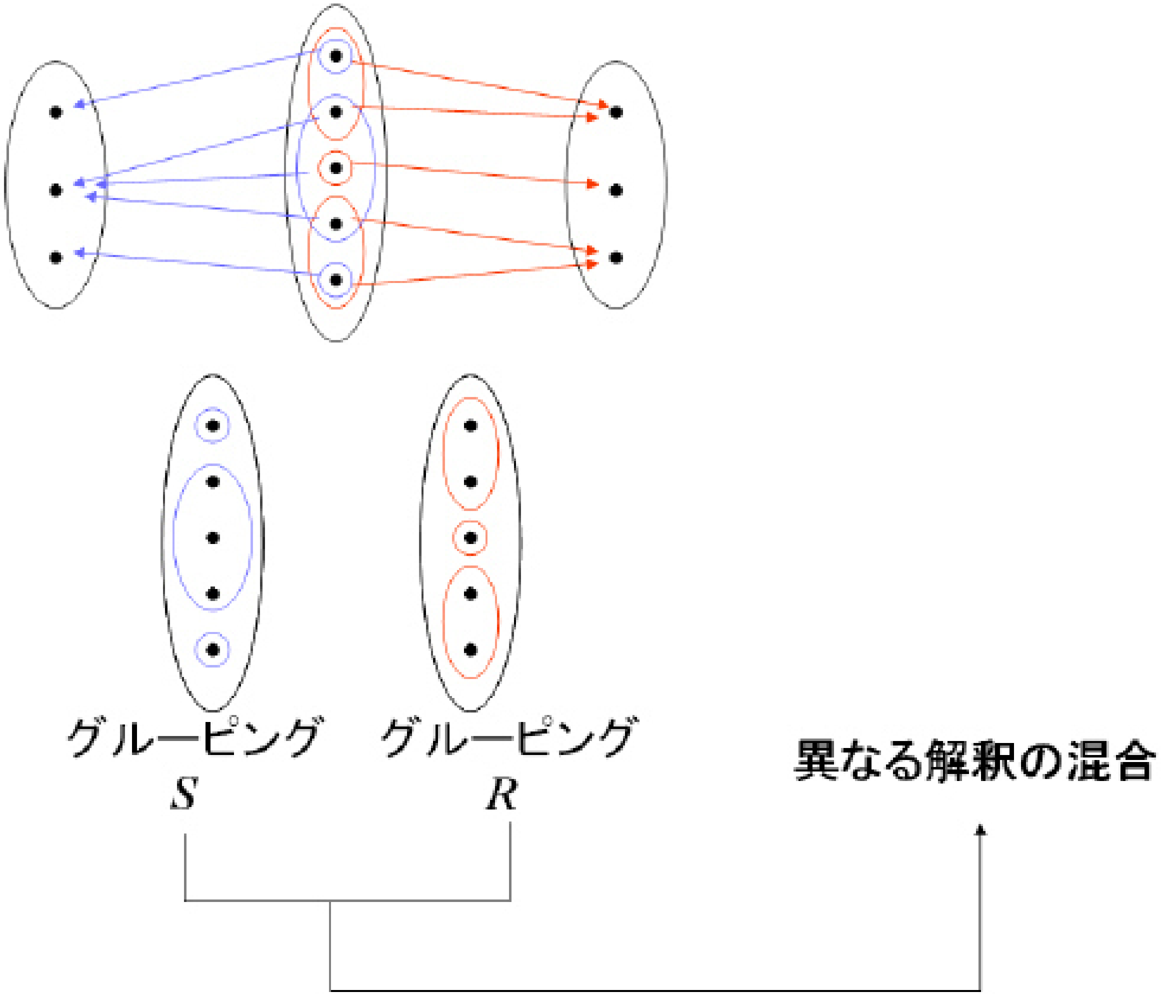
$$X \wedge Y = T(X \cap Y), \quad X \vee Y = T(X \cup Y)$$

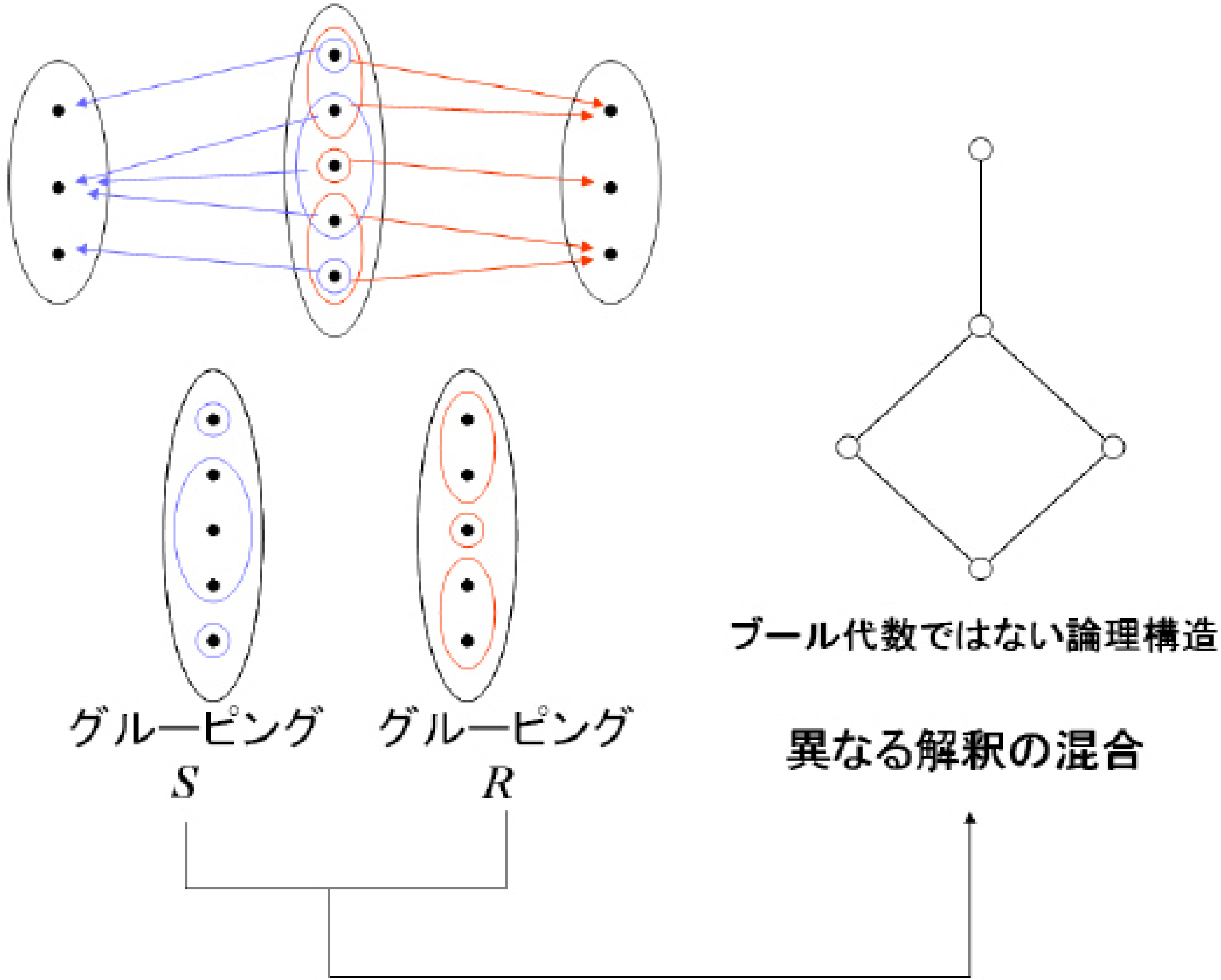
同じく$X, Y \in \boldsymbol{P}_K$に対しては

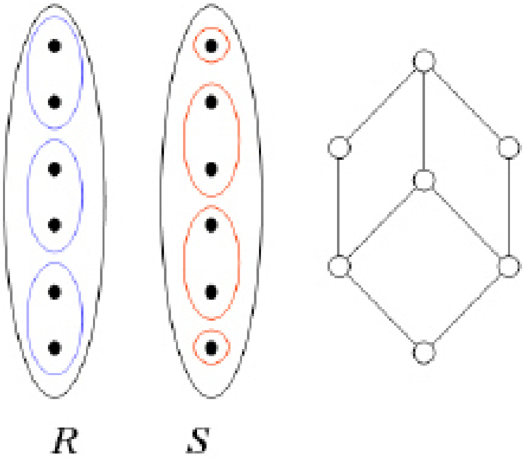
$$X \wedge Y = K(X \cap Y), \quad X \vee Y = K(X \cup Y)$$

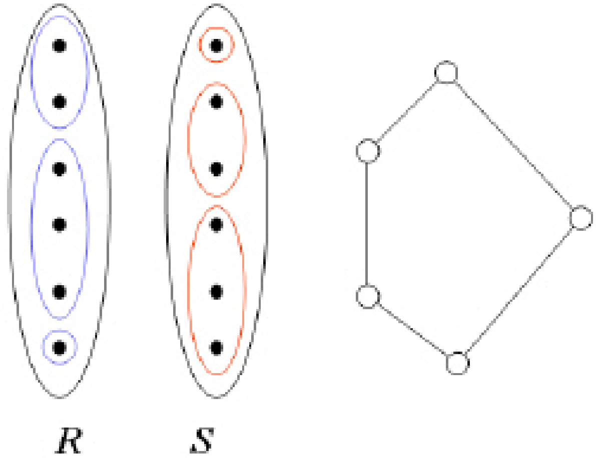



グルーピング S
グルーピング R

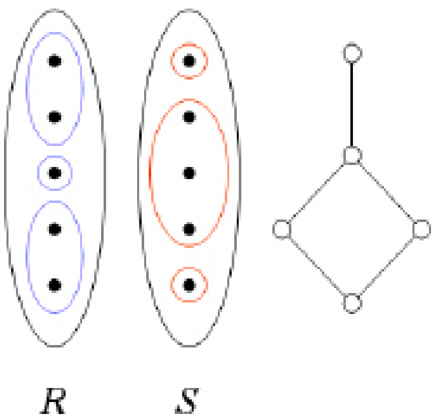

グルーピング
S
グルーピング
R
異なる解釈の混合

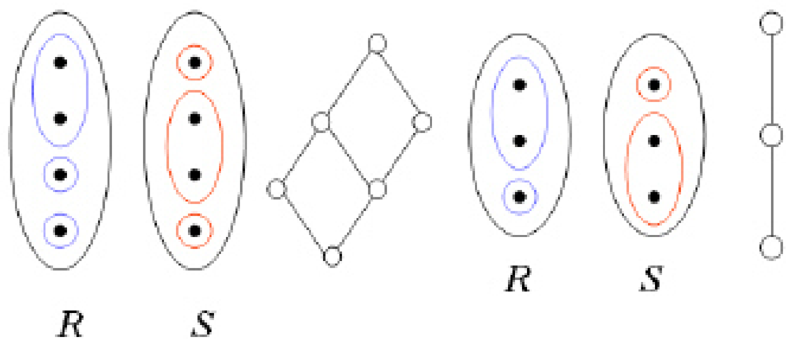

ブール代数ではない論理構造
グルーピング
S
グルーピング
R
異なる解釈の混合





異なる解釈の混合 → 多様な論理構造の出現





定理　ラフ集合誘導束の要素

集合Uを普遍集合, R と$S \subseteq U \times U$ を同値関係とする操作T と Sは、$T = S_* R^*$, $K = R^* S_*$で定義される。
このとき $X \subseteq U$に対して、

$$T(X) = X \quad \Rightarrow \quad S_*(X) = X,$$
$$K(X) = X \quad \Rightarrow \quad R^*(X) = X.$$

$\boldsymbol{L}_T$ と$\boldsymbol{L}_K$の間の束準同型に関する補題

集合Uを普遍集合とし、R と $S\subseteq U\times U$ を同値関係とする。このとき$T=S_*R^*$ and $K=R^*S_*$とすると、写像$\varphi: \boldsymbol{L}_T\rightarrow\boldsymbol{L}_K$ は束準同型である。ただし$X\in\boldsymbol{L}_T$に対し、

$$\varphi(X)=R^*(X),$$

$\boldsymbol{L}_T=\{X\subseteq U\mid T(X)=X\}$ および $\boldsymbol{L}_K=\{X\subseteq U\mid K(X)=X\}$とする。

$\boldsymbol{L}_T$ と$\boldsymbol{L}_K$の間の同型射に関する補題

集合Uを普遍集合とし、R と $S \subseteq U \times U$ を同値関係とする。このとき$T = S_* R^*$ and $K = R^* S_*$とすると、写像$\varphi: \boldsymbol{L}_T \to \boldsymbol{L}_K$ は同型射である。ただし$X \in \boldsymbol{L}_T$に対し、

$$\varphi(X) = R^*(X),$$

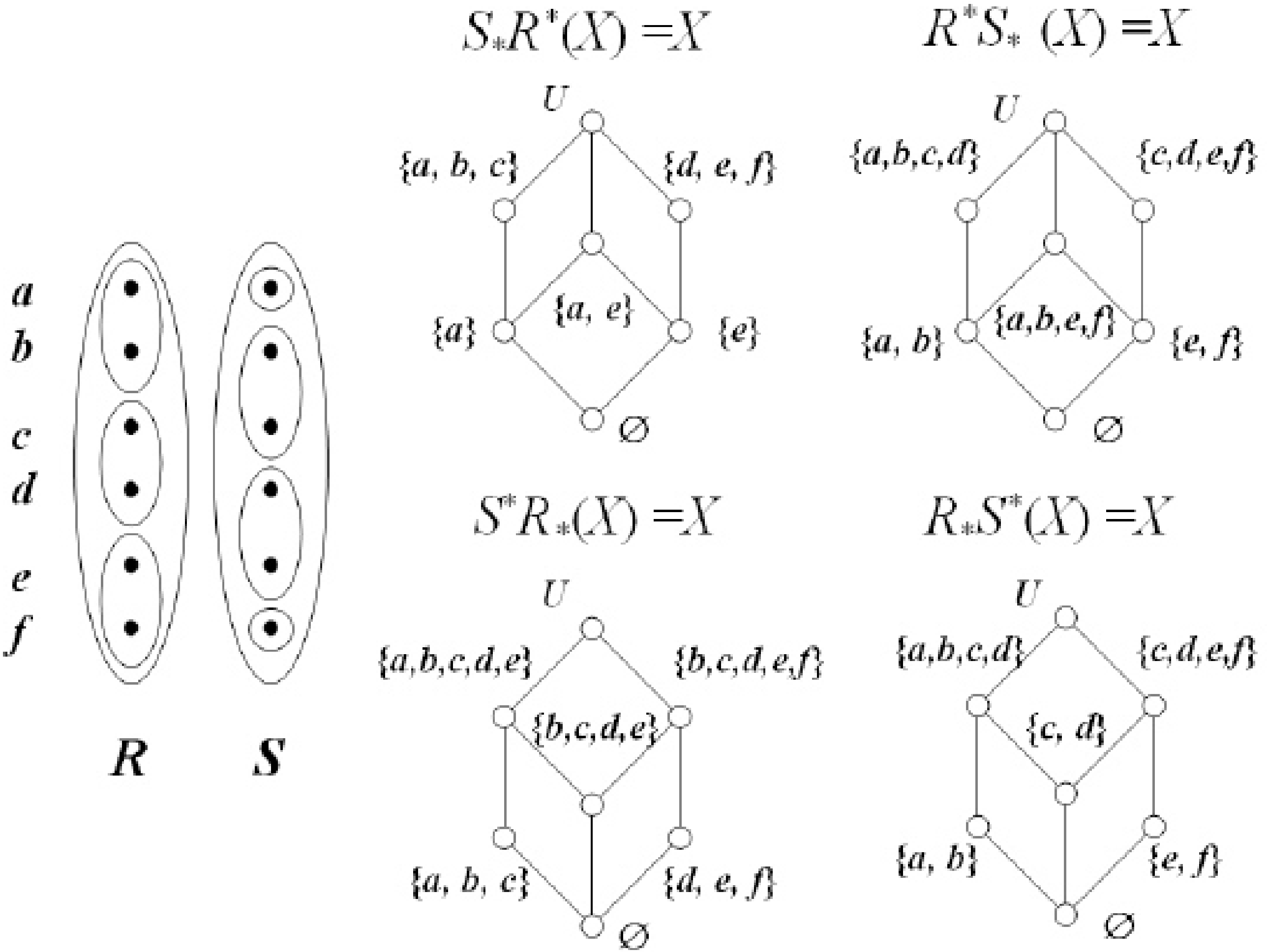
$\boldsymbol{L}_T = \{X \subseteq U \mid T(X) = X\}$ および $\boldsymbol{L}_K = \{X \subseteq U \mid K(X) = X\}$とする。

$\boldsymbol{L}_T$ と$\boldsymbol{L}_K$の間の束同型

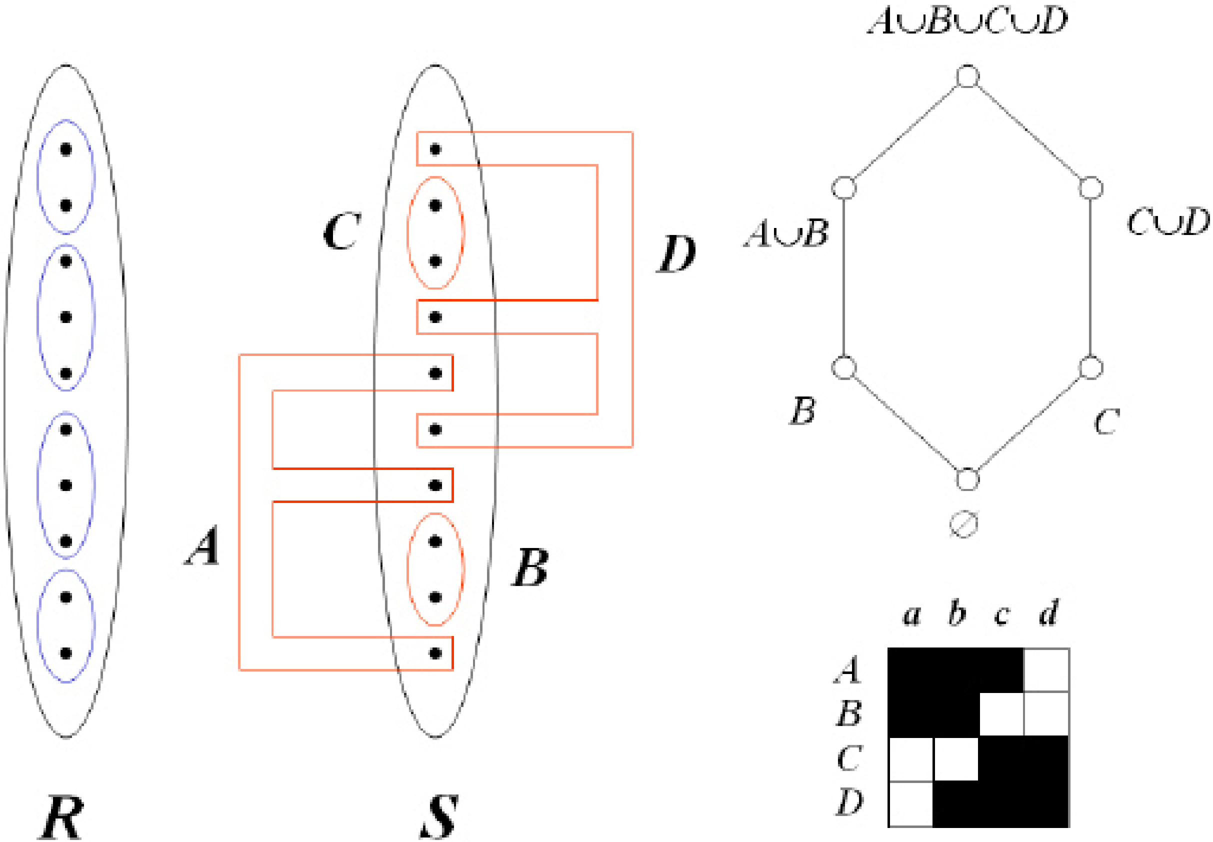
集合Uを普遍集合とし、R と $S \subseteq U \times U$ を同値関係とする。このとき$T = S_* R^*$ and $K = R^* S_*$とすると、写像$\varphi: \boldsymbol{L}_T \to \boldsymbol{L}_K$ は束同型である。ただし$X \in \boldsymbol{L}_T$で

$$\varphi(X) = R^*(X),$$

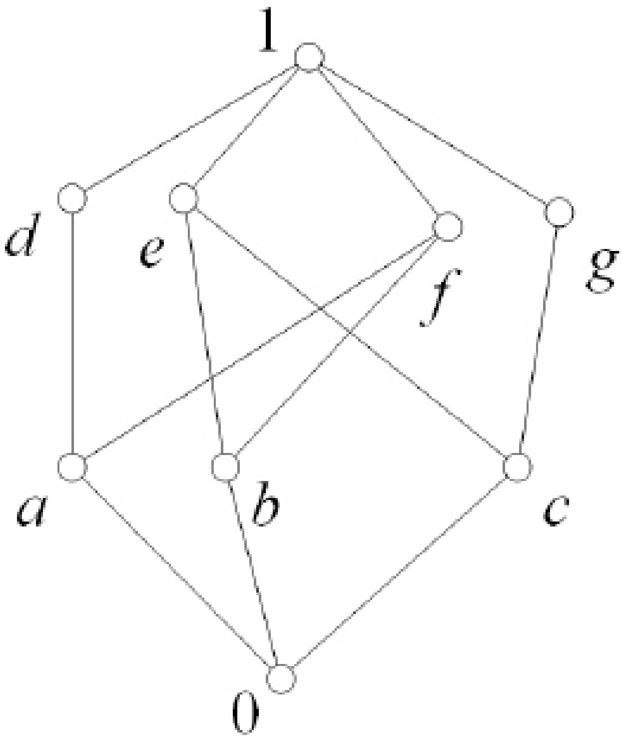
$\boldsymbol{L}_T = \{X \subseteq U \mid T(X) = X\}$ および $\boldsymbol{L}_K = \{X \subseteq U \mid K(X) = X\}$とする。

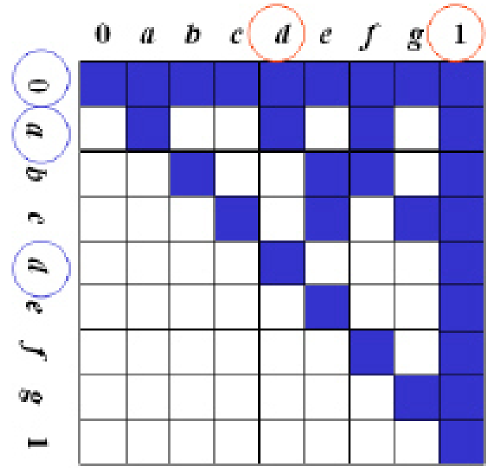


a
b
c
d
e
f
R
S
$S_*R^*(X) = X$
$R^*S_*(X) = X$
$S^*R_*(X) = X$
$R_*S^*(X) = X$
U
{a, b, c}
{d, e, f}
{a}
{a, e}
{e}
∅
U
{a,b,c,d}
{c,d,e,f}
{a, b}
{a,b,e,f}
{e, f}
∅
U
{a,b,c,d,e}
{b,c,d,e,f}
{b,c,d,e}
{a, b, c}
{d, e, f}
∅
U
{a,b,c,d}
{c,d,e,f}
{c, d}
{a, b}
{e, f}
∅



C
D
A
B
R
S
A∪B∪C∪D
A∪B
C∪D
B
C
∅
a b c d
A
B
C
D





$P(\{d, a, 0\})$
$=\{d, 1\}$

$P(\{d, 1\})$
$=\{d, a, 0\}$

$$\underset{\text{in } L}{x} \longmapsto \underset{\text{in } (L, L, \leq)}{(\downarrow x, \ \uparrow x) = (P(\uparrow x), P(\downarrow x))}$$

定義　束から誘導される普遍集合

$<L; \leq>$ を束とする。この束から誘導される普遍集合 $U_L \subseteq L \times L$を、

$$U_L = \{<x, y> \in L \times L \mid <x, y> \notin \leq\}$$

と定義する。Lから誘導される二つの同値関係をR，$S \subseteq U_L \times U_L$とかき、$<x, y>R<z, y>$ および$<x, y>S<x, w>$で定義する。

補題

$<L;\leq>$ を束とする。x を L の要素とし、x の下部集合 $X_x{}^l$、上部集合 $X_x{}^u$ を、各々、

$$X_x{}^l = \{<y,\ z> \in U_L | y \leq x\}$$
$$X_x{}^u = \{<y,\ z> \in U_L | x \leq z\},$$

とするとき、

$$R^*(X_x{}^l) = U_L - X_x{}^u,$$
$$S_*(U - X_x{}^u) = X_x{}^l$$

表現定理

L を束とする。写像 η:$<L; \leq> \rightarrow <\boldsymbol{L}T; \subseteq>$ を

$$\eta(x) = X_x^l$$

と $x \in L$ に対して定義するとき、これは L から $\boldsymbol{L}_T$ の同型射である。ただし $T = S_* R^*$、S と R は U_L 上の L から誘導される同値関係。また

$$\eta^{-1}(X) = \vee\{y \in L \mid <y, z> \in X\}$$

が $X \in \boldsymbol{L}_T$ に対して定義される。

Concept Lattice

Ganter & Wille 1999

Definition Formal Context

$K := (G, M, I)$
G : object, M : attribute,
I : binary relation $\subseteq G \times M$

Definition Formal Concept

(A, B) is a formal concept
$(A \subseteq G, \quad B \subseteq M)$
$:\Leftrightarrow \; A' = B \;$ and $\; B' = A$,
where

$A' = \{ m \in M \mid gIm, \; \forall g \in A \}$
A : extent
$B' = \{ g \in G \mid gIm, \; \forall m \in B \}$
B : intent

Ganter & Wille, 1999

Proposition

$A, A_1, A_2 \subseteq G$ (or $A, A_1, A_2 \subseteq M$)

(1) $A_1 \subseteq A_2 \quad \Rightarrow \quad A_2' \subseteq A_1'$

(2) $A \subseteq A''$

(3) $A' = A'''$

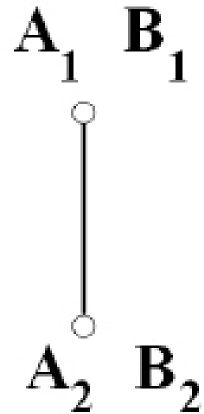
Definition Concept Lattice

(A_1, B_1), (A_2, B_2) : formal concept

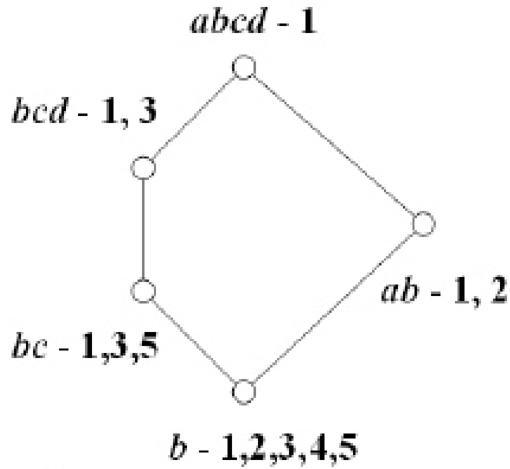
$P(G, M, I)$ is a concept lattice based on

$(A_1, B_1) \leq (A_2, B_2)$

$:\Leftrightarrow \quad A_1 \subseteq A_2$ and $B_2 \subseteq B_1$



G		a	b	c	d
	1	×	×	×	×
	2	×	×		
M	3		×	×	×
	4		×		
	5		×	×	



$\underline{\{a, b, c, d\}' = \{1\}}$

$\{a, b, c\}' = \{1\}$, $\{a, b, d\}' = \{1\}$

$\{a, c, d\}' = \{1\}$, $\underline{\{b, c, d\}' = \{1, 3\}}$

$\underline{\{a, b\}' = \{1,2\}}$, $\{a, c\}' = \{1\}$, $\{a, d\}' = \{1\}$

$\underline{\{b, c\}' = \{1, 3, 5\}}$, $\{b, d\}' = \{1,3\}$,

$\{c, d\}' = \{1,3\}$, $\{a\}' = \{1,2\}$,

$\underline{\{b\}' = \{1, 2, 3, 4, 5\}}$, $\{c\}' = \{1, 3, 5\}$,

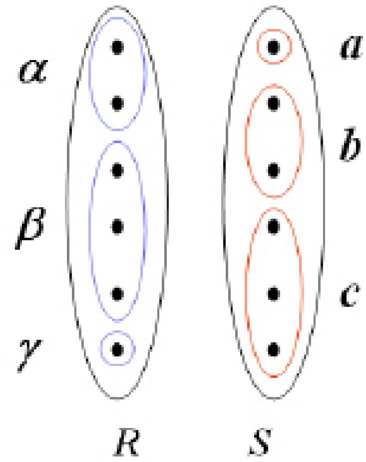
$\{d\}' = \{1,3\}$, $\varnothing' = \{1, 2, 3, 4, 5\}$

U : universal set

$R, S \subseteq U \times U$: equivalence relation

U/R: quotient set on R

U/S: quotient set on S



$I \subseteq U/R \times U/S$

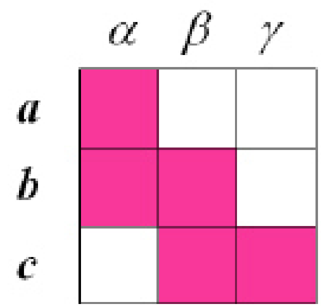
For $x \in U/R$, $y \in U/S$

$$xIy \ :\Leftrightarrow \exists p \in U \ (p \in x, p \in y)$$

$$I(x) = \{y \in U/S \mid xIy\}$$

$$I(y) = \{x \in U/R \mid xIy\}$$

$$J = U/R \times U/S - I$$



For $A \subseteq U/S$, $B \subseteq U/R$

$$R^*(A) = \{x \in U/R \mid A \cap I(x) \neq \emptyset\}$$

$$S_*(B) = \{y \in U/S \mid I(y) \subseteq B\}$$

Lemma

For $A \subseteq U/S$, $B \subseteq U/R$,

$$R^*(A) = (P(A))^c, \quad S_*(B) = P(B^c)$$

where

$$R^*(A) = \{x \in U/R \mid A \cap I(x) \neq \varnothing\}$$
$$S_*(B) = \{y \in U/S \mid I(y) \subseteq B\}$$

$$P(A) = \{y \in U/R \mid xJy, \ {}^{\forall}x \in A\}$$
$$P(B) = \{x \in U/S \mid xJy, \ {}^{\forall}y \in B\}$$

Proof

(i)

$$x \in R^*(A) \Leftrightarrow A \cap I(x) \neq \varnothing$$
$$\Leftrightarrow {}^{\exists} y \in A,\ xIy$$

$$x \notin R^*(A) \Leftrightarrow {}^{\forall} y \in A,\ xJy \Leftrightarrow x \in P(A)$$
$$\therefore R^*(A) = (P(A))^c$$

(ii)

$$y \in S_*(B) \Leftrightarrow I(x) \subseteq B \Leftrightarrow (xIy \Rightarrow y \in B)$$
$$\Leftrightarrow (y \in B^c \Rightarrow xJy)$$
$$\Leftrightarrow y \in P(B^c)$$

Theorem

Concept lattice $<U/R,\ U/S,\ J,\ \subseteq>$ is equivalent to a lattice $<L_T,\ \subseteq>$.

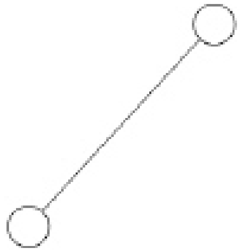
Proof

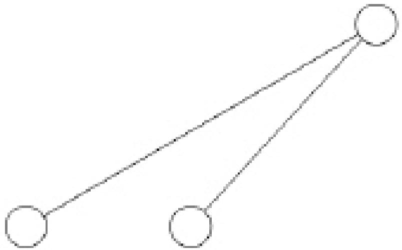
Supposing, $PP(X)=X$,

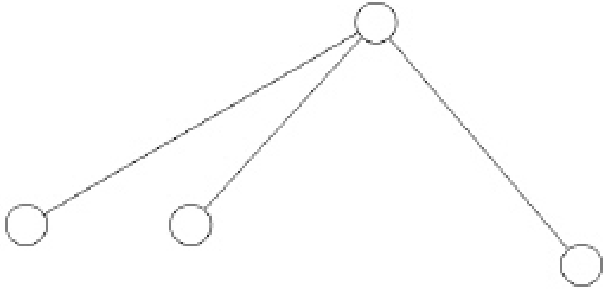
$$S_*(R^*(X)) = P(((P(X))^c)^c) = PP(X) = X$$

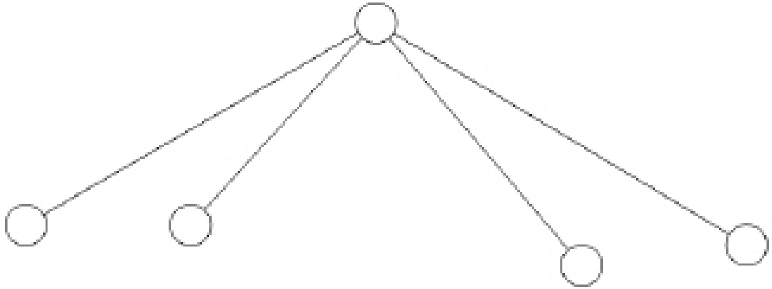
Supposing $S_*(R^*(X))=X$,

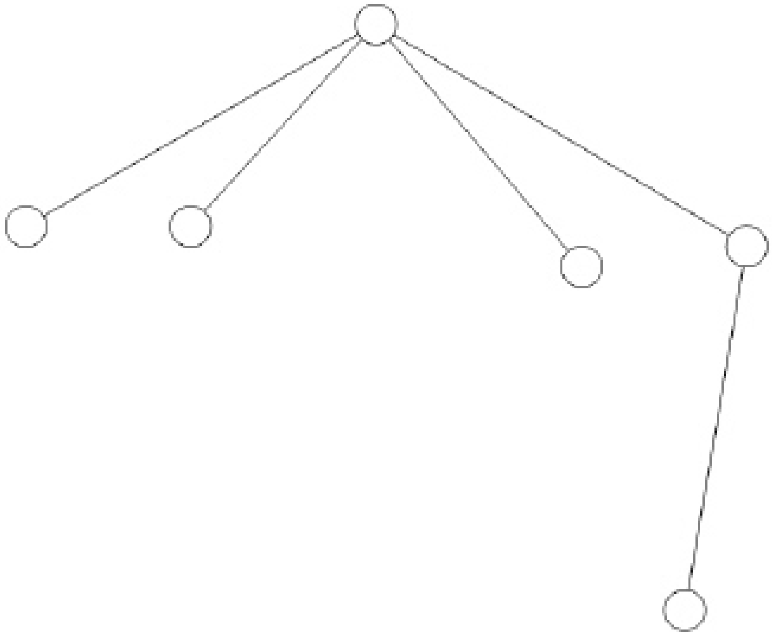
$$PP(X) = S_*(((R^*(X))^c)^c) = X$$

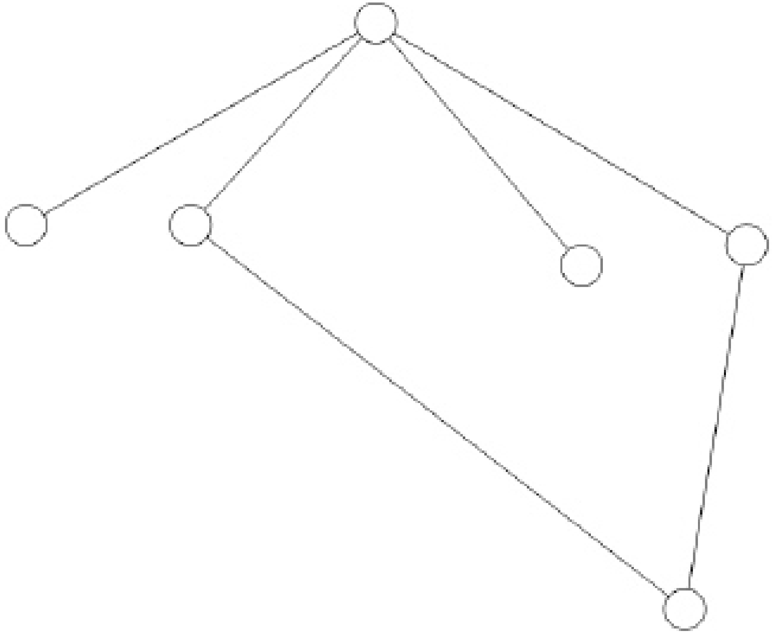


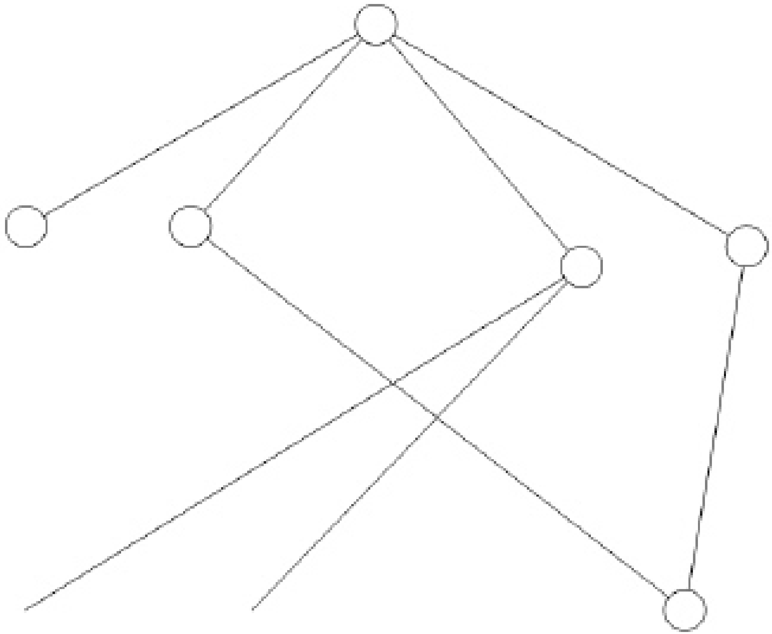


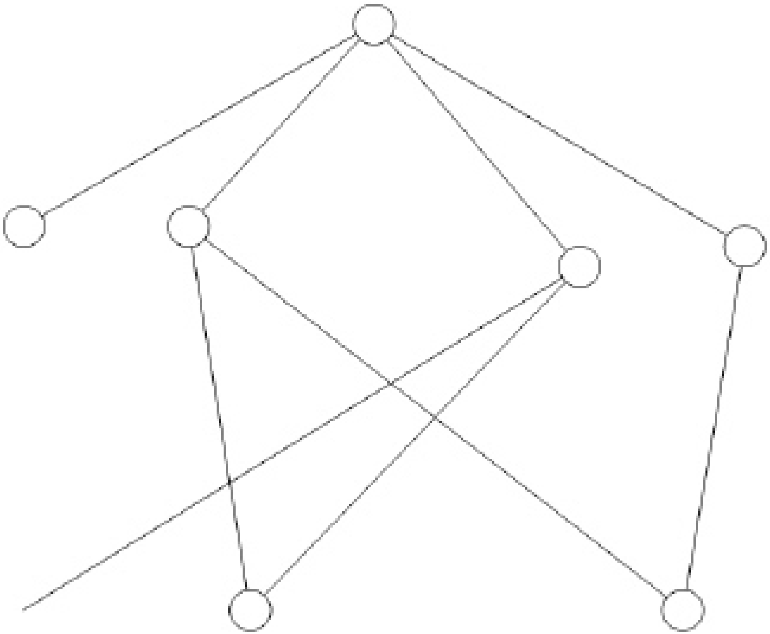


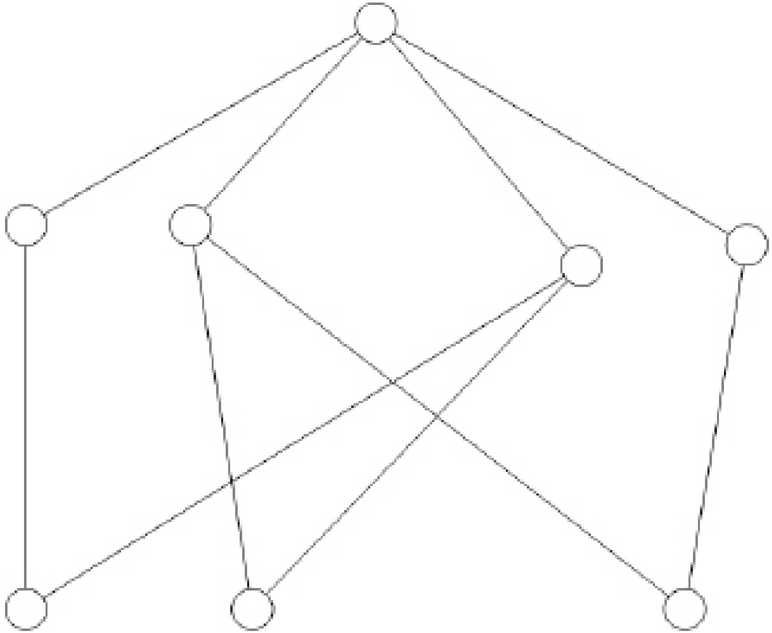


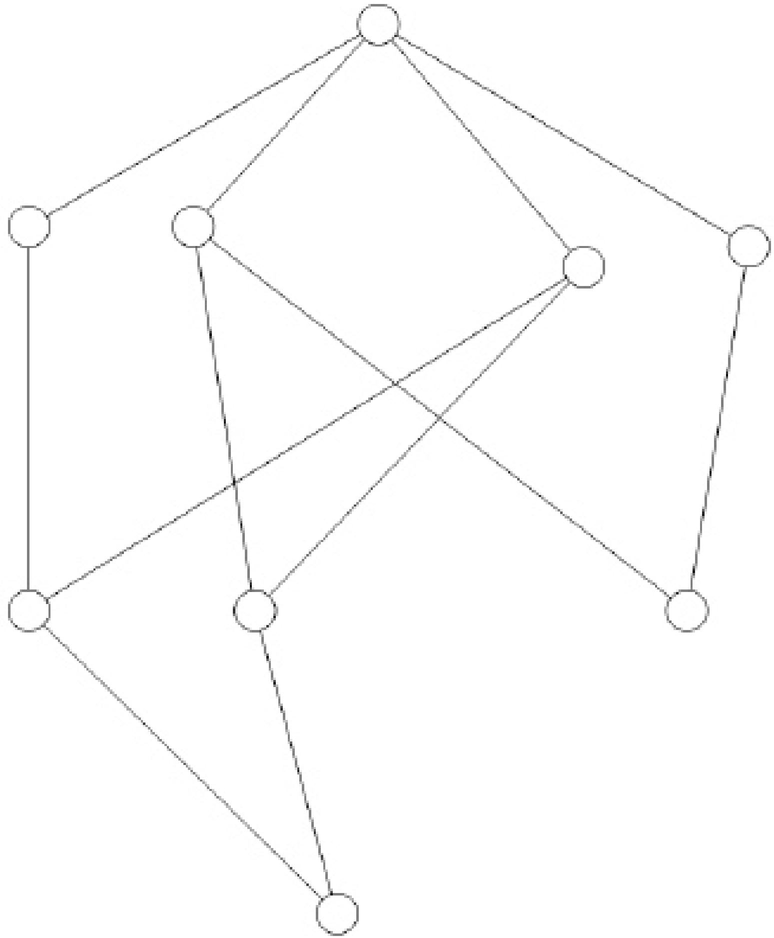


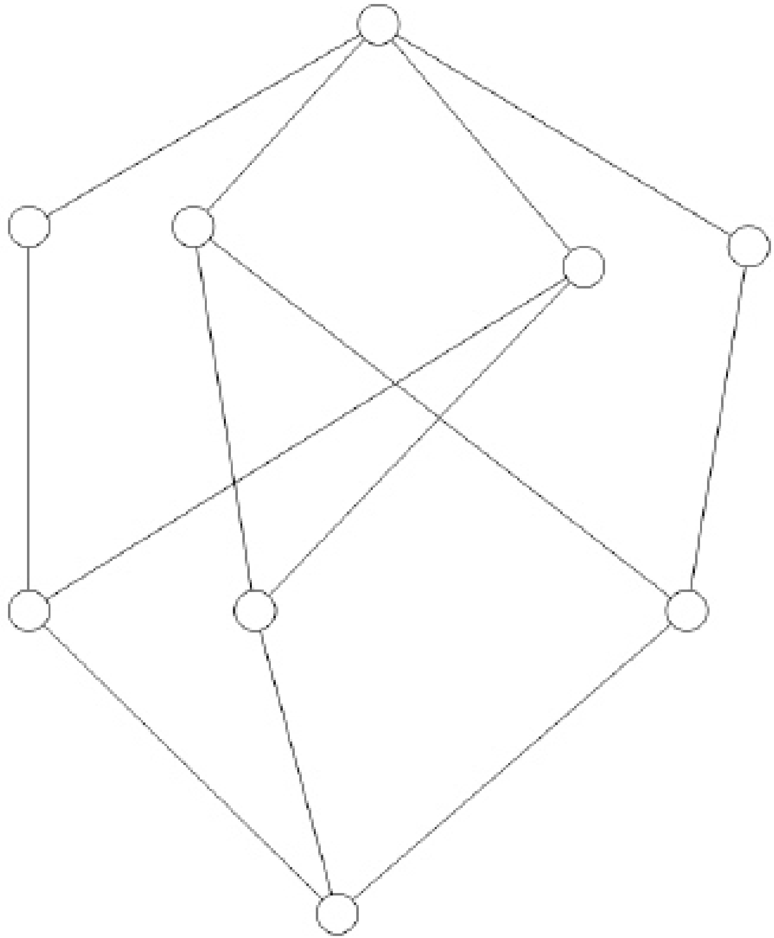










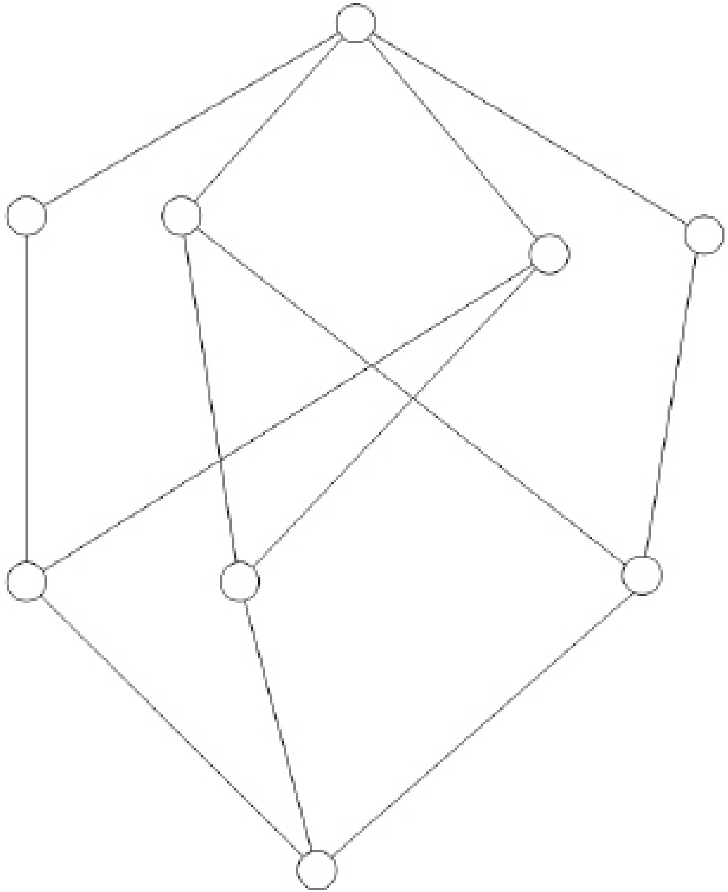


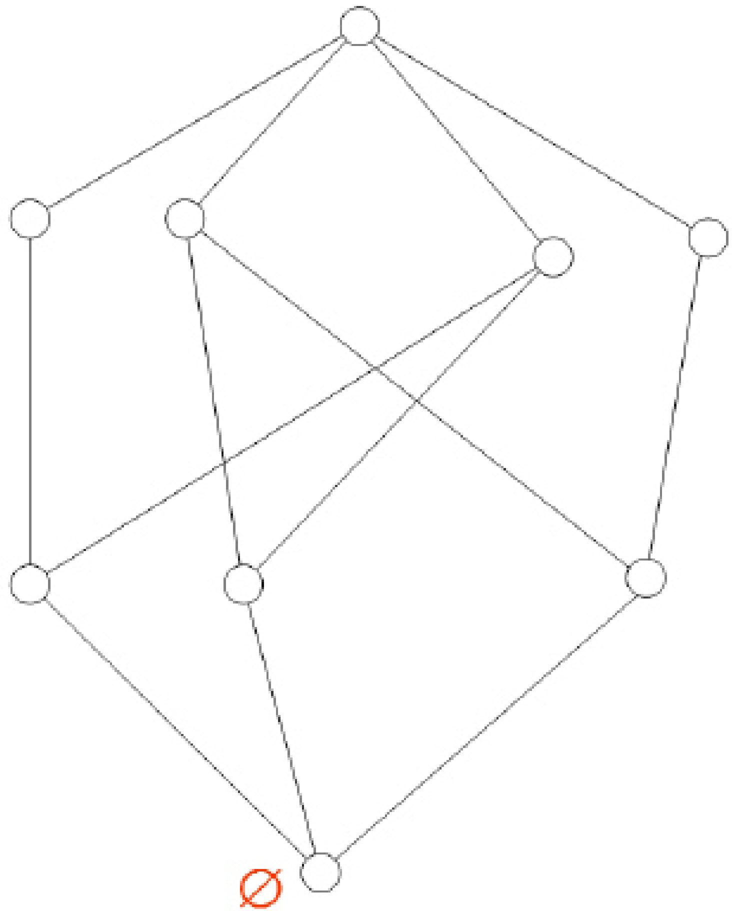
形式文脈の構成法

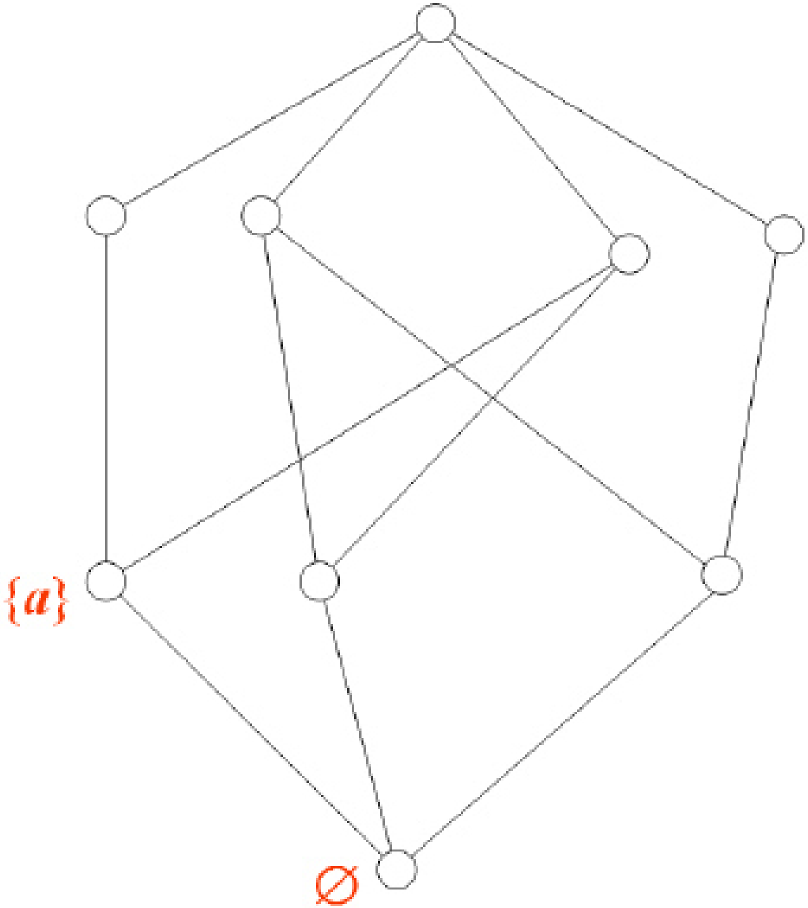
（1） ボトムは空集合

（2） $X = \downarrow X$

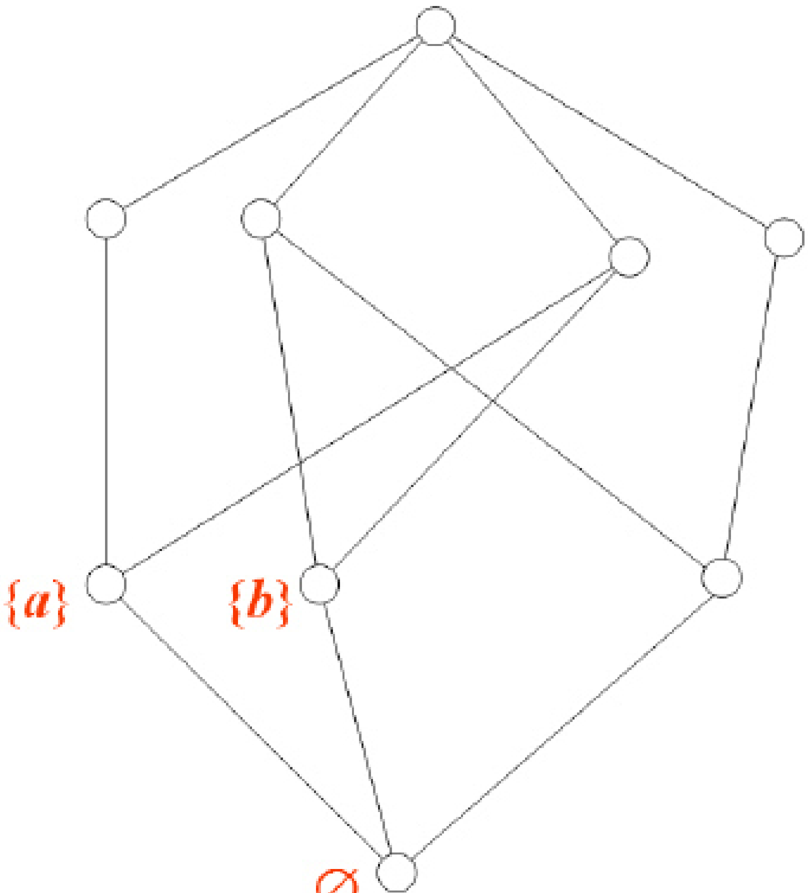
（3） 同じ値は、新たしい文字を和で加え
区別する



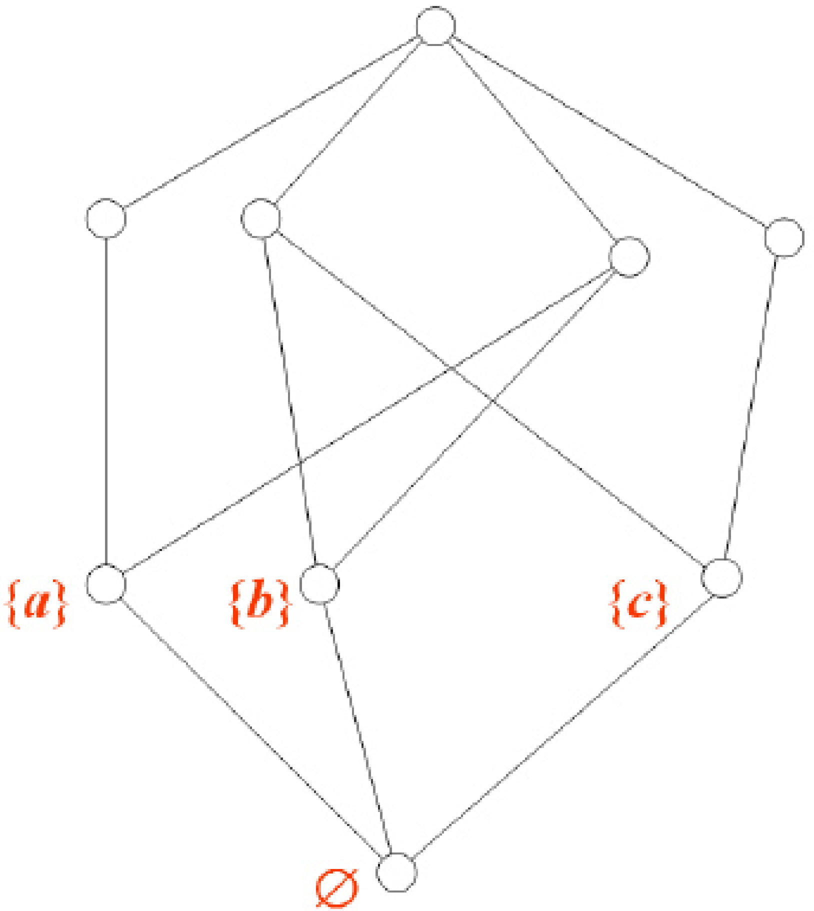


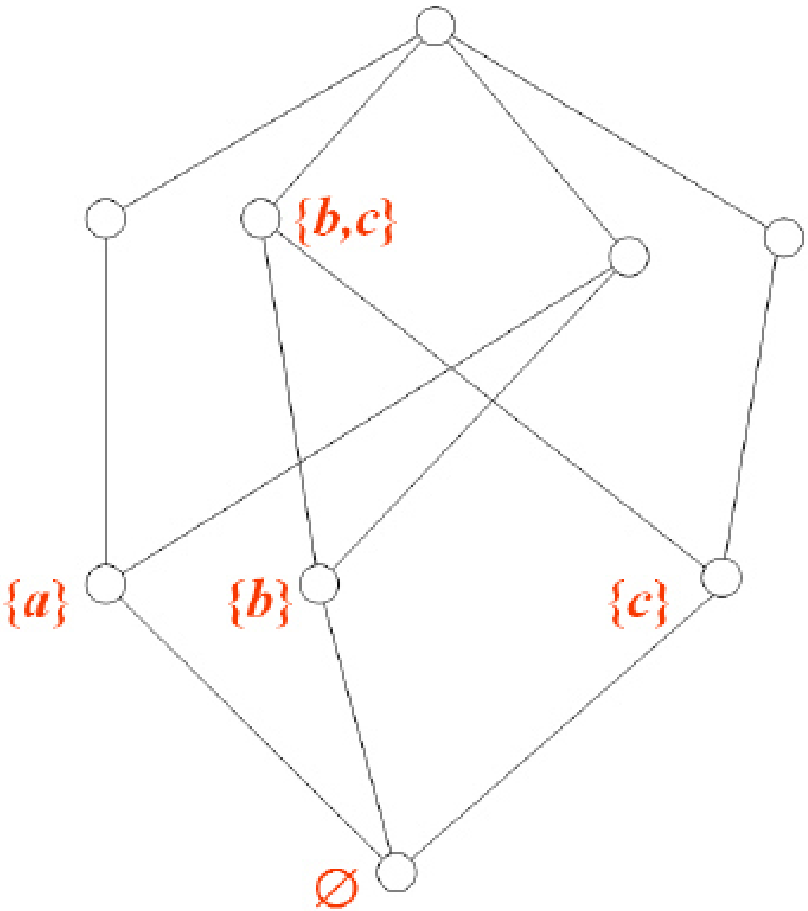


$\{a\}$
$\varnothing$

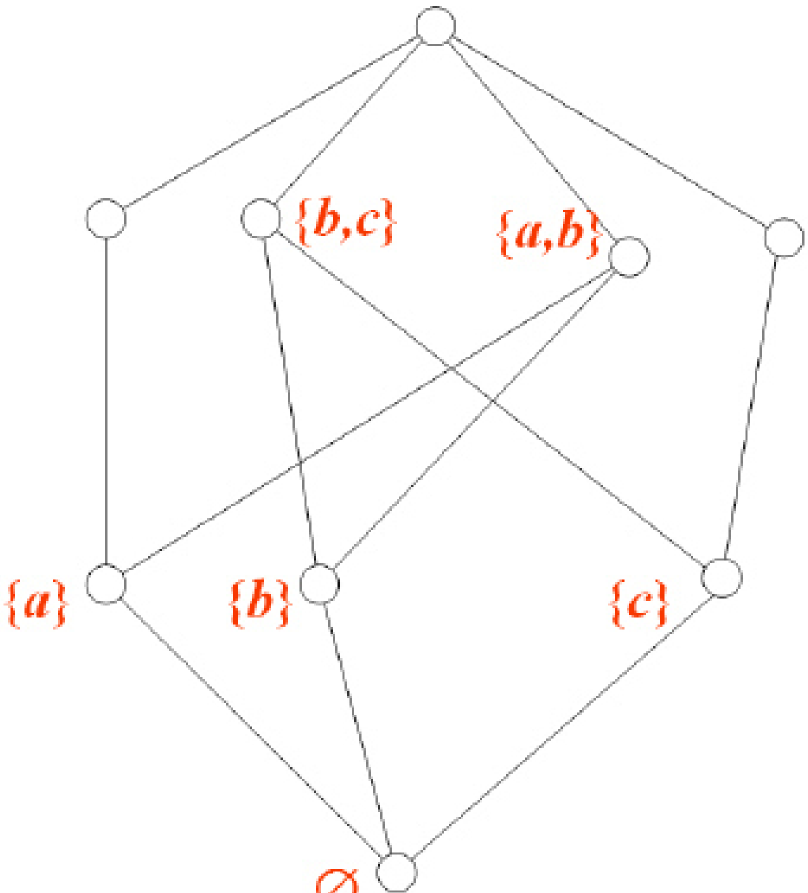


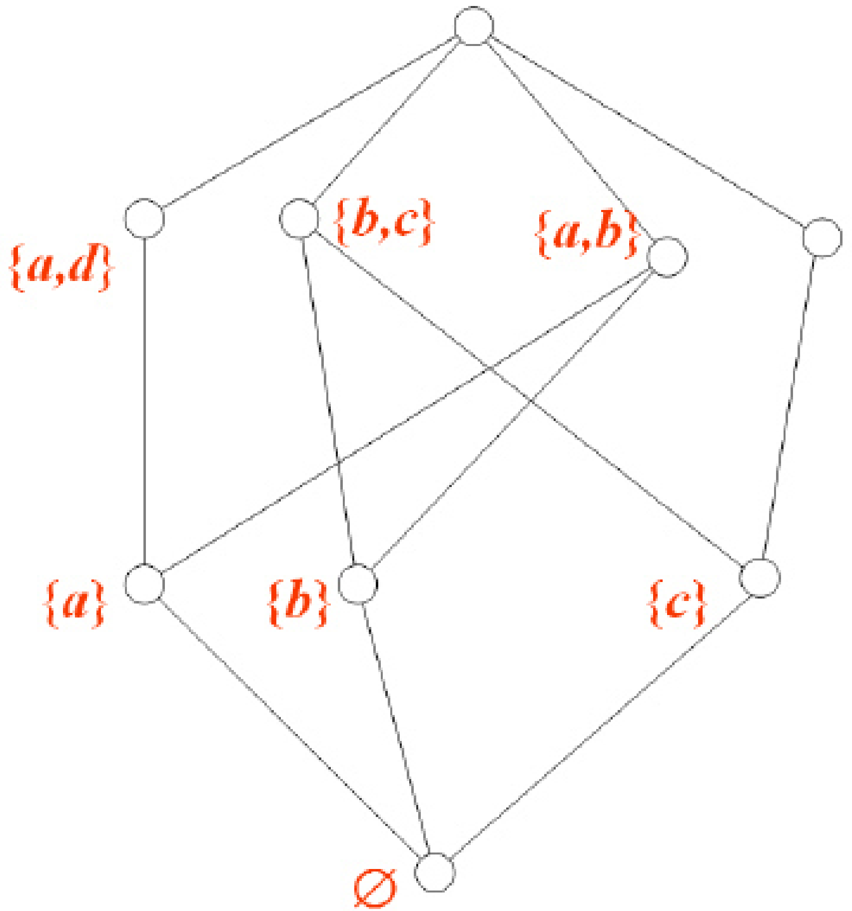
{a}
{b}
∅

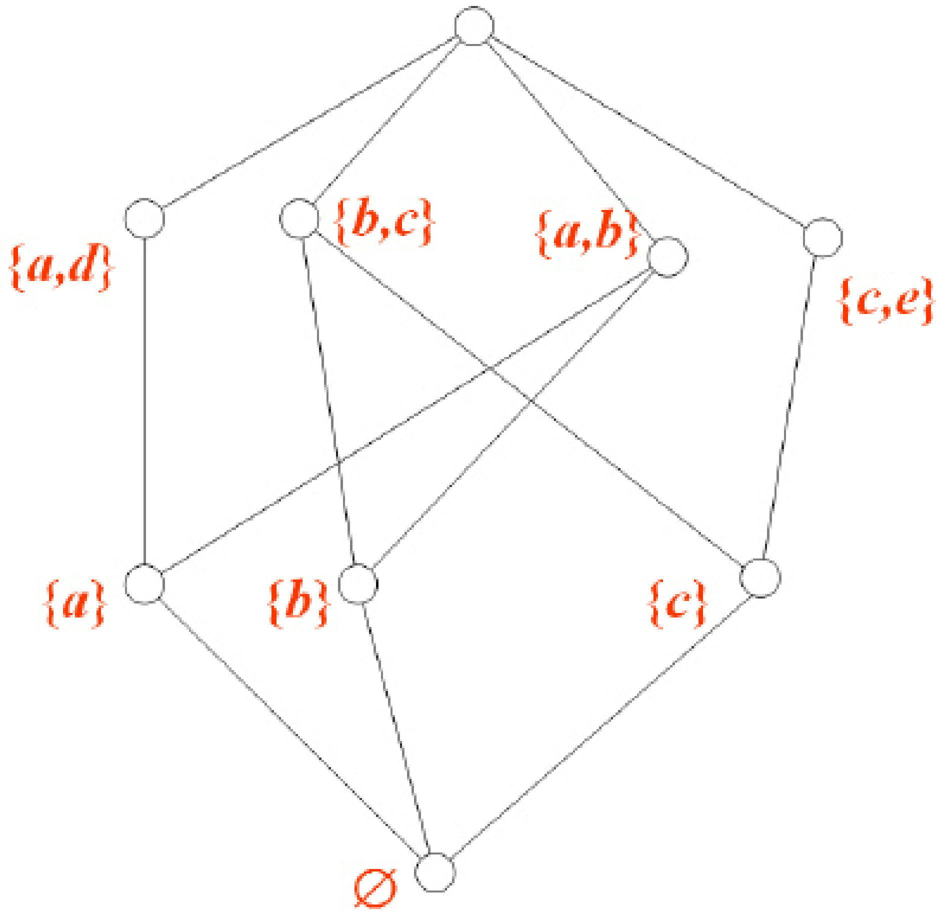

{a}
{b}
{c}
∅

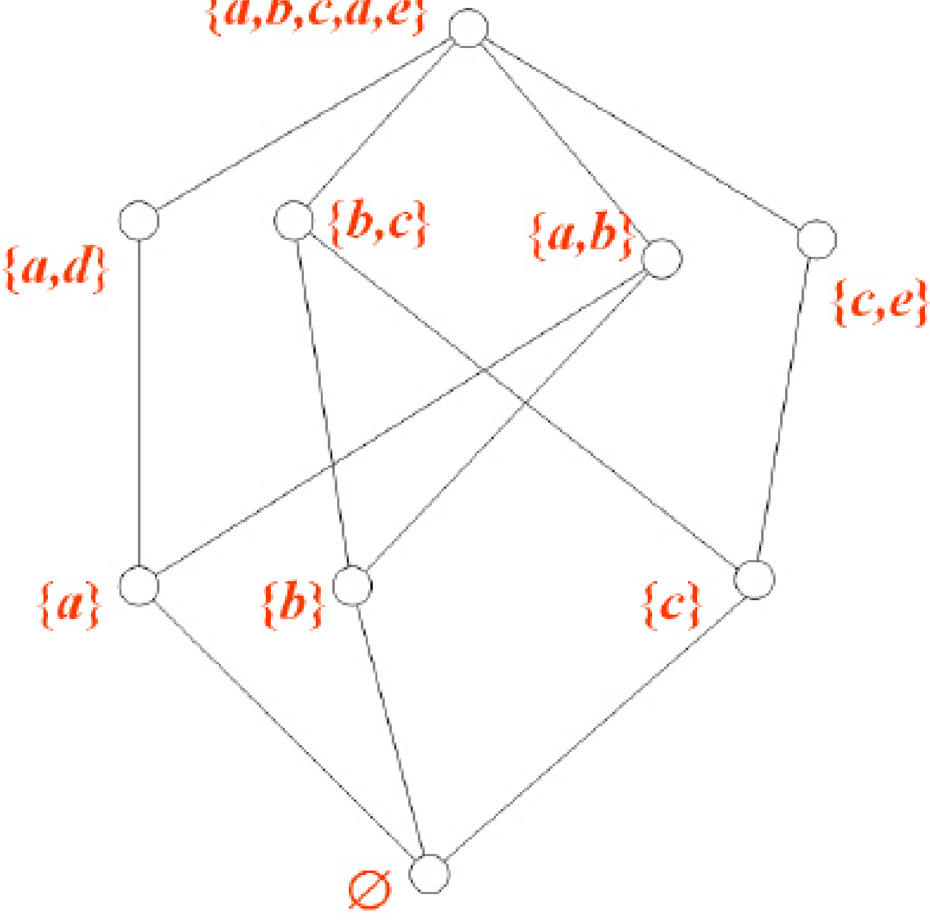


$\{b,c\}$
$\{a\}$
$\{b\}$
$\{c\}$
$\varnothing$

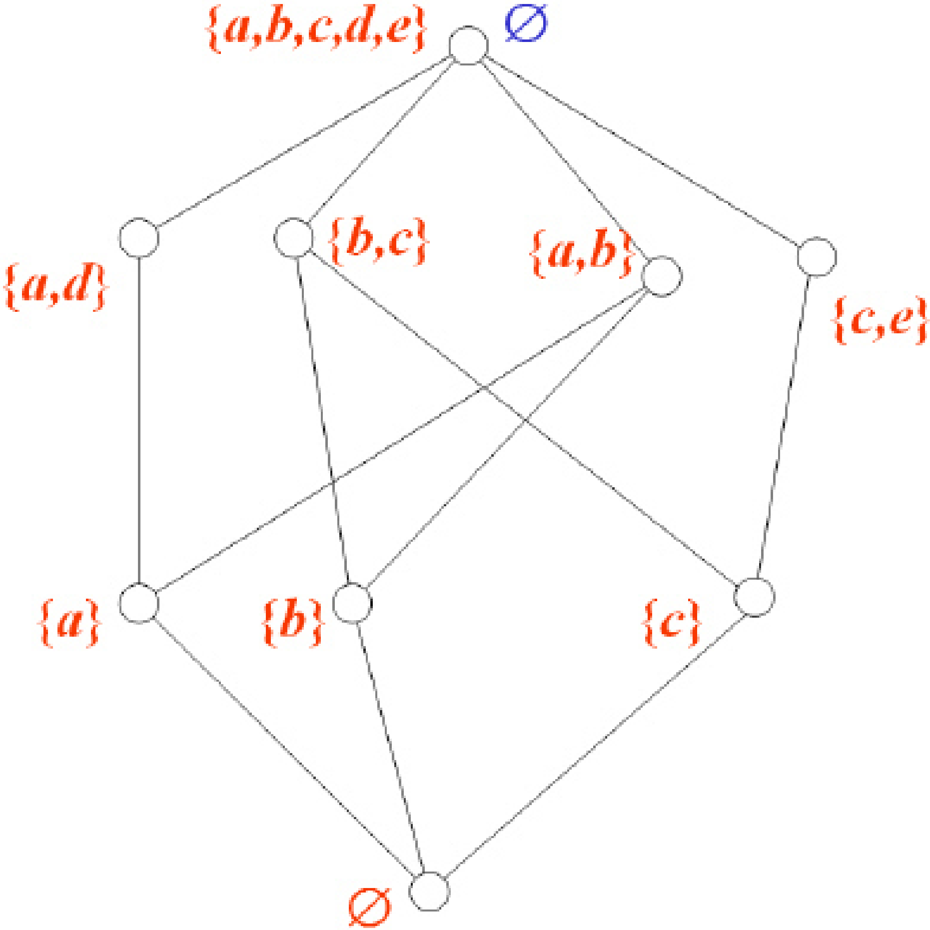

{b,c}
{a,b}
{a}
{b}
{c}
∅

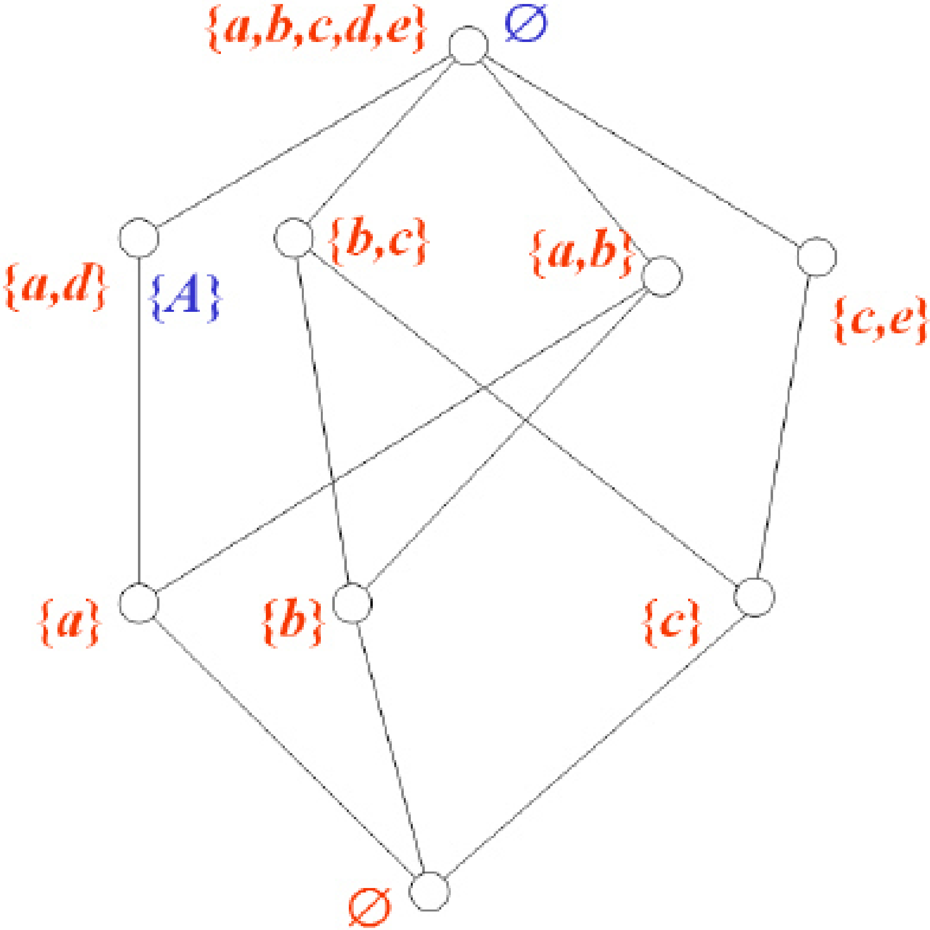

{a,d}
{b,c}
{a,b}
{a}
{b}
{c}
∅

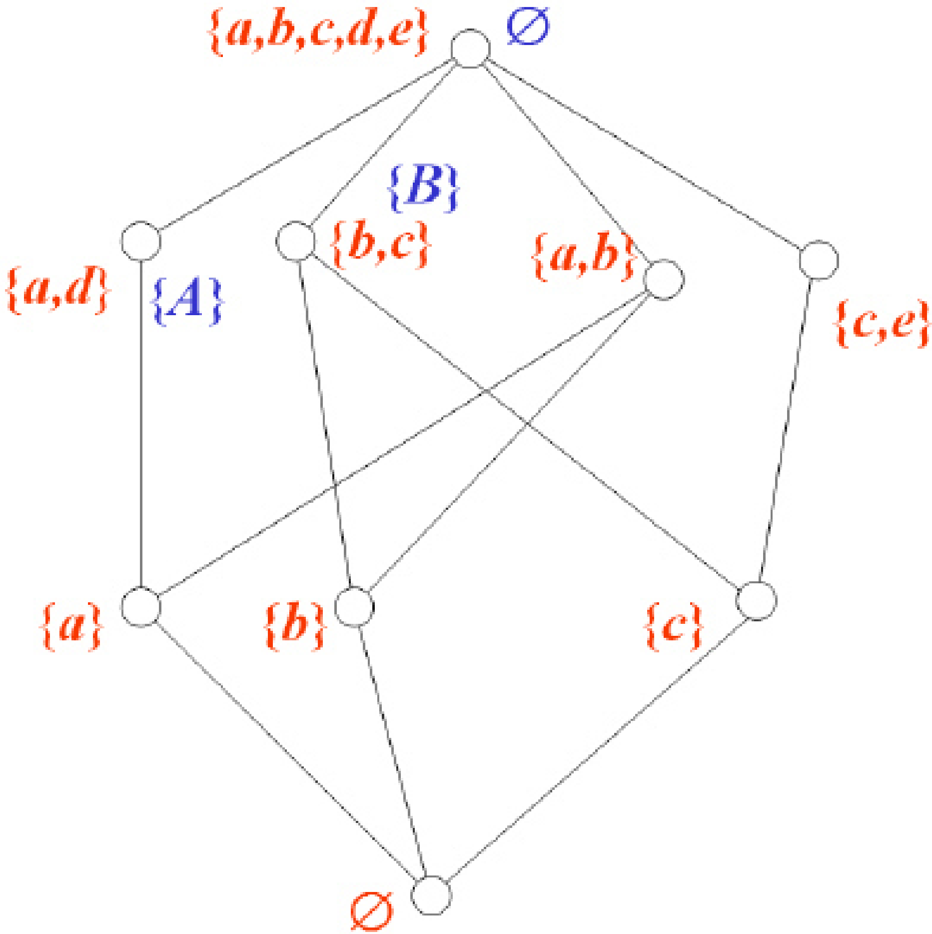

{b,c}
{a,b}
{a,d}
{c,e}
{a}
{b}
{c}
∅

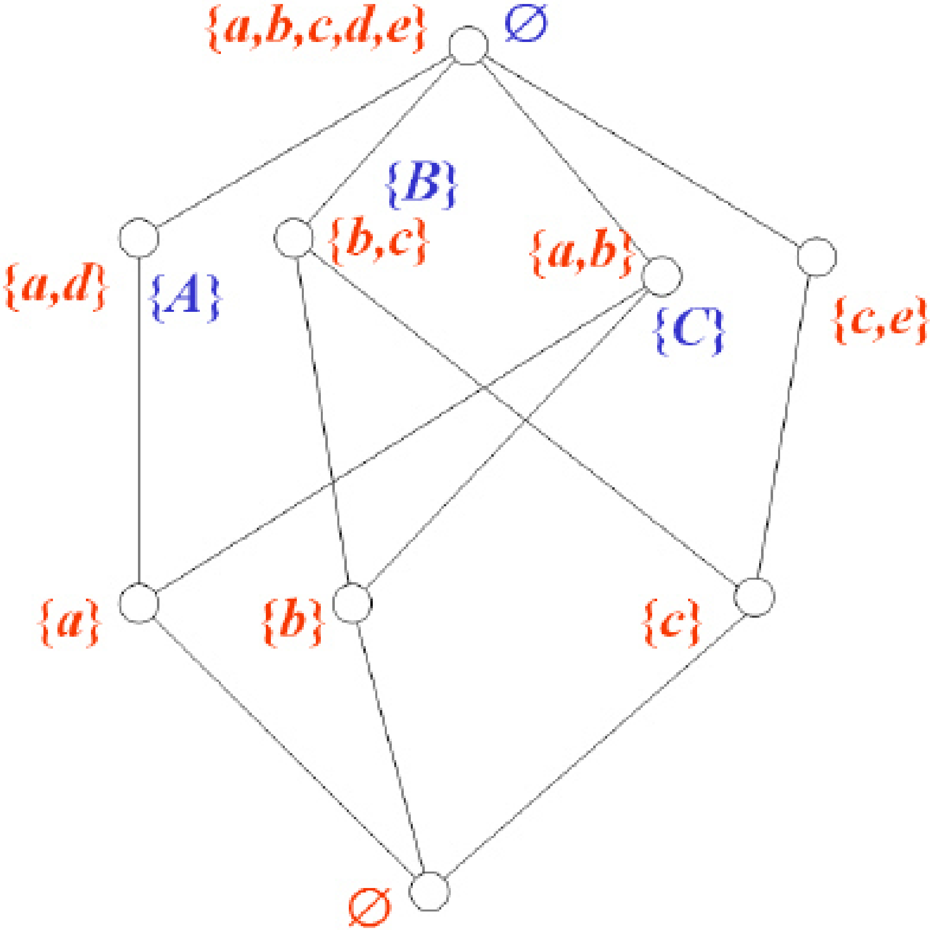


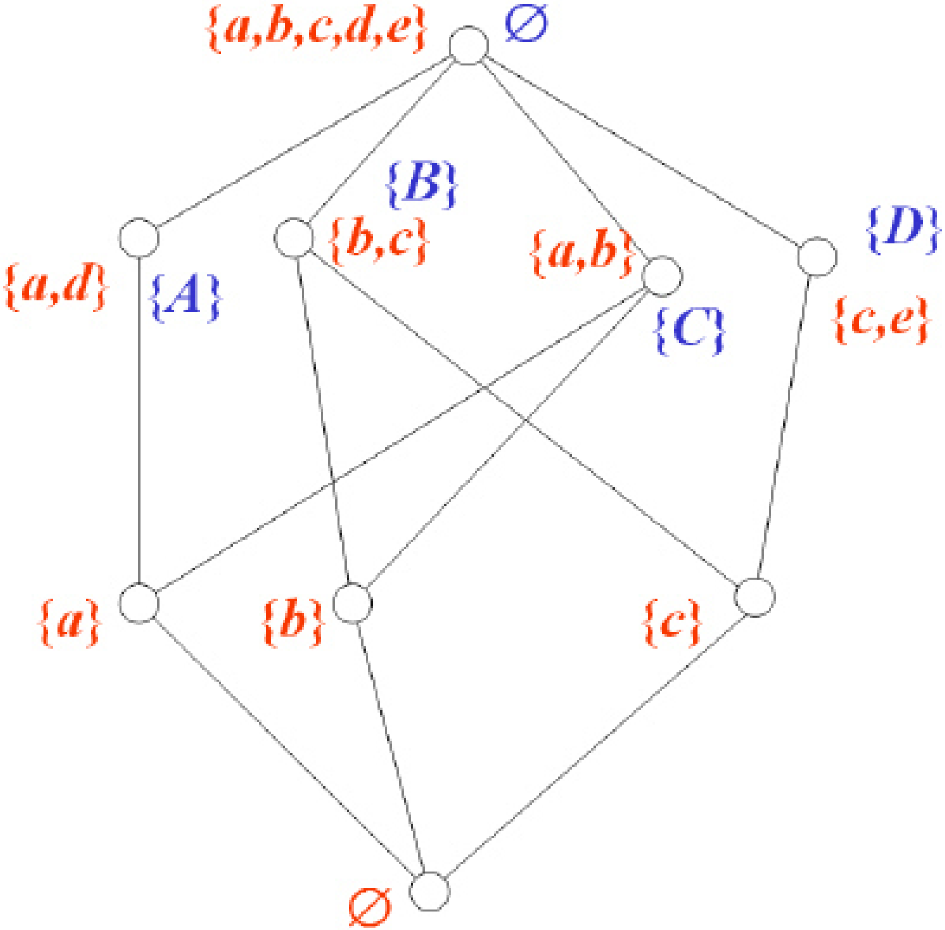
{a,b,c,d,e}
{a,d}
{b,c}
{a,b}
{c,e}
{a}
{b}
{c}
∅

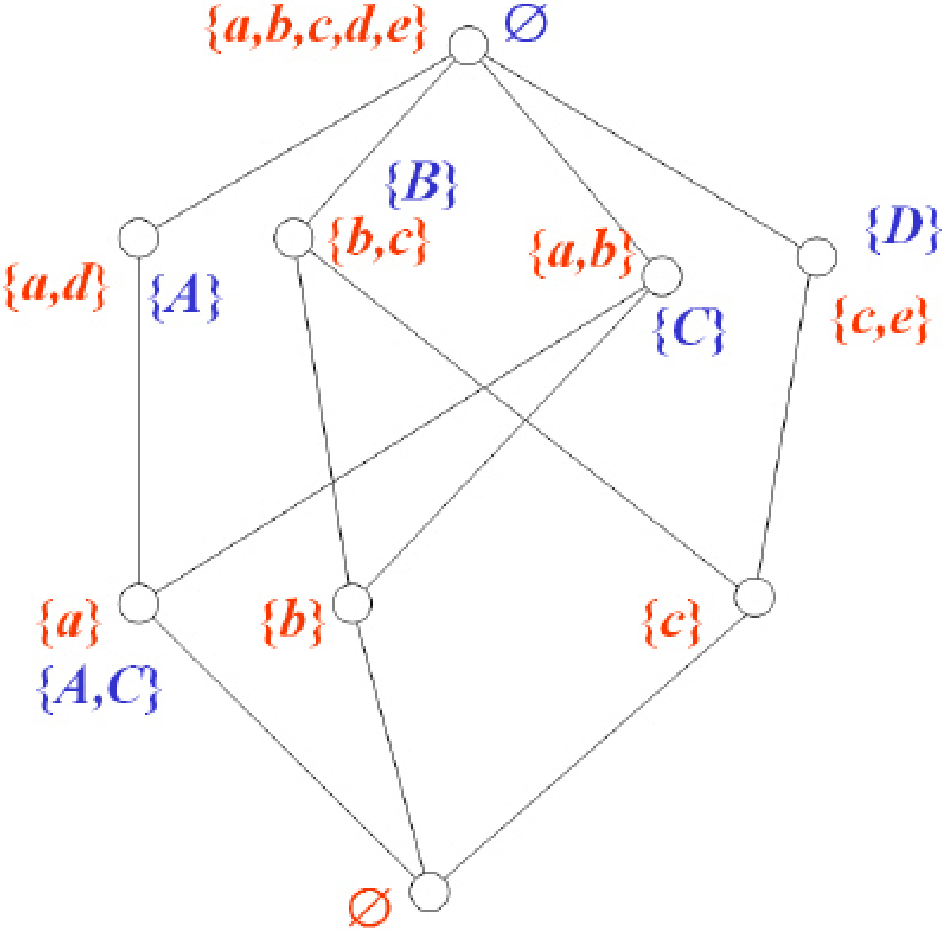

{a,b,c,d,e}
∅
{b,c}
{a,b}
{a,d}
{c,e}
{a}
{b}
{c}
∅

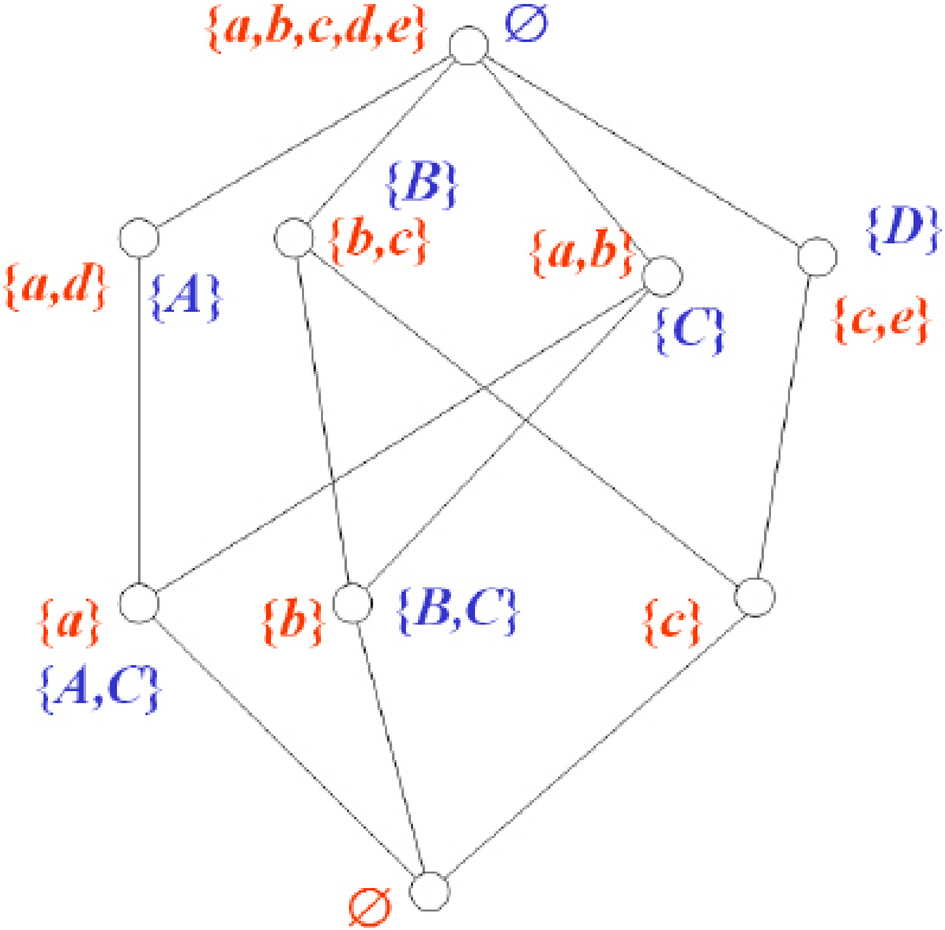

{a,b,c,d,e}
∅
{b,c}
{a,b}
{a,d}
{A}
{c,e}
{a}
{b}
{c}
∅


{a,b,c,d,e}
∅
{B}
{b,c}
{a,b}
{a,d}
{A}
{c,e}
{a}
{b}
{c}
∅

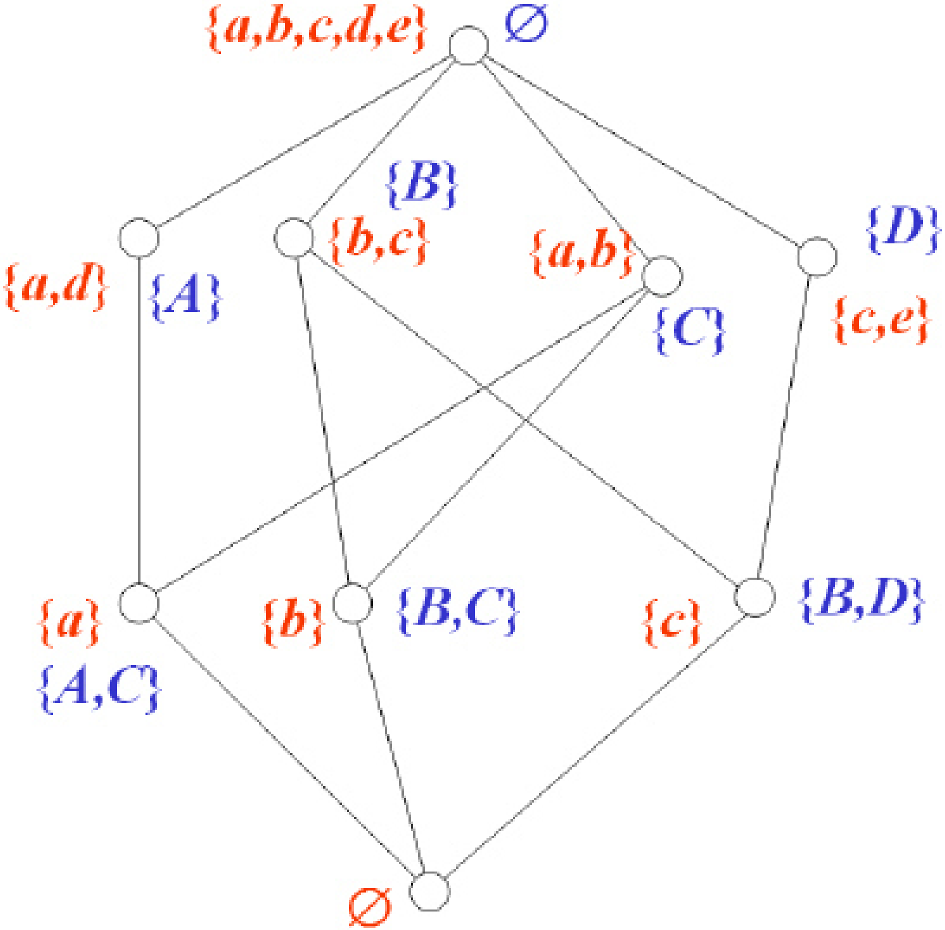

{a,b,c,d,e}
∅
{B}
{b,c}
{a,b}
{a,d}
{A}
{C}
{c,e}
{a}
{b}
{c}
∅


{a,b,c,d,e}
∅
{B}
{b,c}
{a,b}
{D}
{a,d}
{A}
{C}
{c,e}
{a}
{b}
{c}
∅

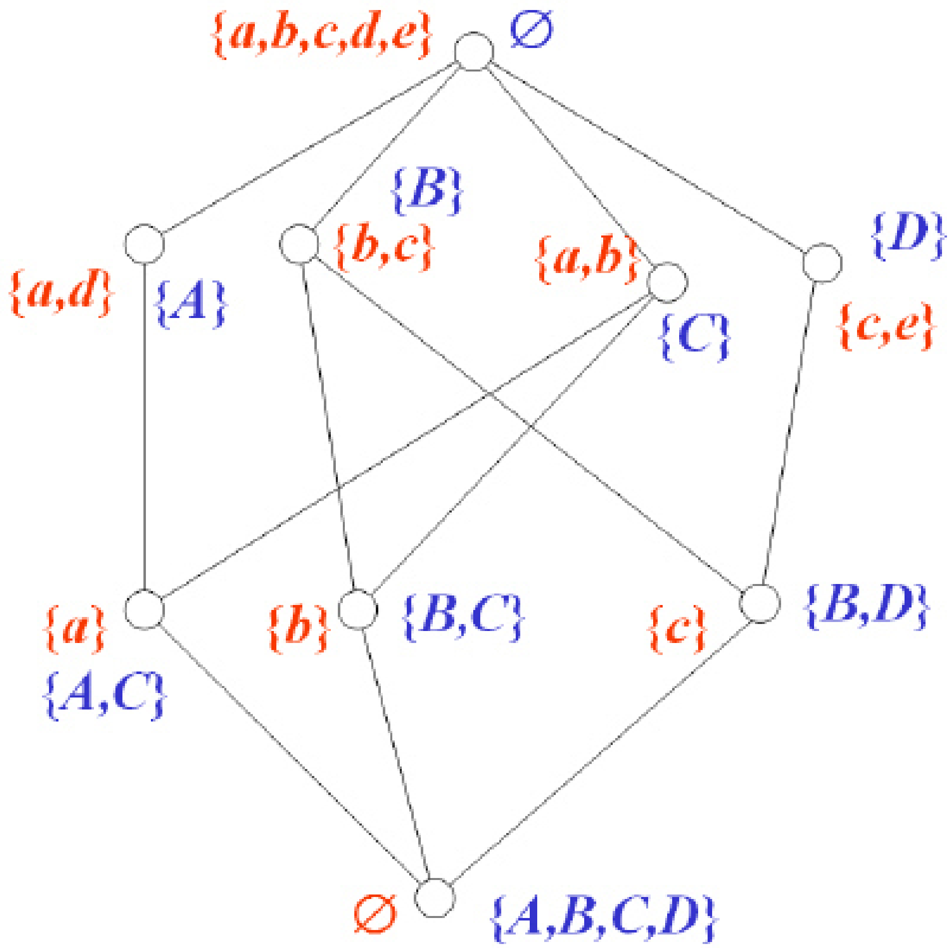

{a,b,c,d,e}
∅
{B}
{b,c}
{a,b}
{D}
{a,d}
{A}
{C}
{c,e}
{a}
{b}
{c}
{A,C}
∅



{a,b,c,d,e}
∅
{B}
{b,c}
{a,b}
{D}
{a,d}
{A}
{C}
{c,e}
{a}
{b}
{B,C}
{c}
{A,C}
∅



{a,b,c,d,e}
∅
{B}
{b,c}
{a,b}
{D}
{a,d}
{A}
{C}
{c,e}
{a}
{b}
{B,C}
{c}
{B,D}
{A,C}
∅


{a,b,c,d,e}
∅
{B}
{D}
{b,c}
{a,b}
{a,d}
{A}
{C}
{c,e}
{a}
{b}
{B,C}
{c}
{B,D}
{A,C}
∅
{A,B,C,D}

$\{a,b,c,d,e\}$	$\varnothing$
$\{a,d\}$	$\{A\}$
$\{b,c\}$	$\{B\}$
$\{a,b\}$	$\{C\}$
$\{c,e\}$	$\{D\}$
$\{a\}$	$\{A,C\}$
$\{b\}$	$\{B,C\}$
$\{c\}$	$\{B,D\}$
$\varnothing$	$\{A,B,C,D\}$

$\{a,b,c,d,e\}$	$\varnothing$
$\{a,d\}$	$\{A\}$
$\{b,c\}$	$\{B\}$
$\{a,b\}$	$\{C\}$
$\{c,e\}$	$\{D\}$
$\{a\}$	$\{A,C\}$
$\{b\}$	$\{B,C\}$
$\{c\}$	$\{B,D\}$
$\varnothing$	$\{A,B,C,D\}$

$\{a,b,c,d,e\}$	$\varnothing$
$\{a,d\}$	$\{A\}$
$\{b,c\}$	$\{B\}$
$\{a,b\}$	$\{C\}$
$\{c,e\}$	$\{D\}$
$\{a\}$	$\{A,C\}$
$\{b\}$	$\{B,C\}$
$\{c\}$	$\{B,D\}$
$\varnothing$	$\{A,B,C,D\}$

A					
B					
C					
D					

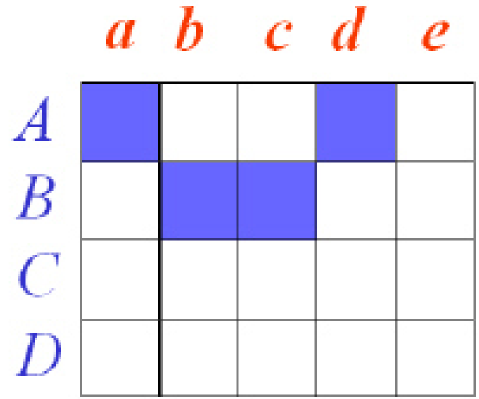
$\{a,b,c,d,e\}$	$\varnothing$
$\{a,d\}$	$\{A\}$
$\{b,c\}$	$\{B\}$
$\{a,b\}$	$\{C\}$
$\{c,e\}$	$\{D\}$
$\{a\}$	$\{A,C\}$
$\{b\}$	$\{B,C\}$
$\{c\}$	$\{B,D\}$
$\varnothing$	$\{A,B,C,D\}$

	a	b	c	d	e
A					
B					
C					
D					

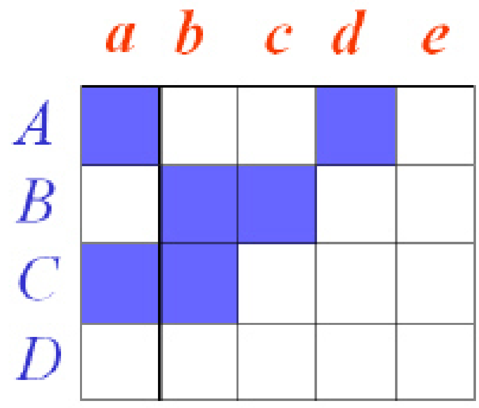
$\{a,b,c,d,e\}$	$\varnothing$
$\{a,d\}$	$\{A\}$
$\{b,c\}$	$\{B\}$
$\{a,b\}$	$\{C\}$
$\{c,e\}$	$\{D\}$
$\{a\}$	$\{A,C\}$
$\{b\}$	$\{B,C\}$
$\{c\}$	$\{B,D\}$
$\varnothing$	$\{A,B,C,D\}$

	a	b	c	d	e
A					
B					
C					
D					

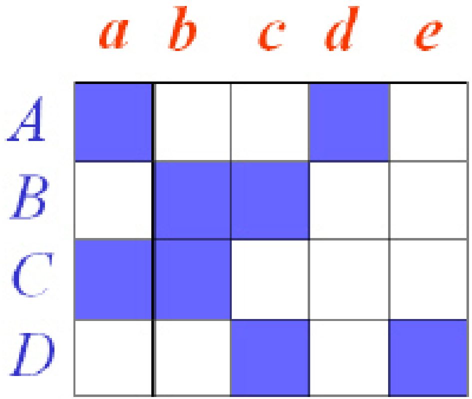
$\{a,b,c,d,e\}$	$\varnothing$
$\{a,d\}$	$\{A\}$
$\{b,c\}$	$\{B\}$
$\{a,b\}$	$\{C\}$
$\{c,e\}$	$\{D\}$
$\{a\}$	$\{A,C\}$
$\{b\}$	$\{B,C\}$
$\{c\}$	$\{B,D\}$
$\varnothing$	$\{A,B,C,D\}$



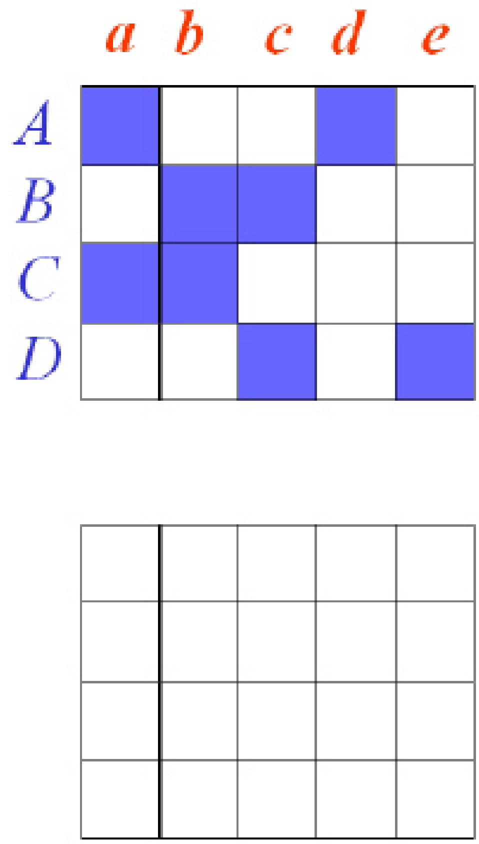
$\{a,b,c,d,e\}$	$\emptyset$
$\{a,d\}$	$\{A\}$
$\{b,c\}$	$\{B\}$
$\{a,b\}$	$\{C\}$
$\{c,e\}$	$\{D\}$
$\{a\}$	$\{A,C\}$
$\{b\}$	$\{B,C\}$
$\{c\}$	$\{B,D\}$
$\emptyset$	$\{A,B,C,D\}$



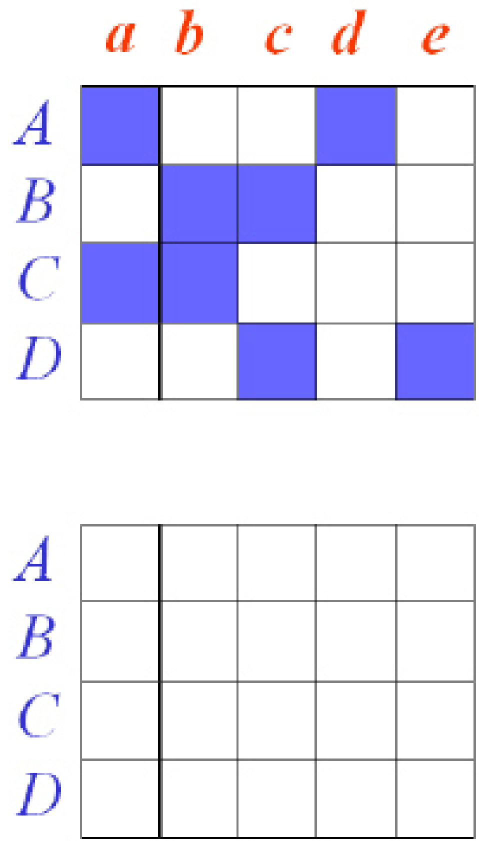
$\{a,b,c,d,e\}$	$\varnothing$
$\{a,d\}$	$\{A\}$
$\{b,c\}$	$\{B\}$
$\{a,b\}$	$\{C\}$
$\{c,e\}$	$\{D\}$
$\{a\}$	$\{A,C\}$
$\{b\}$	$\{B,C\}$
$\{c\}$	$\{B,D\}$
$\varnothing$	$\{A,B,C,D\}$



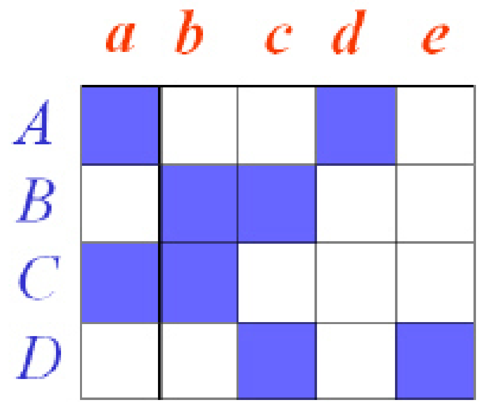
$\{a,b,c,d,e\}$	$\varnothing$
$\{a,d\}$	$\{A\}$
$\{b,c\}$	$\{B\}$
$\{a,b\}$	$\{C\}$
$\{c,e\}$	$\{D\}$
$\{a\}$	$\{A,C\}$
$\{b\}$	$\{B,C\}$
$\{c\}$	$\{B,D\}$
$\varnothing$	$\{A,B,C,D\}$

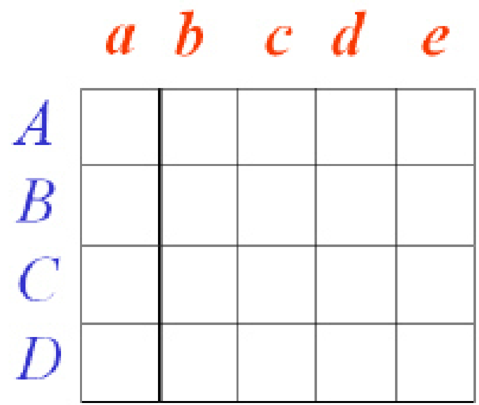


$\{a,b,c,d,e\}$	$\varnothing$
$\{a,d\}$	$\{A\}$
$\{b,c\}$	$\{B\}$
$\{a,b\}$	$\{C\}$
$\{c,e\}$	$\{D\}$
$\{a\}$	$\{A,C\}$
$\{b\}$	$\{B,C\}$
$\{c\}$	$\{B,D\}$
$\varnothing$	$\{A,B,C,D\}$

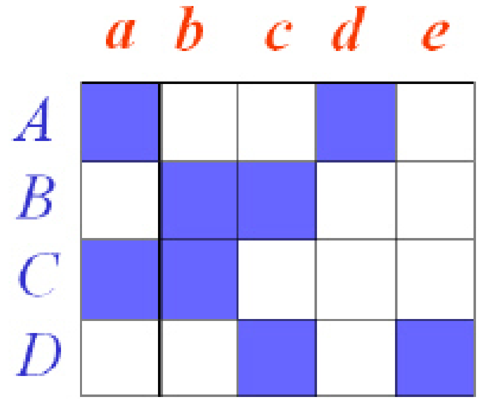


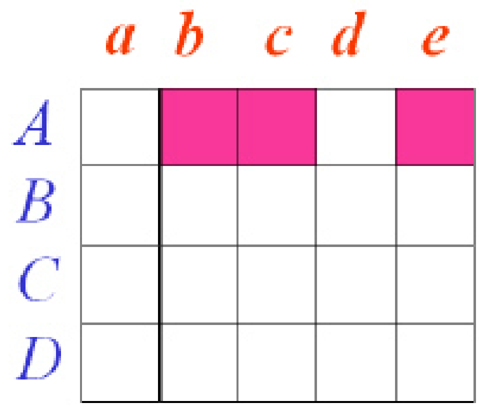
$\{a,b,c,d,e\}$	$\varnothing$
$\{a,d\}$	$\{A\}$
$\{b,c\}$	$\{B\}$
$\{a,b\}$	$\{C\}$
$\{c,e\}$	$\{D\}$
$\{a\}$	$\{A,C\}$
$\{b\}$	$\{B,C\}$
$\{c\}$	$\{B,D\}$
$\varnothing$	$\{A,B,C,D\}$



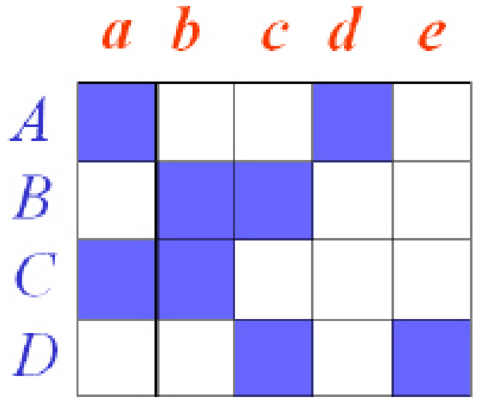


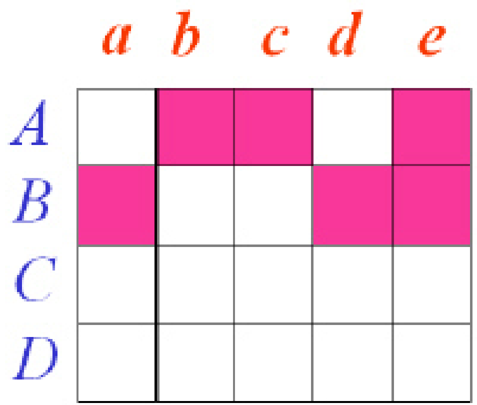
$\{a,b,c,d,e\}$	$\varnothing$
$\{a,d\}$	$\{A\}$
$\{b,c\}$	$\{B\}$
$\{a,b\}$	$\{C\}$
$\{c,e\}$	$\{D\}$
$\{a\}$	$\{A,C\}$
$\{b\}$	$\{B,C\}$
$\{c\}$	$\{B,D\}$
$\varnothing$	$\{A,B,C,D\}$



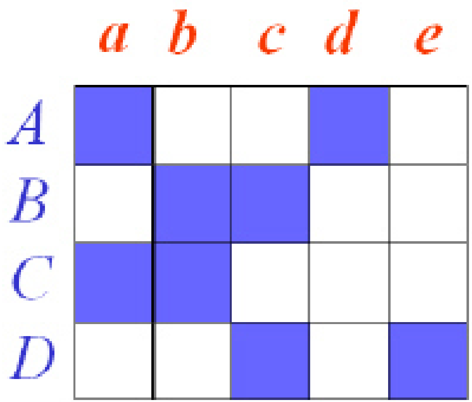


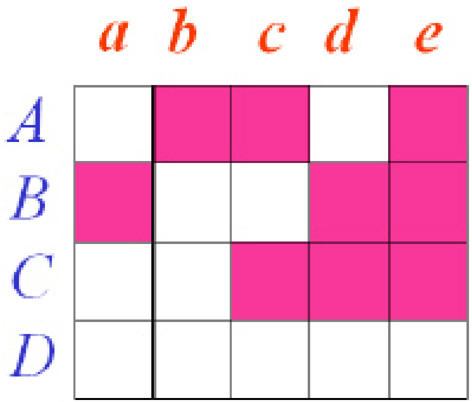
$\{a,b,c,d,e\}$	$\varnothing$
$\{a,d\}$	$\{A\}$
$\{b,c\}$	$\{B\}$
$\{a,b\}$	$\{C\}$
$\{c,e\}$	$\{D\}$
$\{a\}$	$\{A,C\}$
$\{b\}$	$\{B,C\}$
$\{c\}$	$\{B,D\}$
$\varnothing$	$\{A,B,C,D\}$



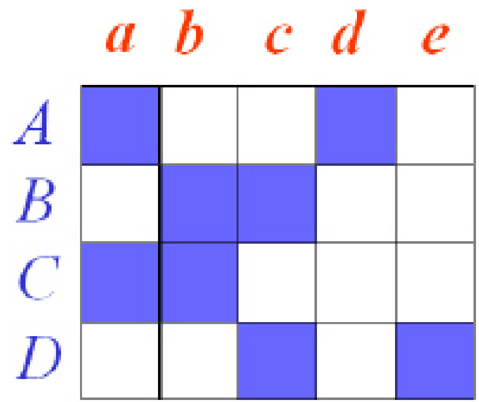


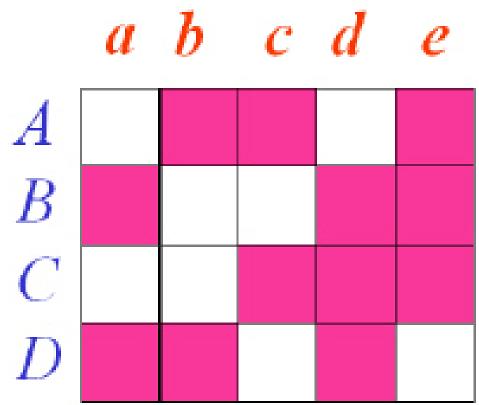
$\{a,b,c,d,e\}$	$\varnothing$
$\{a,d\}$	$\{A\}$
$\{b,c\}$	$\{B\}$
$\{a,b\}$	$\{C\}$
$\{c,e\}$	$\{D\}$
$\{a\}$	$\{A,C\}$
$\{b\}$	$\{B,C\}$
$\{c\}$	$\{B,D\}$
$\varnothing$	$\{A,B,C,D\}$

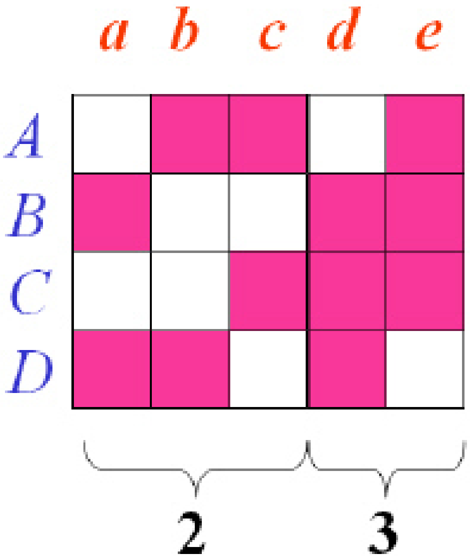


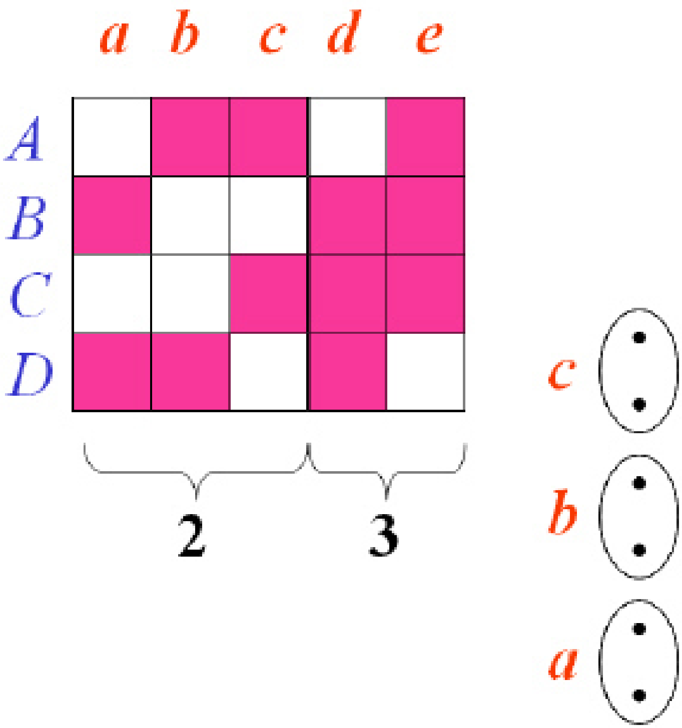


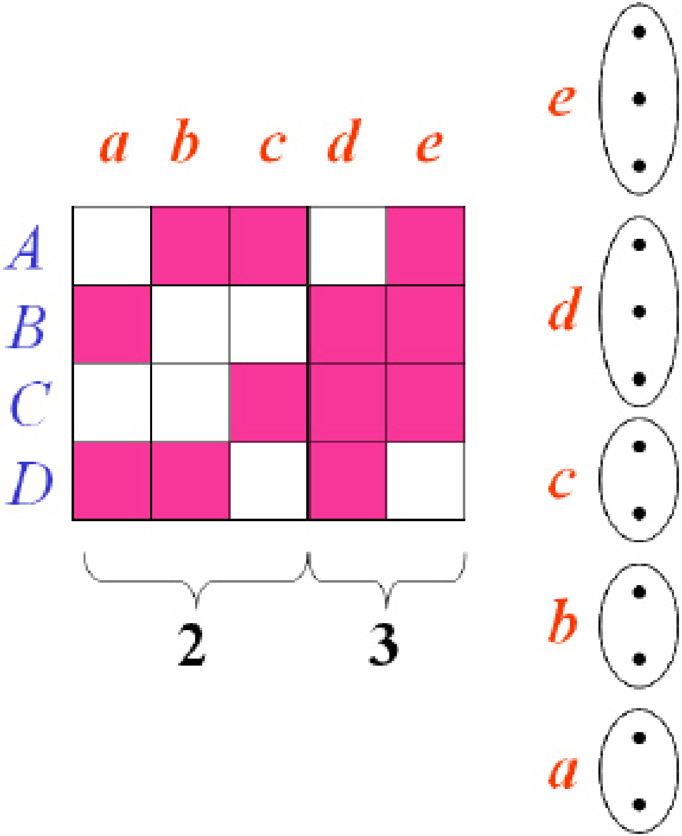
$\{a,b,c,d,e\}$	$\varnothing$
$\{a,d\}$	$\{A\}$
$\{b,c\}$	$\{B\}$
$\{a,b\}$	$\{C\}$
$\{c,e\}$	$\{D\}$
$\{a\}$	$\{A,C\}$
$\{b\}$	$\{B,C\}$
$\{c\}$	$\{B,D\}$
$\varnothing$	$\{A,B,C,D\}$

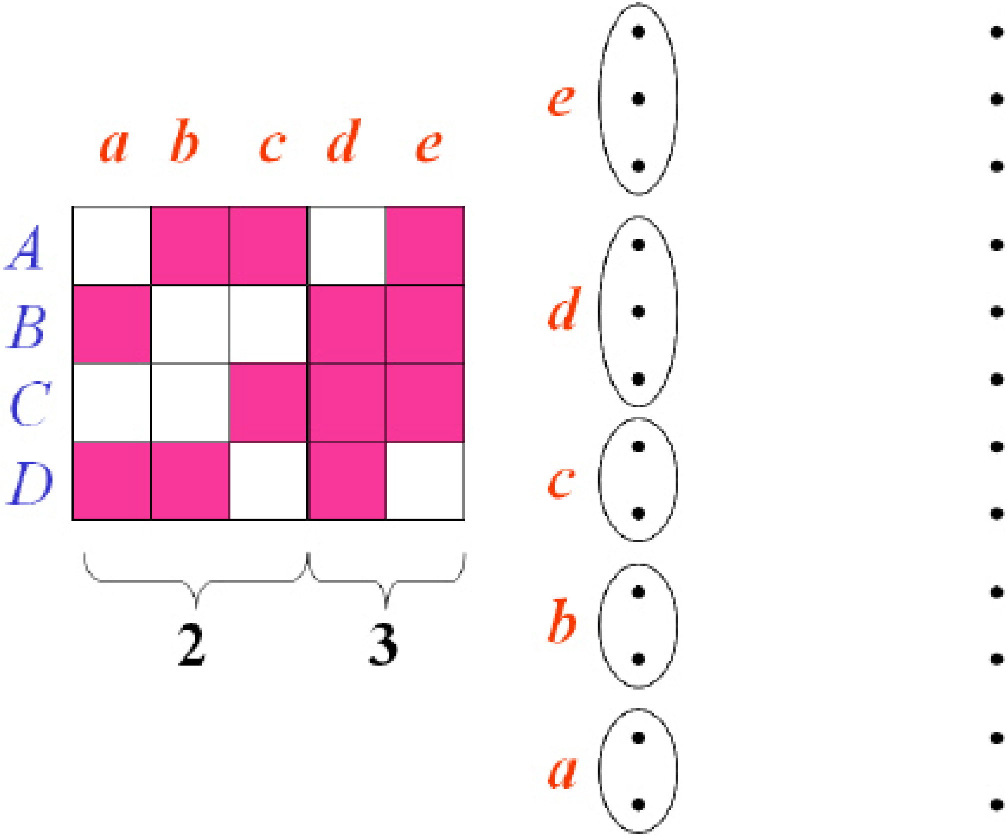


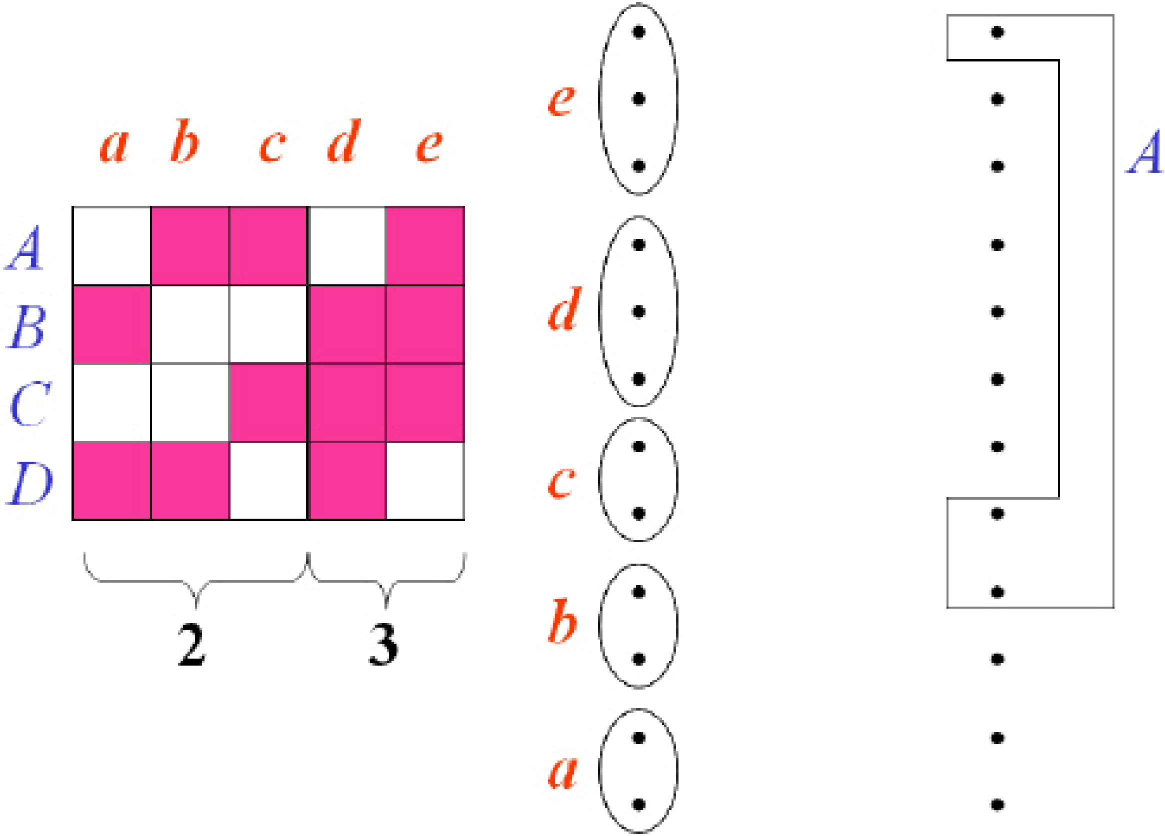


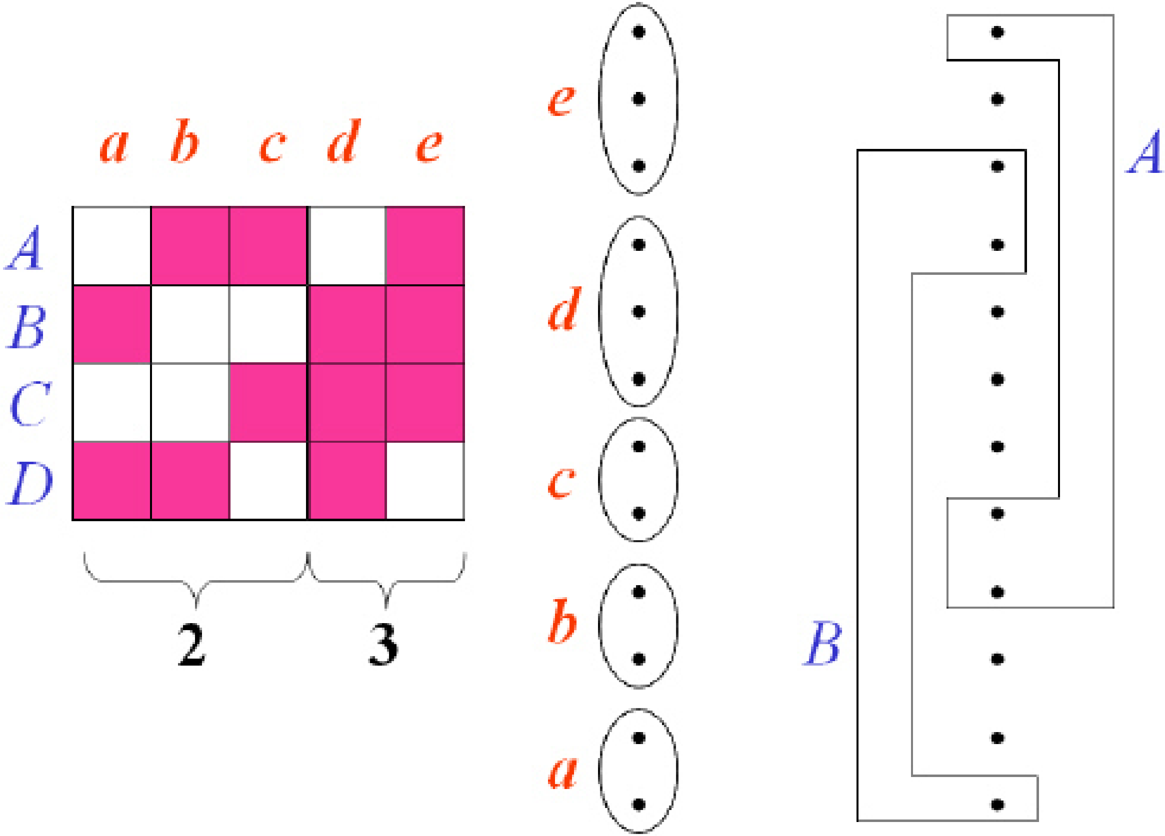

a b c d e
A
B
C
D
2
3


a b c d e
A
B
C
D
2
3
c
b
a

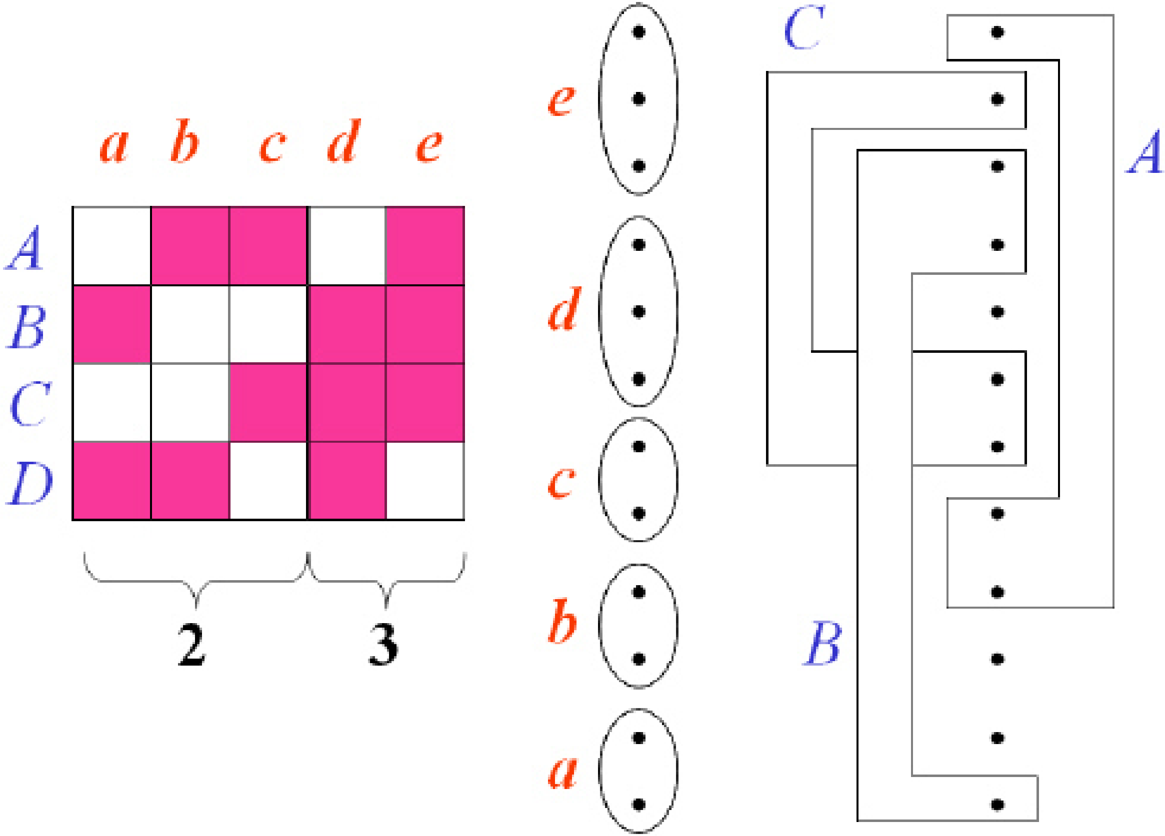

a b c d e
A
B
C
D
2
3
e
d
c
b
a


a b c d e
A
B
C
D
2
3
e
d
c
b
a

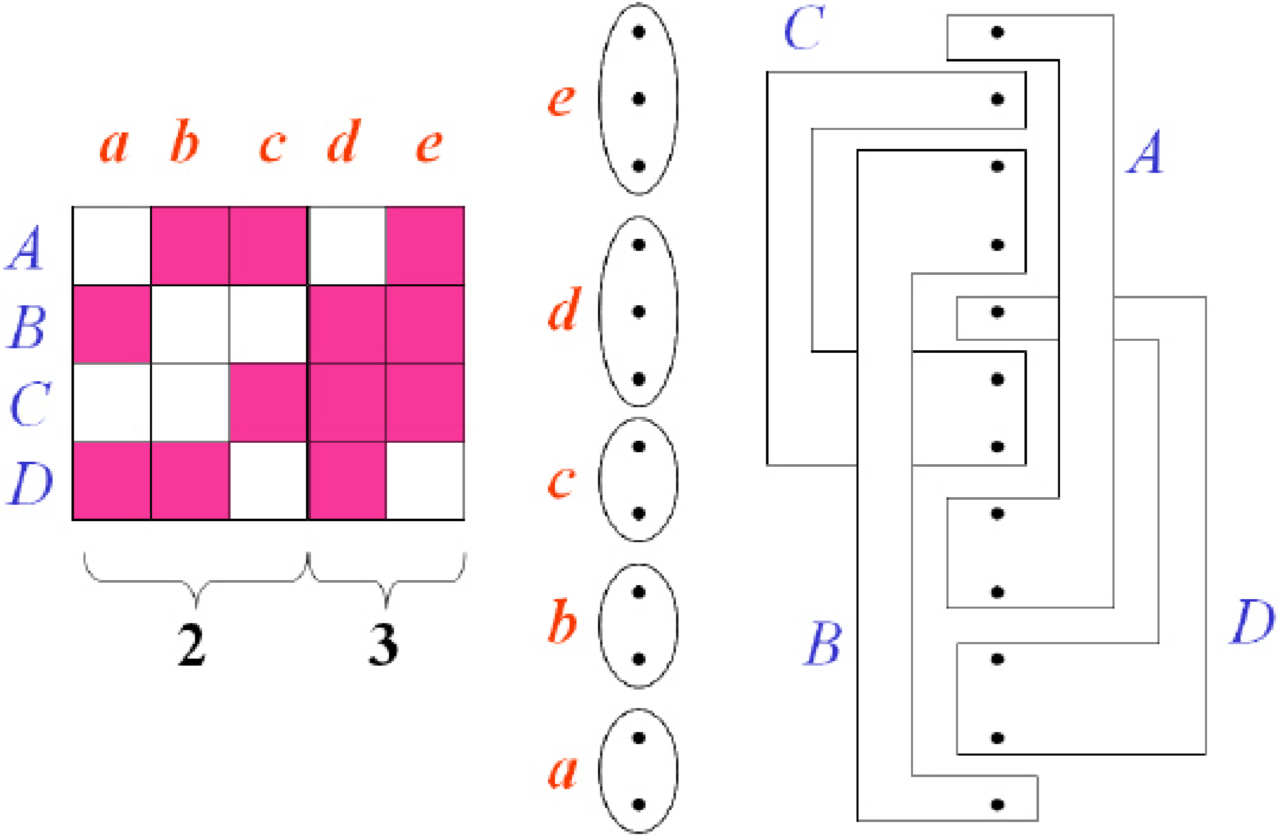

a b c d e
A
B
C
D
2
3
e
d
c
b
a
A

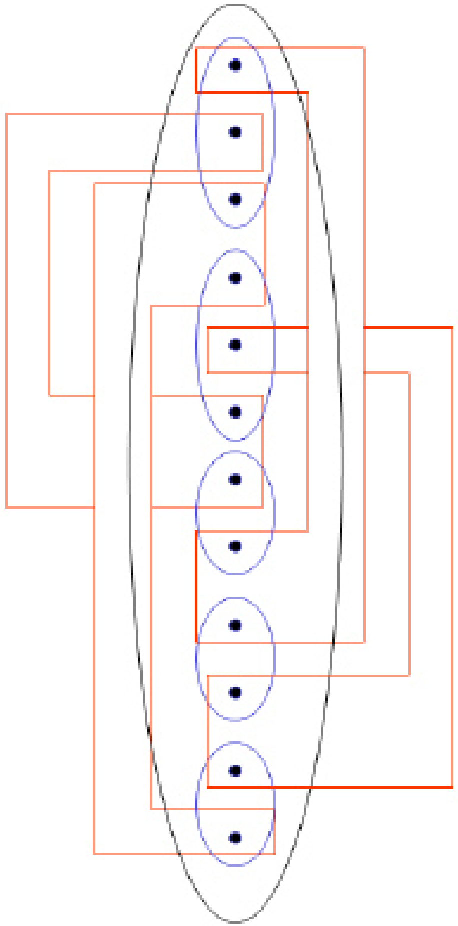


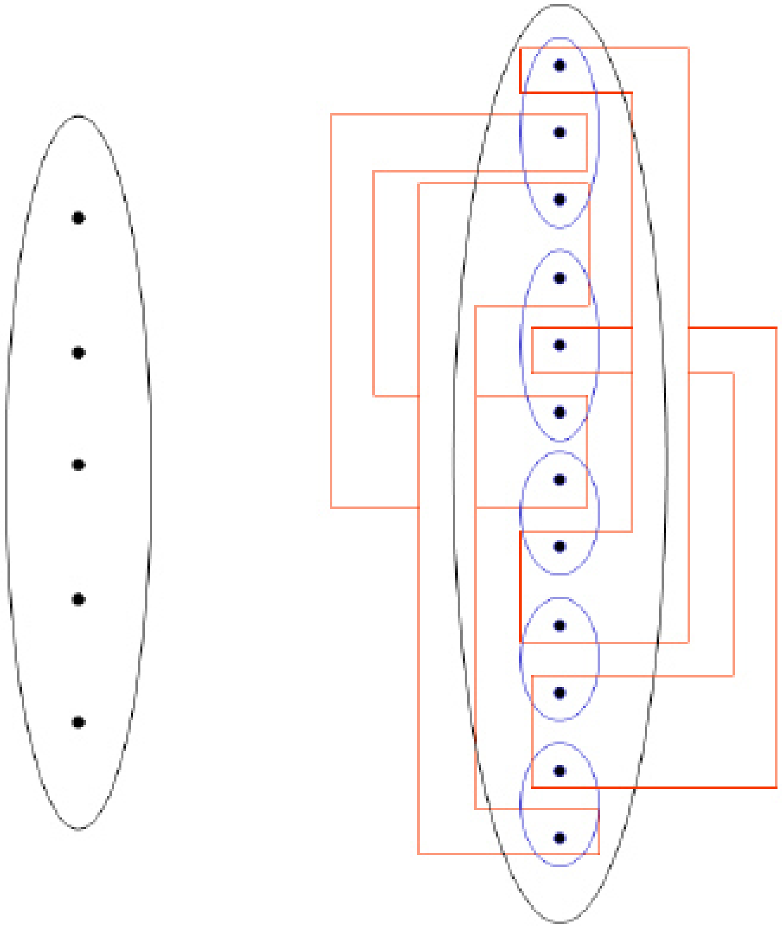
a b c d e
A
B
C
D
2
3
e
d
c
b
a
A
B

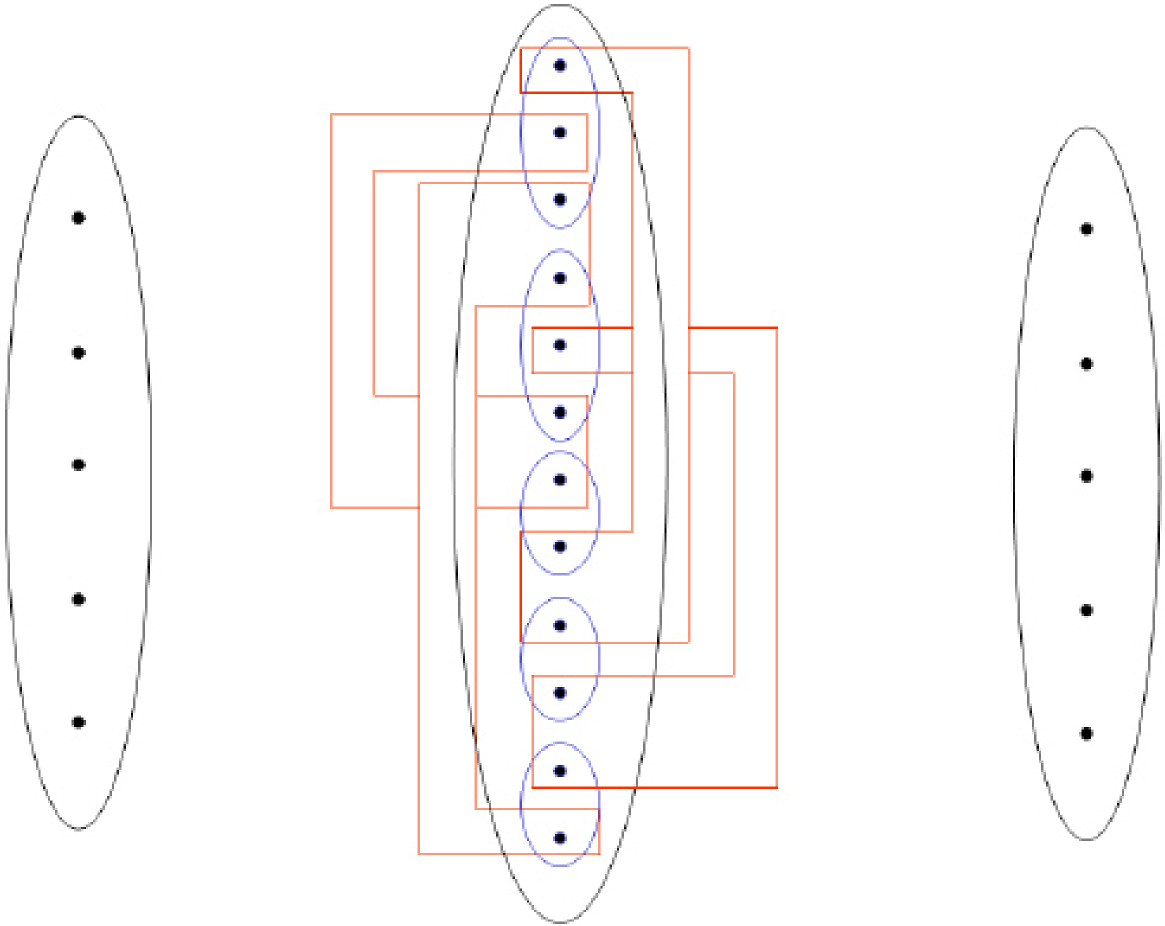


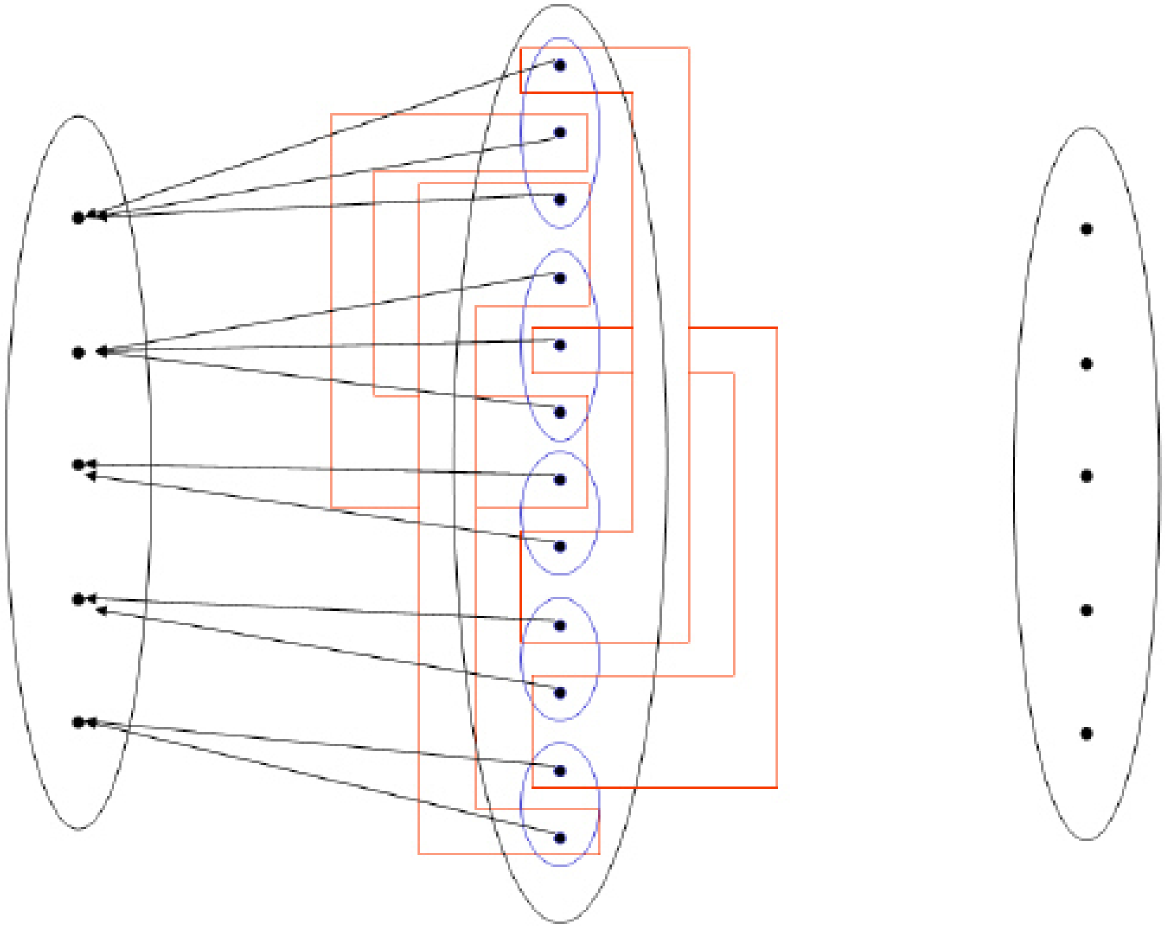
a b c d e
A
B
C
D
2
3
e
d
c
b
a
C
A
B

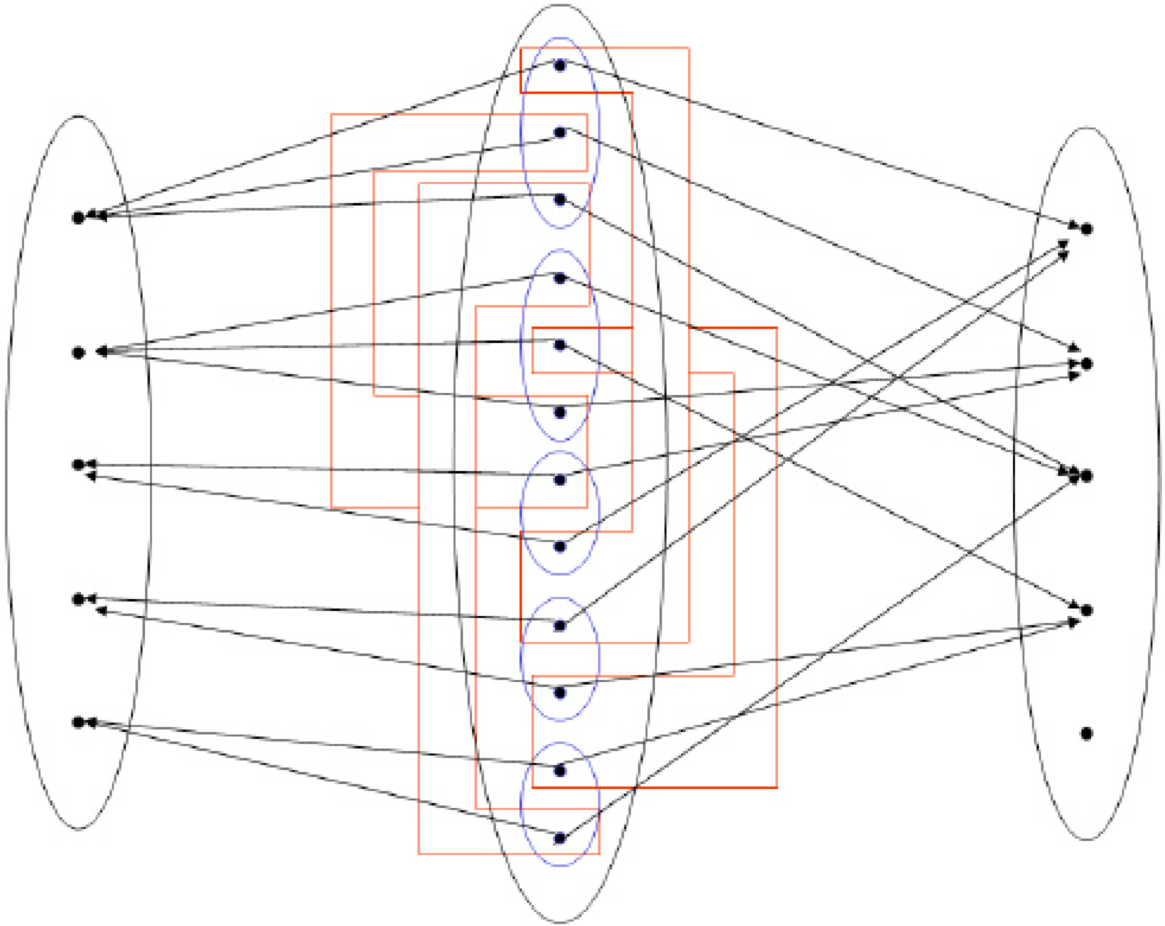

a b c d e
A
B
C
D
2
3
e
d
c
b
a
C
A
B
D

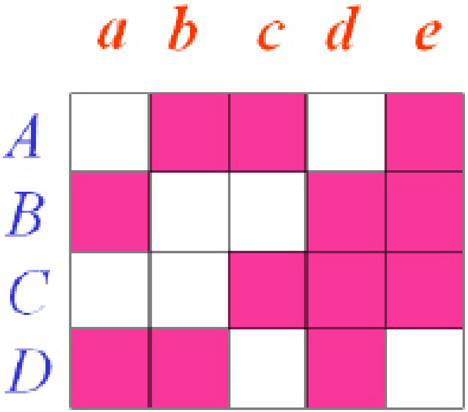












$A \rightarrow bce \rightarrow A$

$B \rightarrow ade \rightarrow B$

$C \rightarrow cde \rightarrow C$

$D \rightarrow abd \rightarrow D$

$AB \rightarrow abcde \rightarrow !$

$AC \rightarrow bcde \rightarrow AC$

$AD \rightarrow abcde \rightarrow !$

$BC \rightarrow acde \rightarrow BC$

$BD \rightarrow abde \rightarrow BD$

$CD \rightarrow abcde \rightarrow !$

$\varnothing$

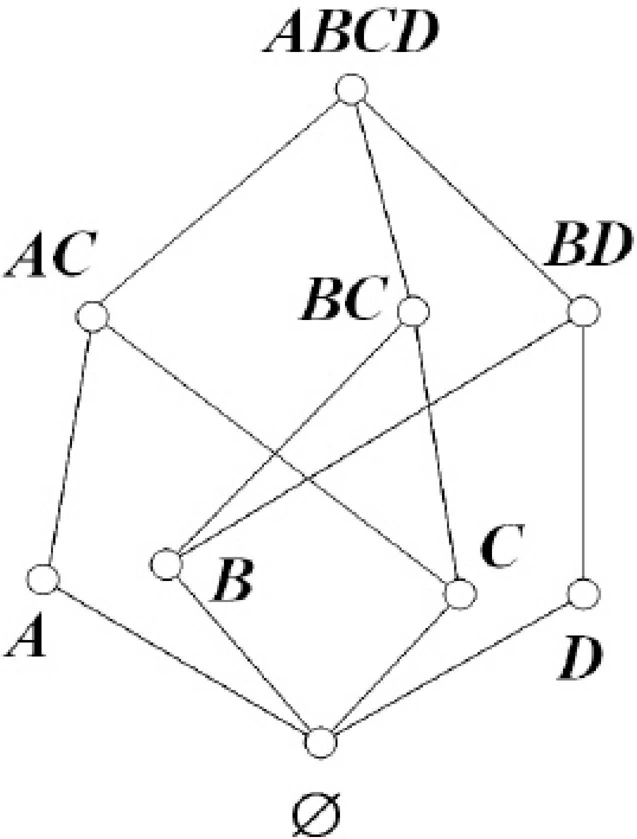
$ABCD$

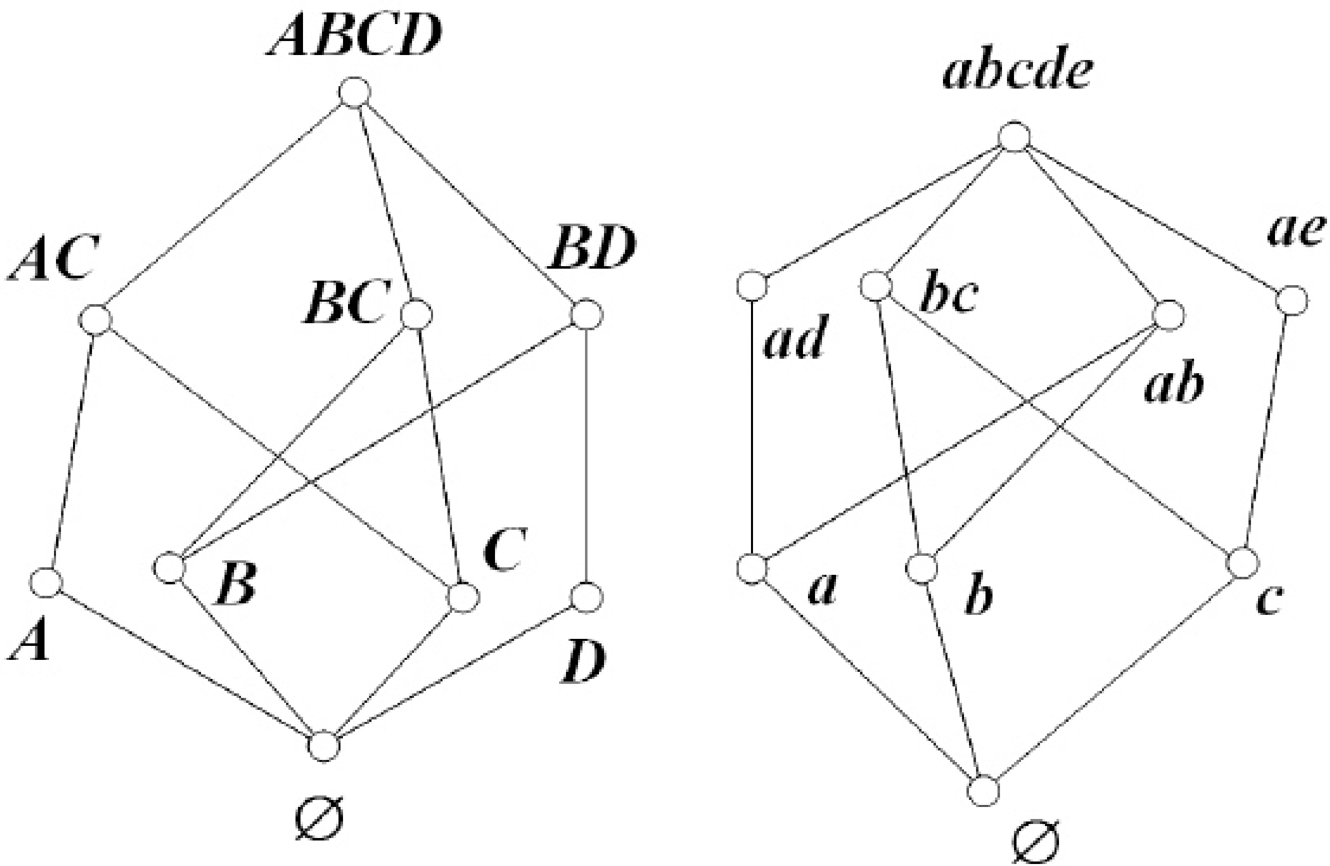
$BCD \rightarrow abcde \rightarrow !$

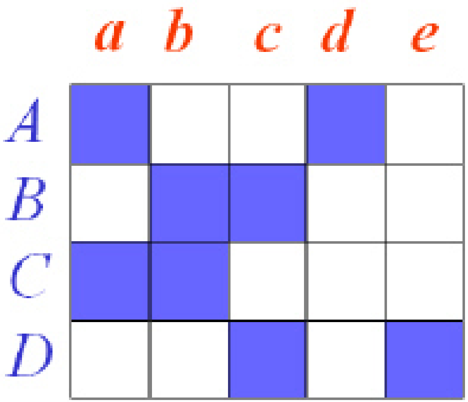
$ACD \rightarrow abcde \rightarrow !$

$ABD \rightarrow abcde \rightarrow !$

$ABC \rightarrow abcde \rightarrow !$


ABCD
AC
BC
BD
A
B
C
D
∅


ABCD
AC
BC
BD
A
B
C
D
∅
abcde
ad
bc
ab
ae
a
b
c
∅



$A \rightarrow ad \rightarrow A$

$B \rightarrow bc \rightarrow B$

$C \rightarrow ab \rightarrow A$

$D \rightarrow ce \rightarrow D$

$AB \rightarrow abcd \rightarrow ABC$

$AC \rightarrow abd \rightarrow AC$

$AD \rightarrow acde \rightarrow AD$

$BC \rightarrow abc \rightarrow BC$

$BD \rightarrow bcde \rightarrow BD$

$\varnothing$

$CD \rightarrow abce \rightarrow BCD$

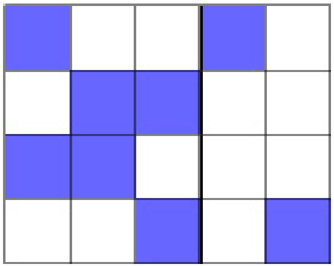
$ABCD$

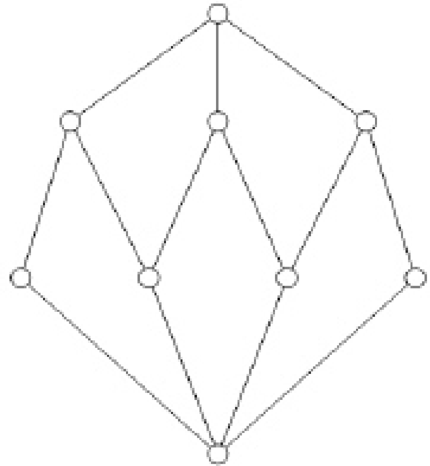
$BCD \rightarrow abce \rightarrow BCD$

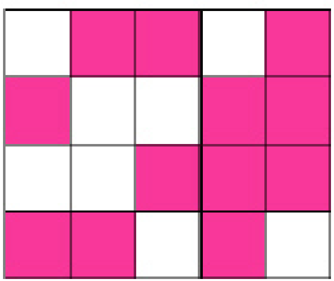
$ACD \rightarrow abcde \rightarrow !$

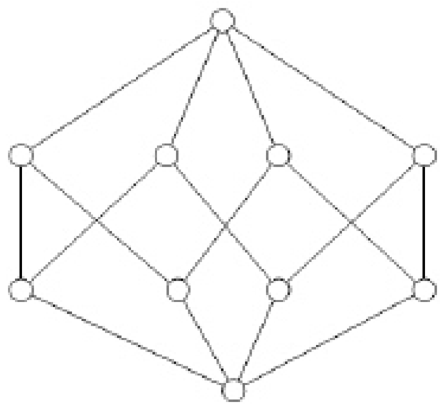
$ABD \rightarrow abcde \rightarrow !$

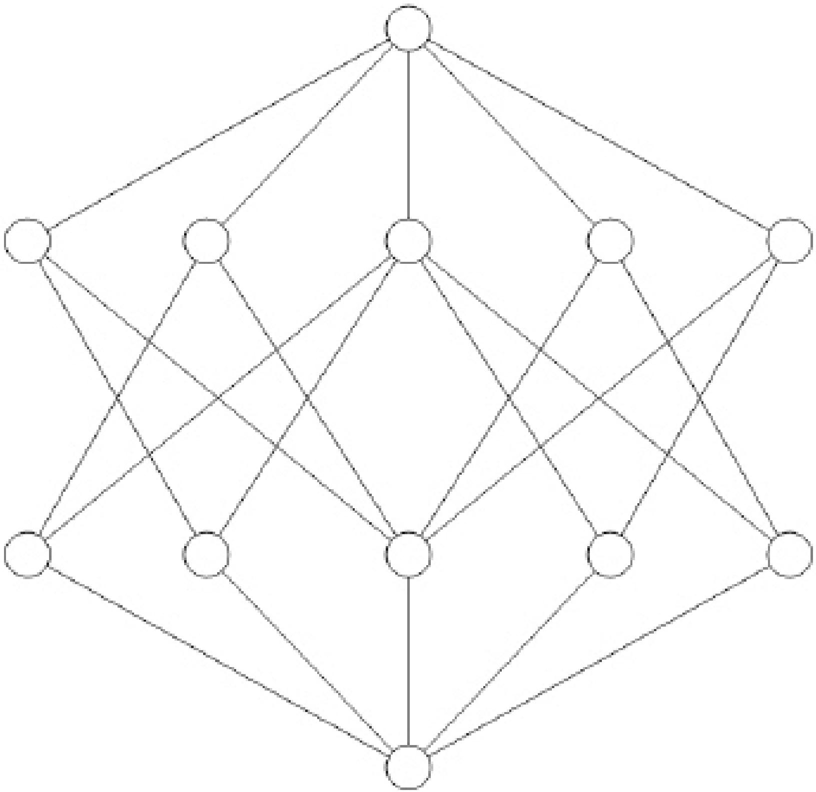
$ABC \rightarrow abcd \rightarrow ABC$

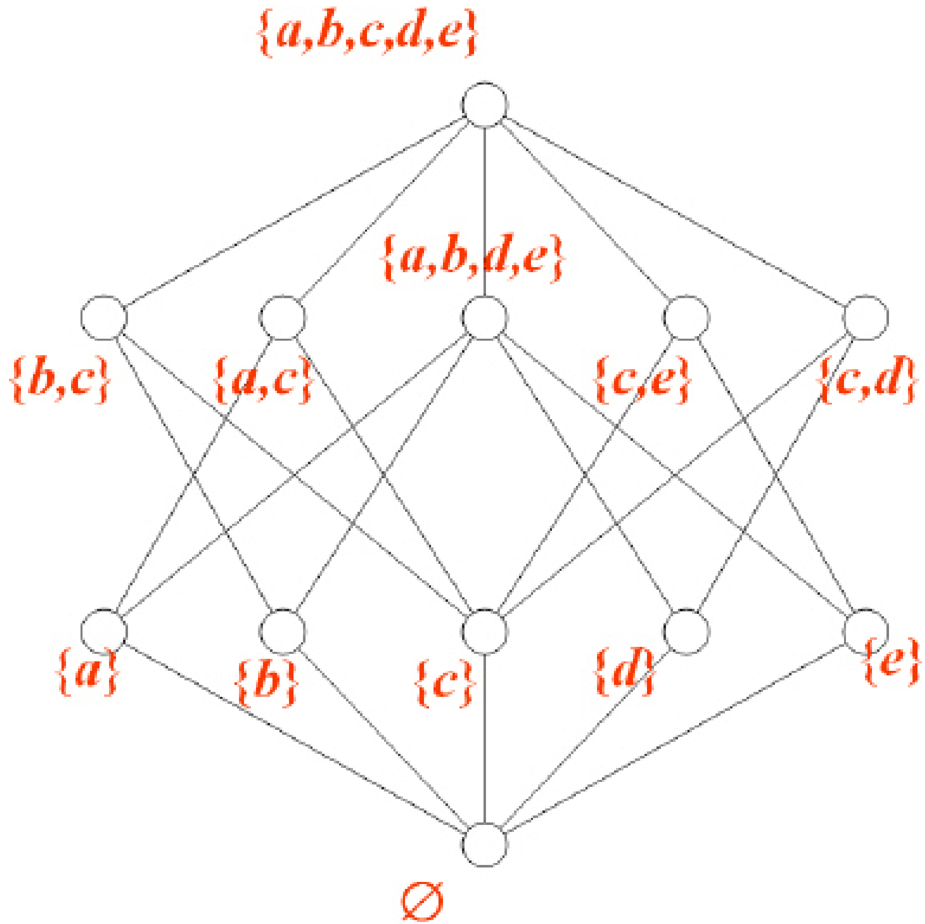


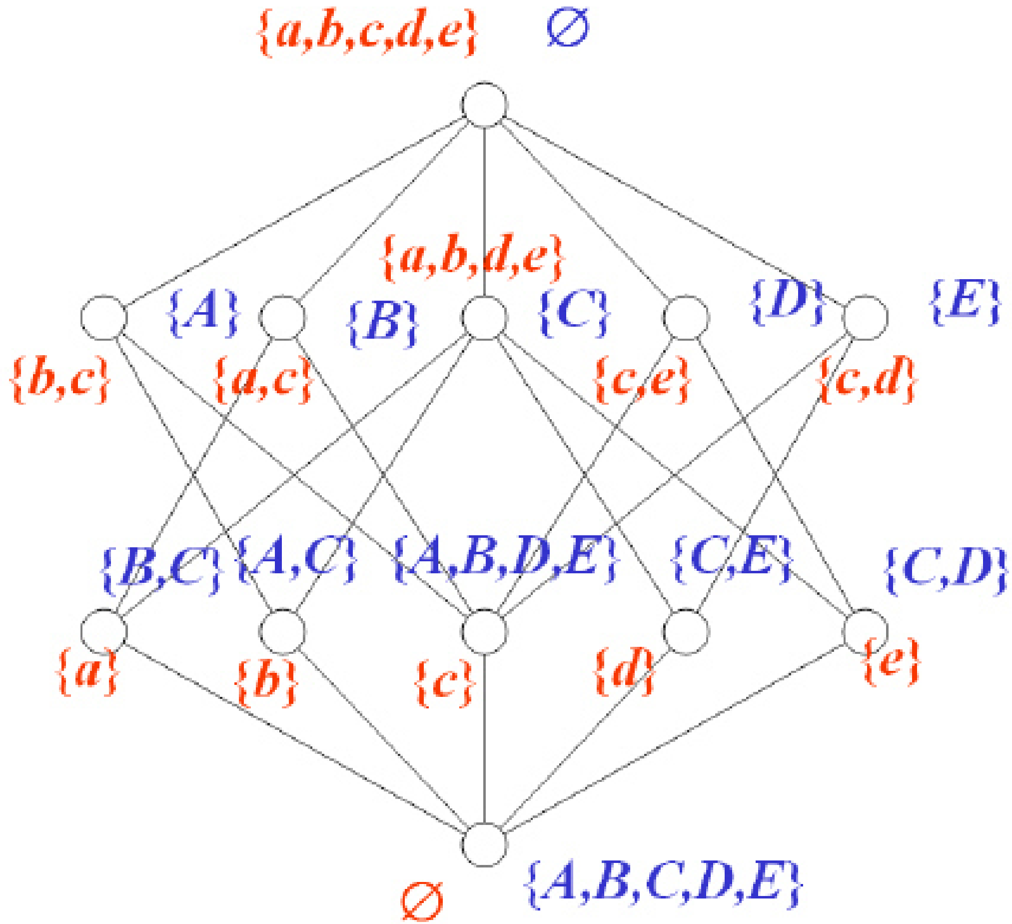




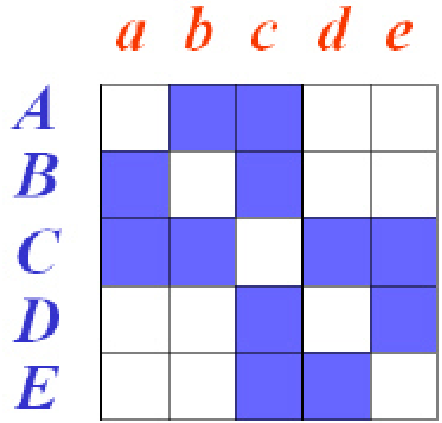


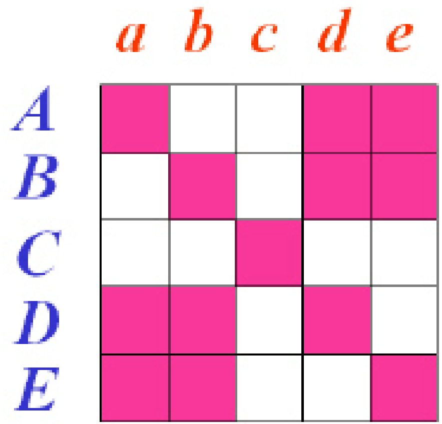


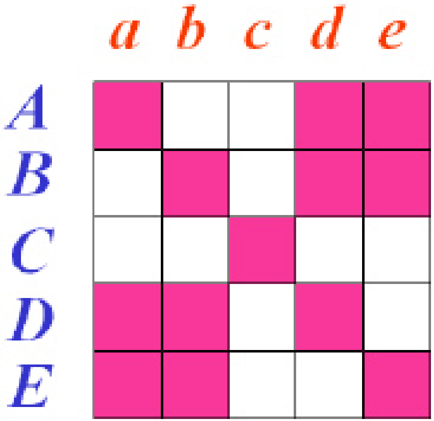

{a,b,c,d,e}
{a,b,d,e}
{b,c}
{a,c}
{c,e}
{c,d}
{a}
{b}
{c}
{d}
{e}
∅


{a,b,c,d,e}
∅
{a,b,d,e}
{A}
{B}
{C}
{D}
{E}
{b,c}
{a,c}
{c,e}
{c,d}
{B,C}
{A,C}
{A,B,D,E}
{C,E}
{C,D}
{a}
{b}
{c}
{d}
{e}
∅
{A,B,C,D,E}

$\{a,b,c,d,e\}$	$\varnothing$
$\{b,c\}$	$\{A\}$
$\{a,c\}$	$\{B\}$
$\{a,b,d,e\}$	$\{C\}$
$\{c,e\}$	$\{D\}$
$\{c,d\}$	$\{E\}$
$\{a\}$	$\{B,C\}$
$\{b\}$	$\{A,C\}$
$\{e\}$	$\{C,D\}$
$\{d\}$	$\{C,E\}$
$\{c\}$	$\{A,B,D,E\}$
$\varnothing$	$\{A,B,C,D,E\}$







$A \to ade \to A$

$B \to bde \to B$

C

D

E

$AB \to abde \to ABDE$

$AC \to acde \to AC$

$AD \to abde \to !$

$AE \to abde \to !$

$BC \to bcde \to BC$

$BD \to abde \to !$

$BE \to abde \to !$

$CD \to abcd \to CD$

$CE \to abce \to CE$

$DE \to abde \to !$

$ABC \to abcde \to !$

$ABD \to abde \to ABDE$

$ABE \to abde \to !$

$BCD \to !$

$BCE \to !$

$BDE \to abde \to !$

$CDE \to !$

$ACD \to !$

$ACE \to !$

$ADE \to abde \to !$

$ABCD \to abcde \to !$

$ABCE \to abcde \to !$

$ABDE \to abde \to ABDE$

$ACDE \to abcde \to !$

$BCDE \to abcde \to !$

$\varnothing$

$ABCDE$

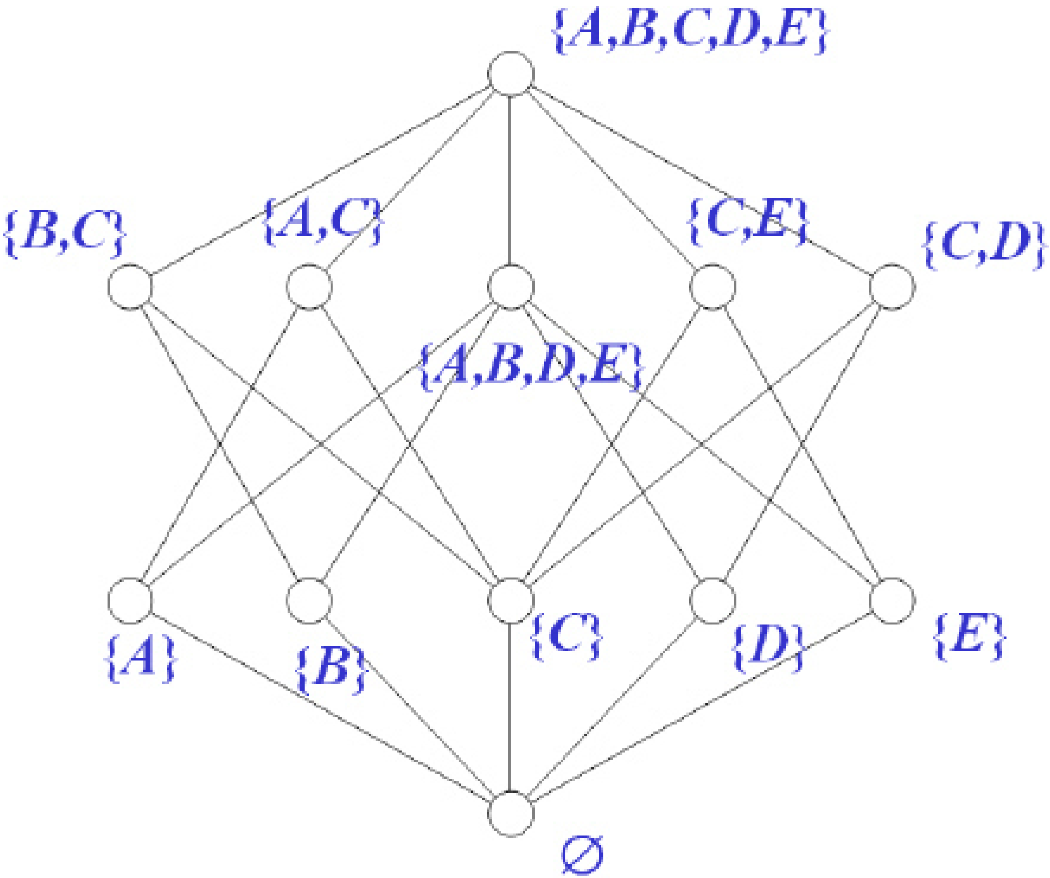
$\{A,B,C,D,E\}$

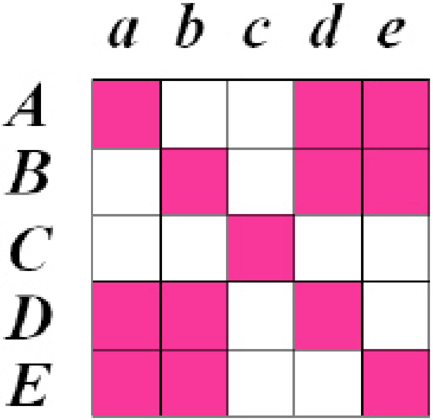
$\{B,C\}$ $\{A,C\}$ $\{C,E\}$ $\{C,D\}$

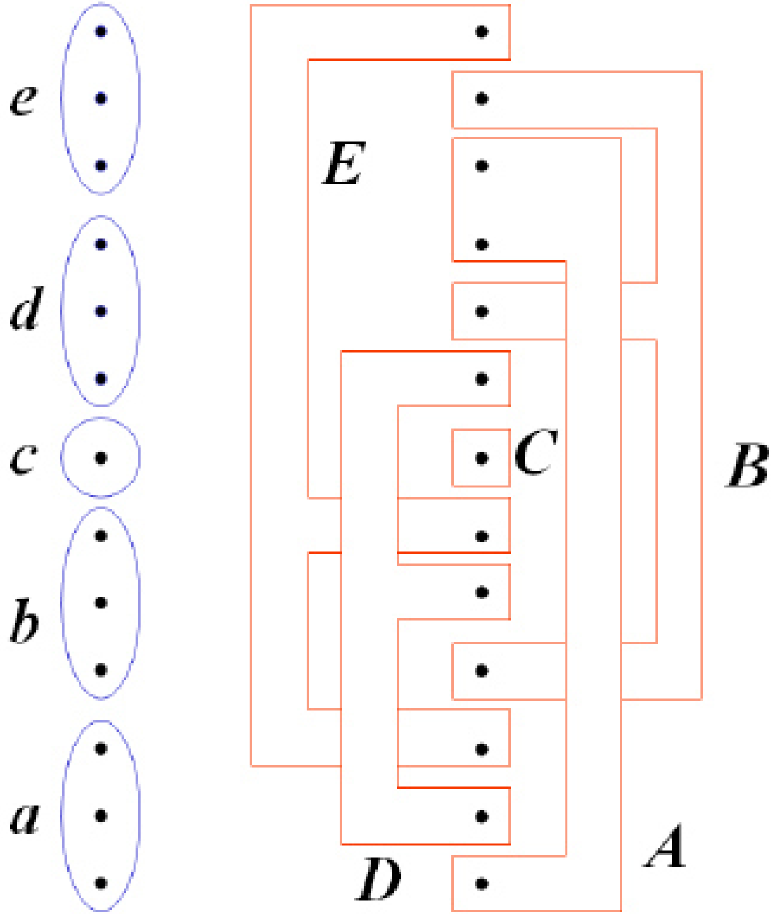
$\{A,B,D,E\}$

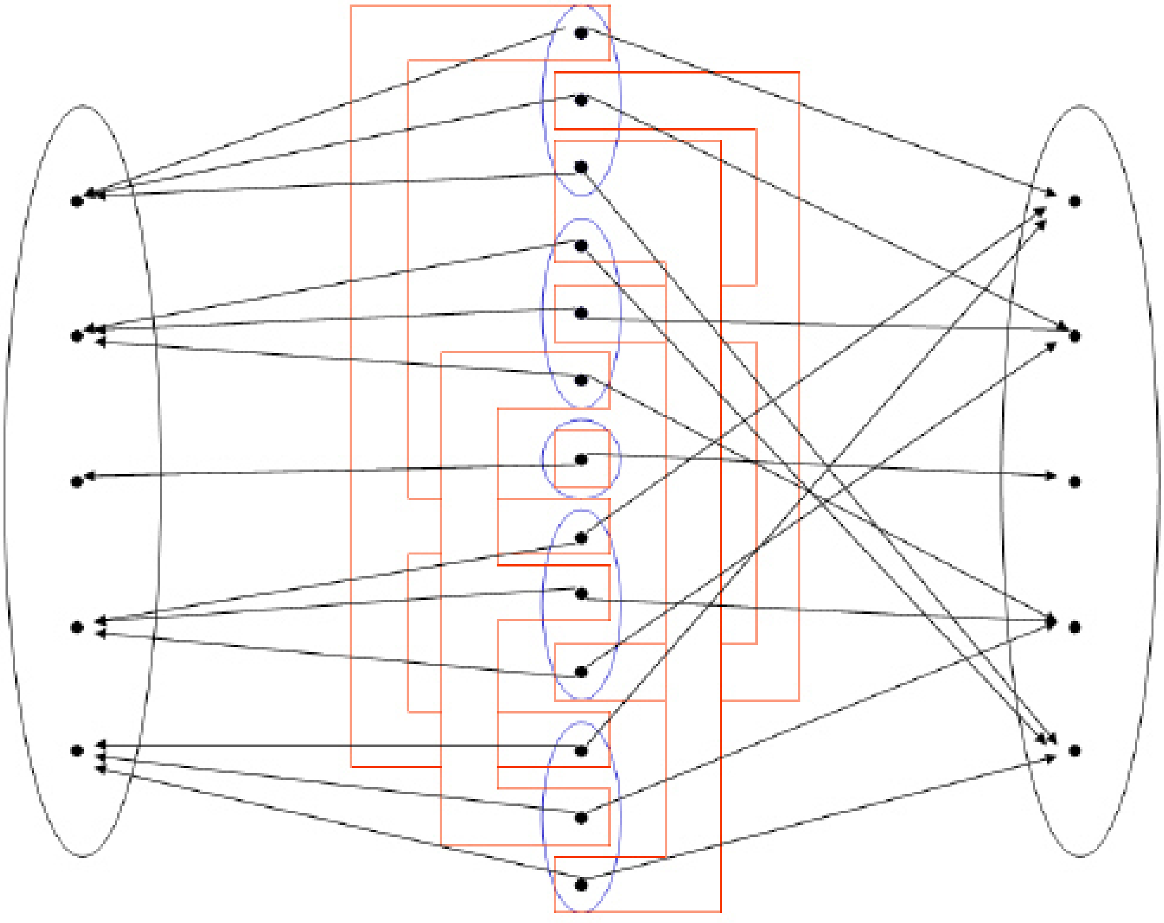
$\{A\}$ $\{B\}$ $\{C\}$ $\{D\}$ $\{E\}$

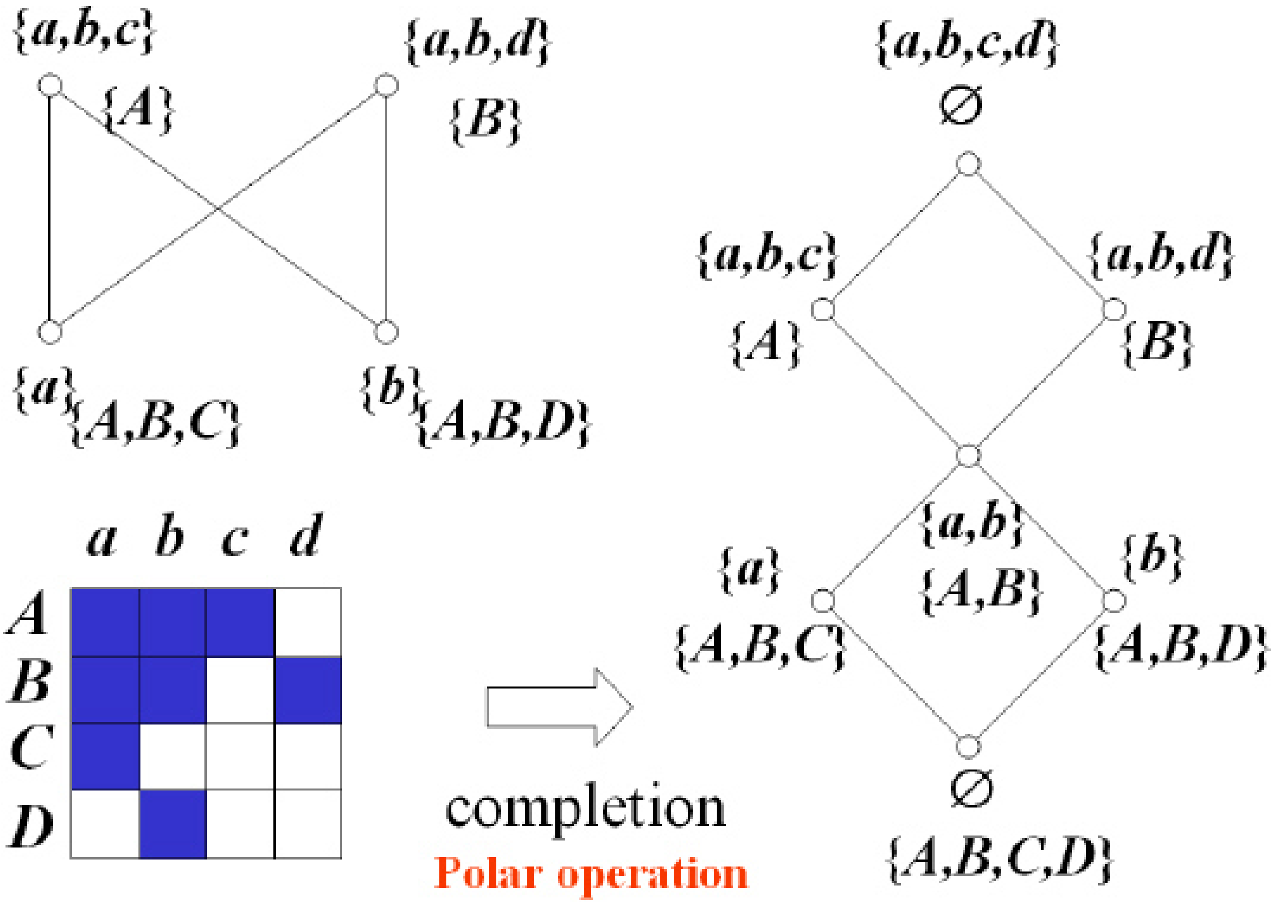
$\varnothing$

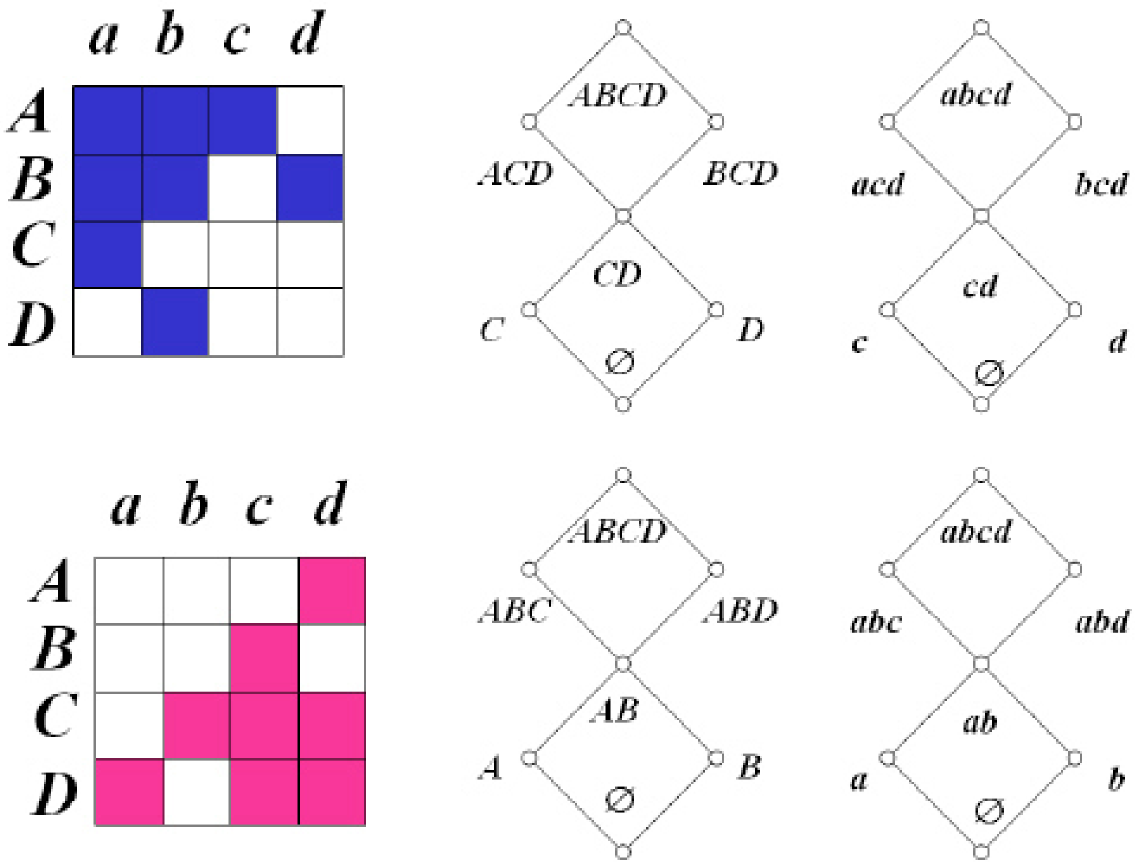

{A,B,C,D,E}
{B,C}
{A,C}
{C,E}
{C,D}
{A,B,D,E}
{A}
{B}
{C}
{D}
{E}
∅


a b c d e
A
B
C
D
E


e
d
c
b
a
E
C
B
A
D




{a,b,c}
{A}
{a,b,d}
{B}
{a}
{A,B,C}
{b}
{A,B,D}
a b c d
A
B
C
D
completion
Polar operation
{a,b,c,d}
∅
{a,b,c}
{a,b,d}
{A}
{B}
{a,b}
{A,B}
{a}
{A,B,C}
{b}
{A,B,D}
∅
{A,B,C,D}


a b c d
A
B
C
D
ABCD
ACD
BCD
CD
C
D
∅
abcd
acd
bcd
cd
c
d
∅
a b c d
A
B
C
D
ABCD
ABC
ABD
AB
A
B
∅
abcd
abc
abd
ab
a
b
∅

反応・解釈（認識）・写像が

一つの解釈系に、

互いに齟齬のある解釈が複数存在するなら、

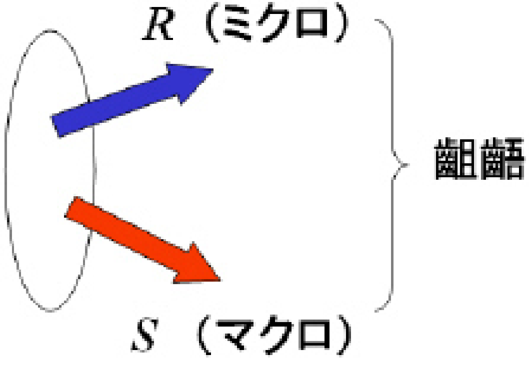
世界には、多様な論理が存在する

反応・解釈（認識）・写像が

一つの解釈系に、

互いに齟齬のある解釈が複数存在するなら、

世界には、多様な論理が存在する

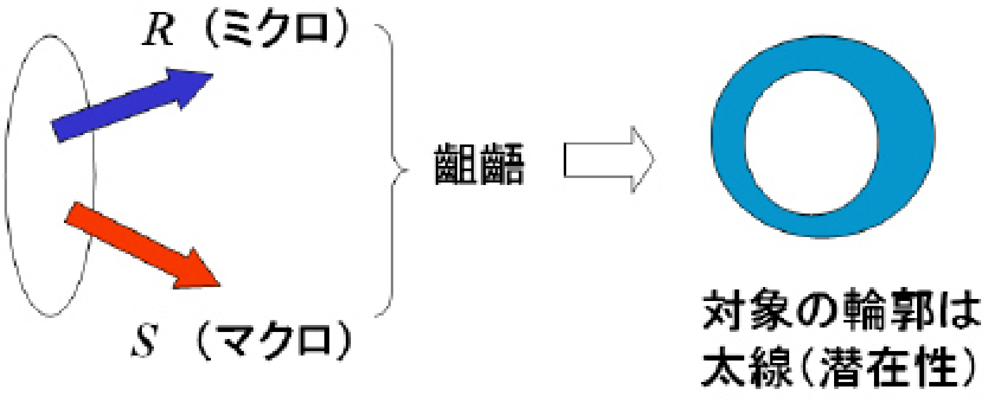


反応・解釈（認識）・写像が

一つの解釈系に、

互いに齟齬のある解釈が複数存在するなら、

世界には、多様な論理が存在する



反応・解釈（認識）・写像が

一つの解釈系に、

互いに齟齬のある解釈が複数存在するなら、

世界には、多様な論理が存在する