

JpGU2018

M-GI28 計算科学による惑星形成・進化・環境変動研究の新展開

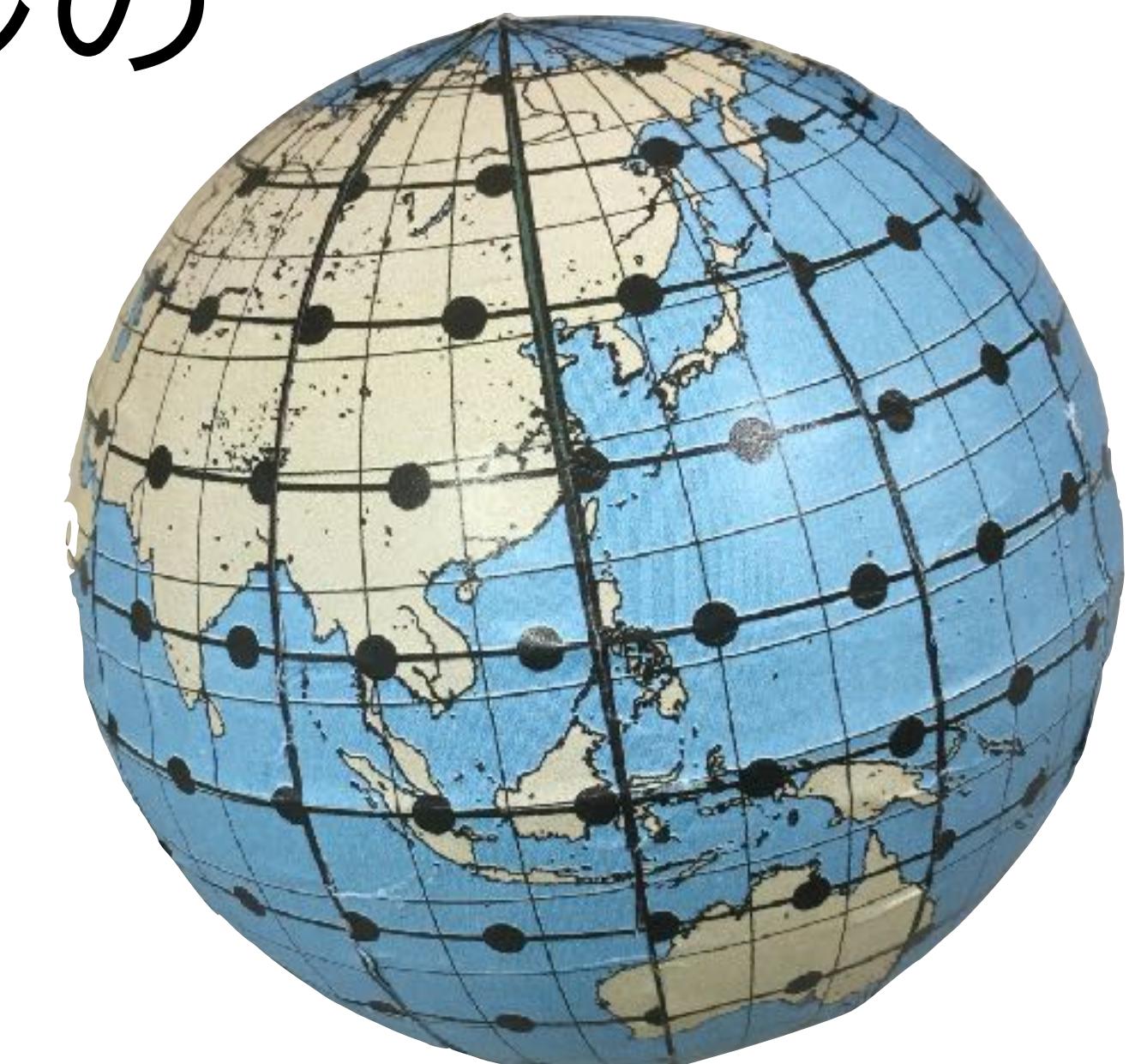
2018/5/23

RBFを用いた浅水波モデルの 標準実験による検証



京都大学防災研究所 榎本剛

enomoto.takeshi.3n@kyoto-u.ac.jp
[@takeshi_enomoto](https://twitter.com/takeshi_enomoto)



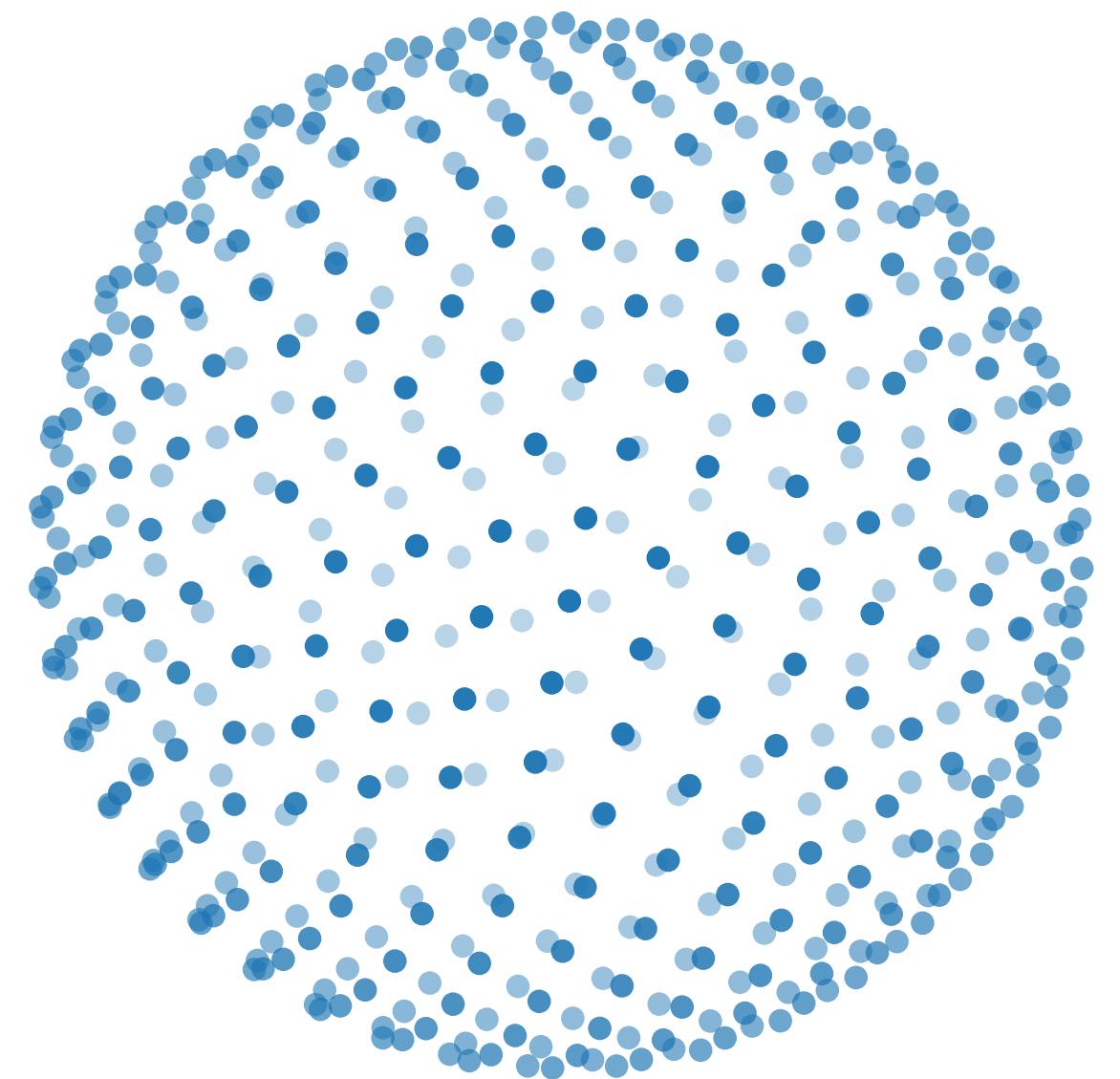
JSPS科研費JP15K13417

文部科学省ポスト「京」萌芽的課題3

「太陽系外惑星(第二の地球)の誕生と太陽系内惑星環境変動の解明」

球面上の準一樣節点

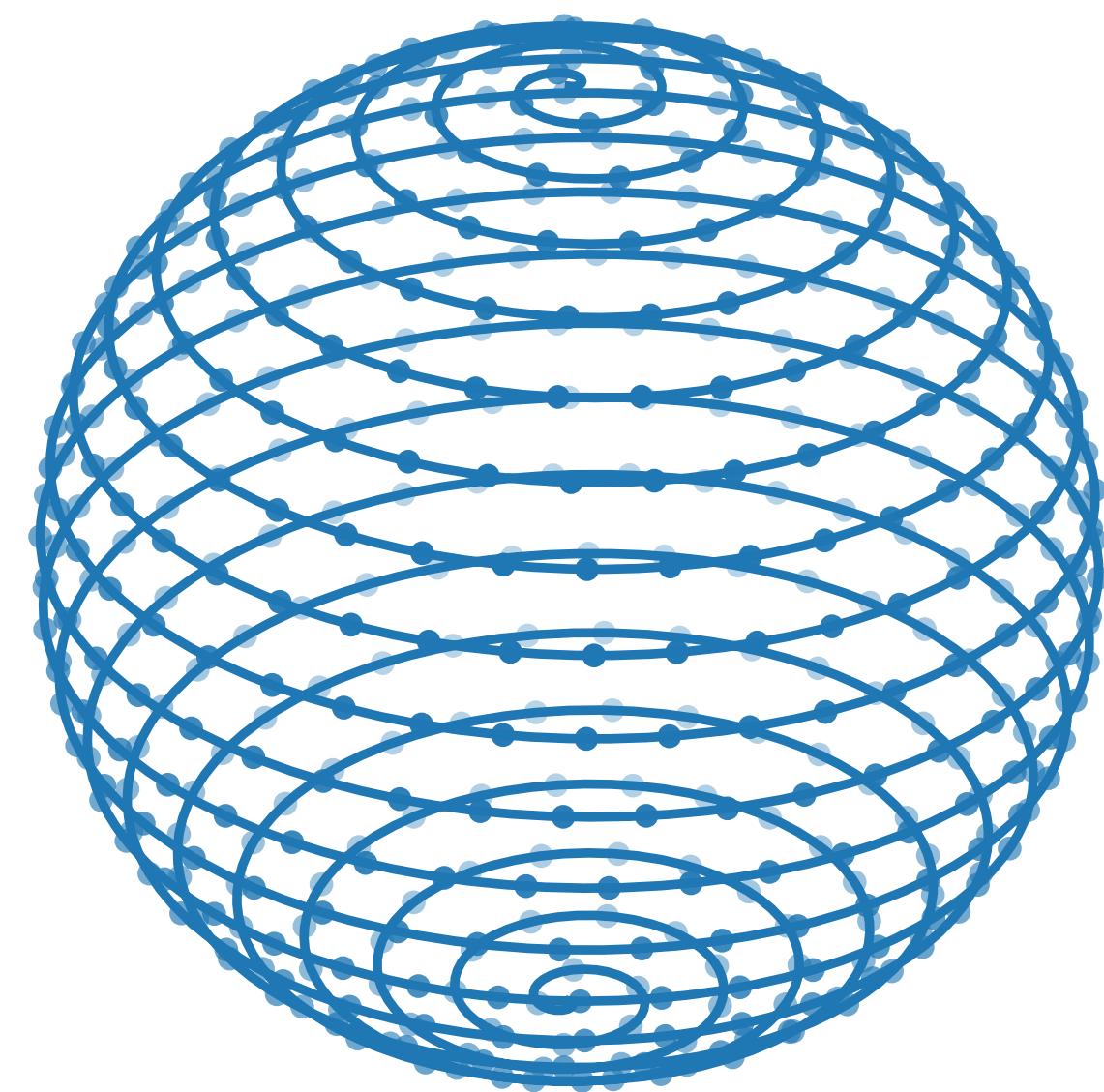
ME: 最小化エネルギー



[https://github.com/
gradywright/spherepts](https://github.com/gradywright/spherepts)

SH: 球面螺旋

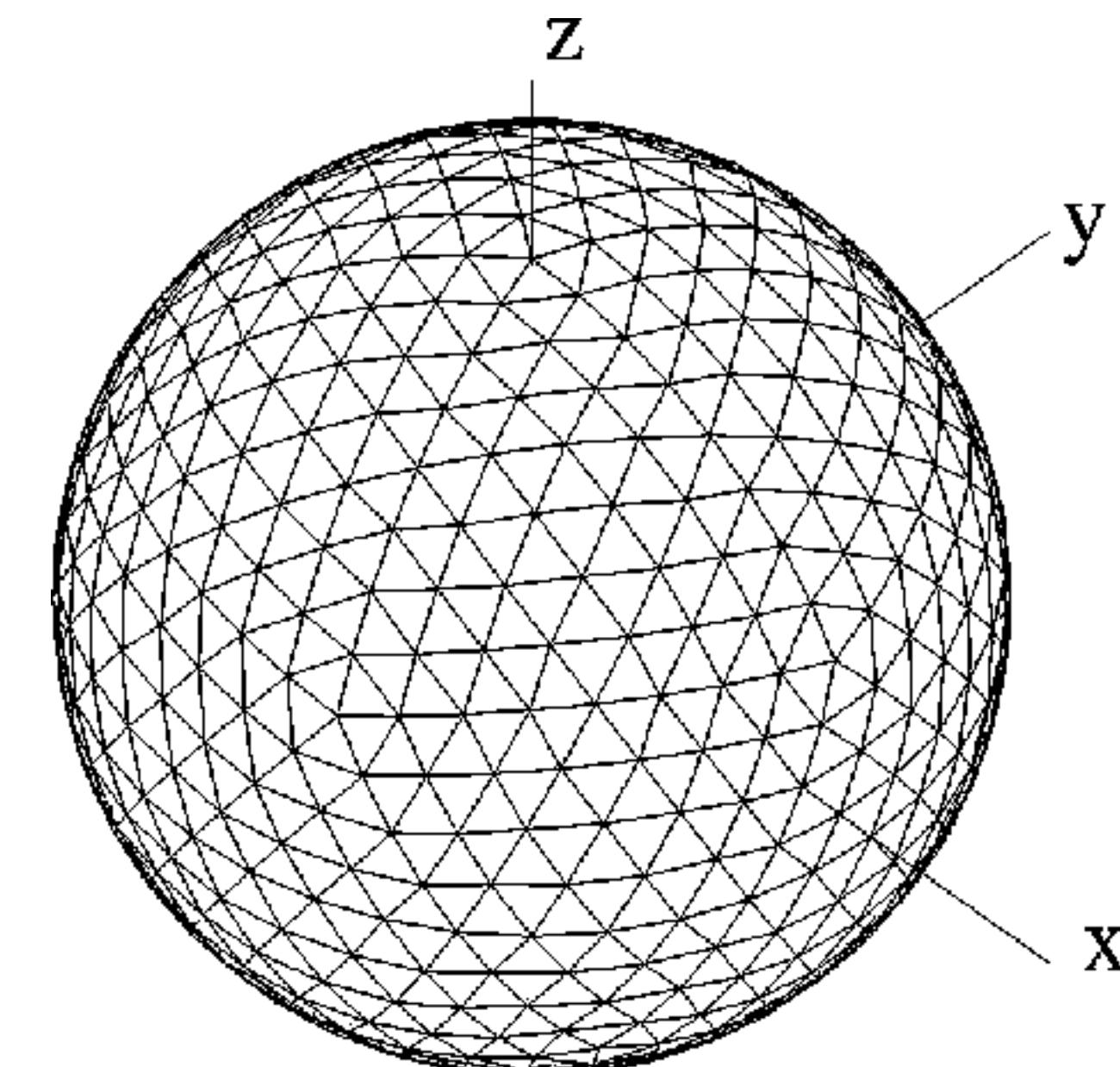
$$= m \mod 2$$



Bauer 2000

NICAM

NI: 正二十面体



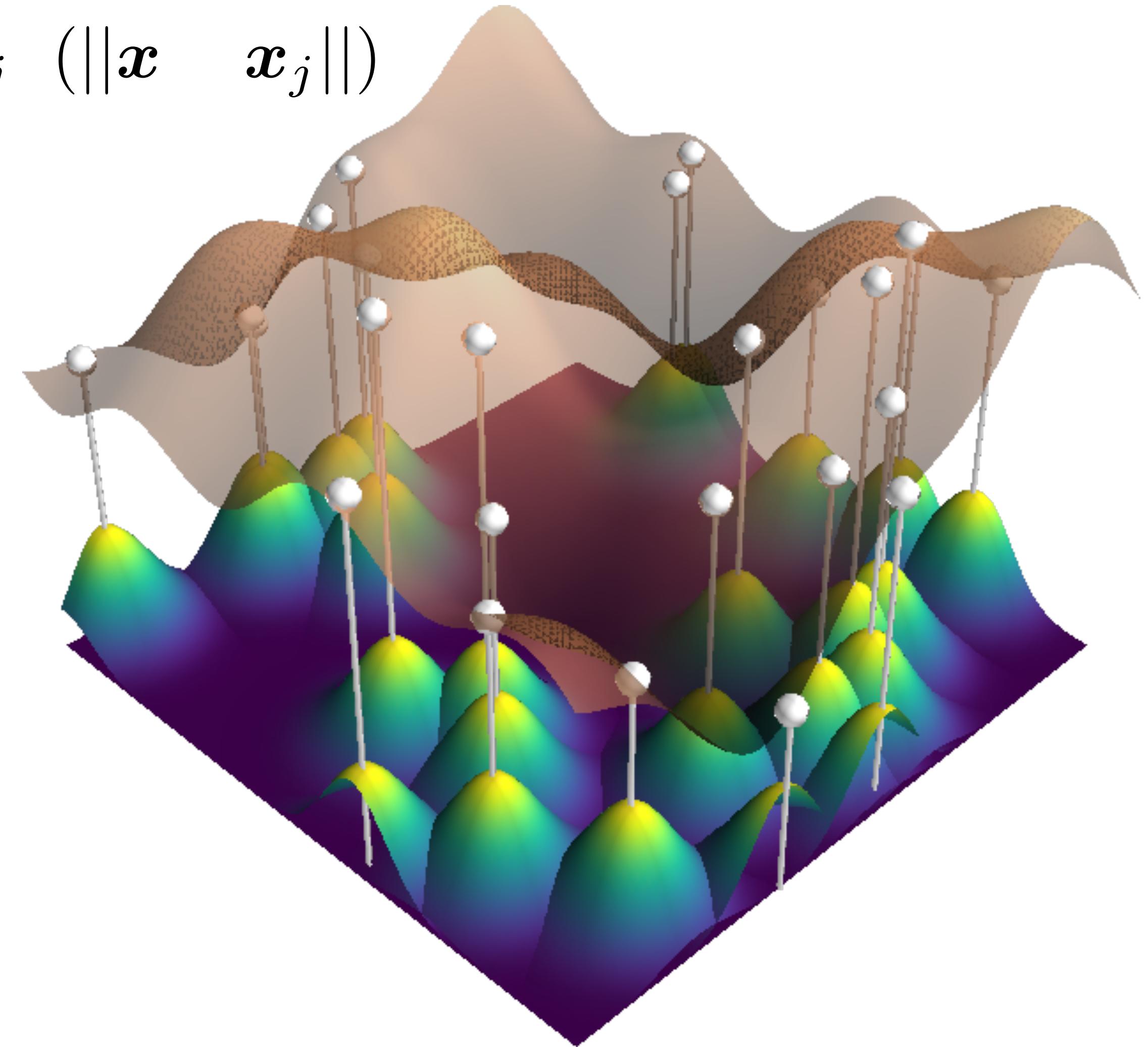
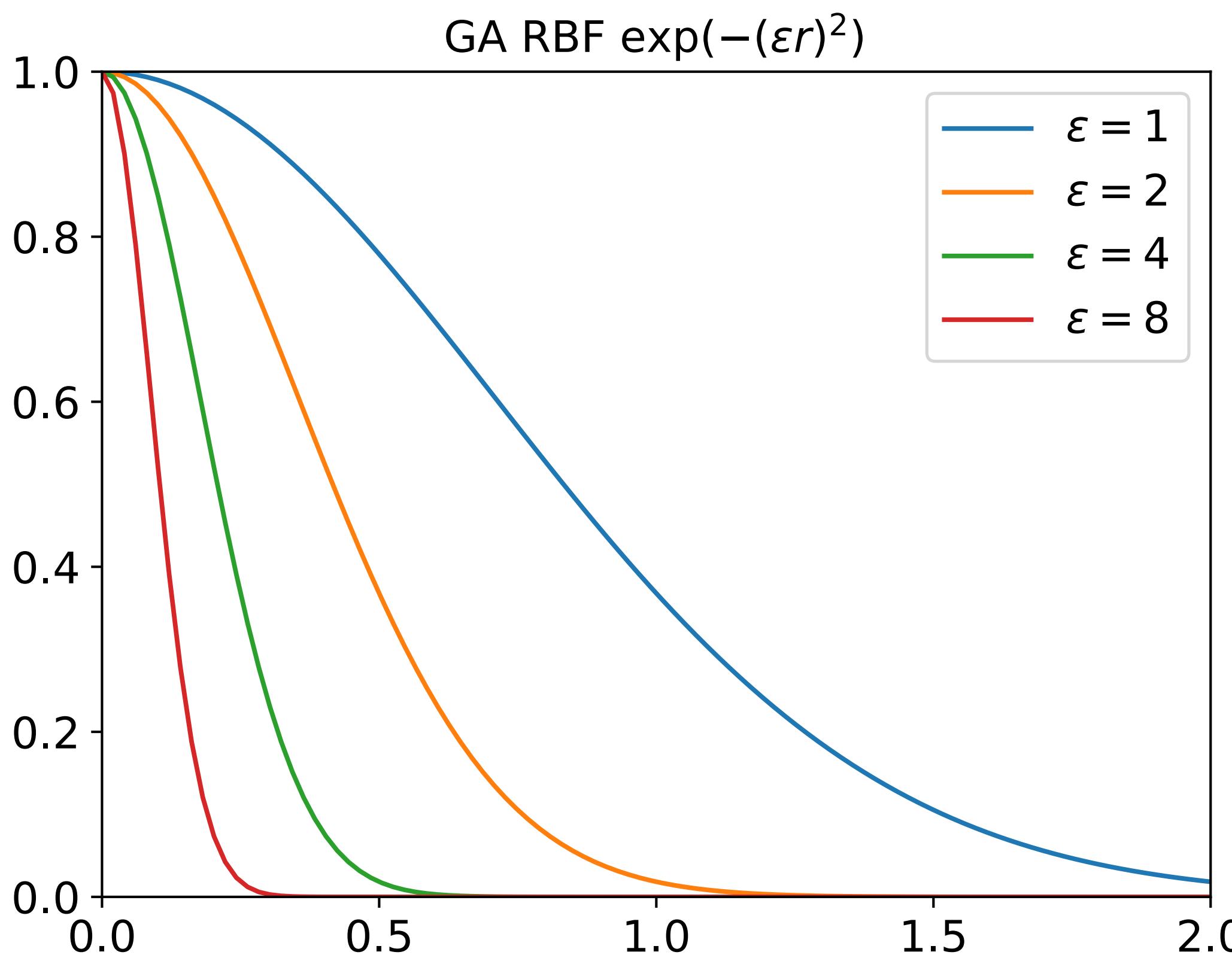
Tomita et al. 2001

RBF（距離基底函数）法

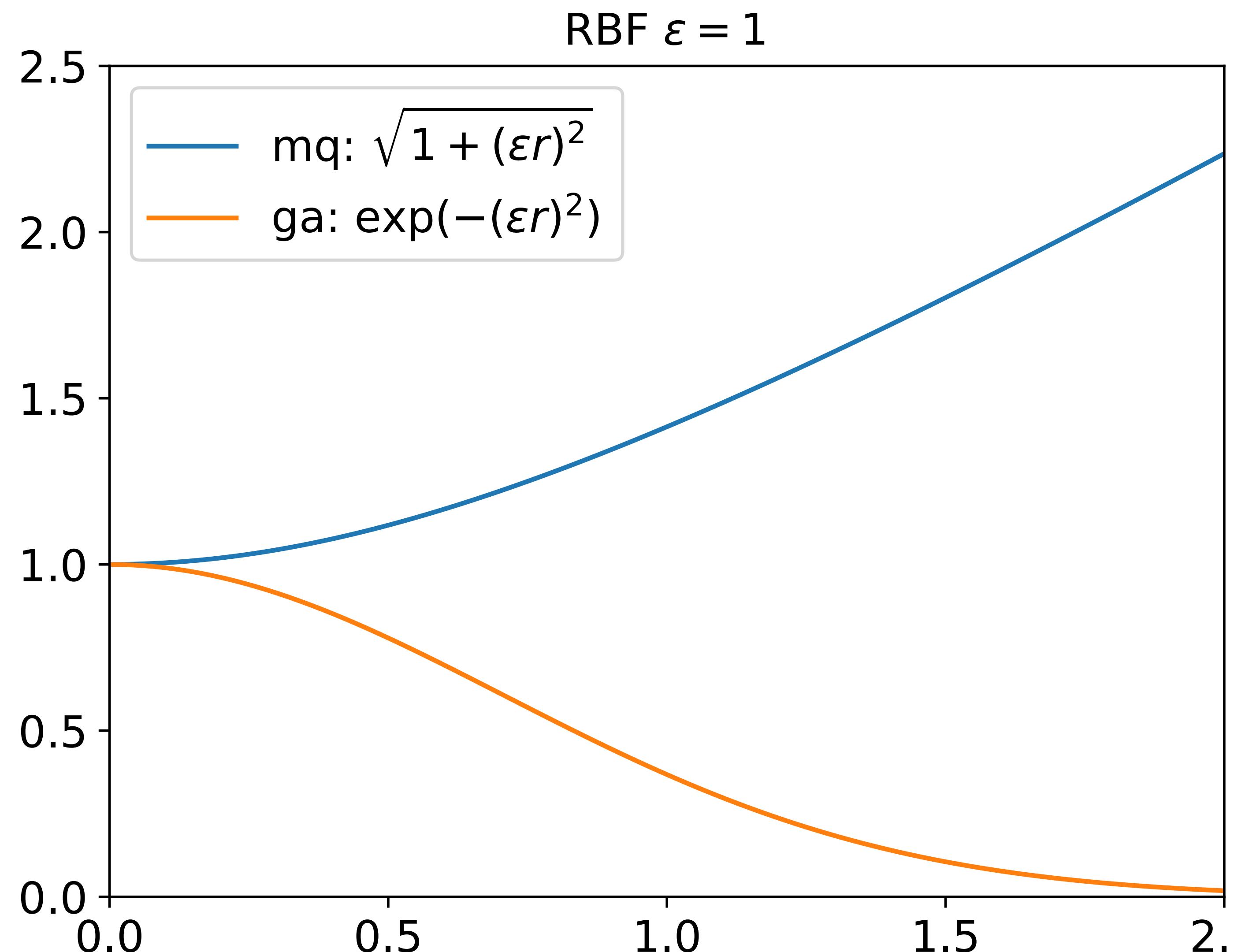
- 球面上の移流: Flyer and Wright (2007)
- 浅水波方程式: Flyer and Wright (2009)
- メッシュフリー・準一様節点⇒長い時間ステップ
- 簡単なアルゴリズムでスペクトル精度
- 局所性⇒エイリアシングやGibbs現象が起きにくい (Fornberg et al. 2008)
- 適合性⇒複雑形状, 局所高解像度化

RBFの考え方

$$f(\boldsymbol{x}) = \sum_{j=1}^n c_j \exp(-\epsilon \|\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}_j\|^2)$$



RBF: Radial Basis Functions



内挿行列

$$\mathbf{f} = [f_1, f_2, \dots, f_n]^T \quad \mathbf{c} = [c_1, c_2, \dots, c_n]^T$$

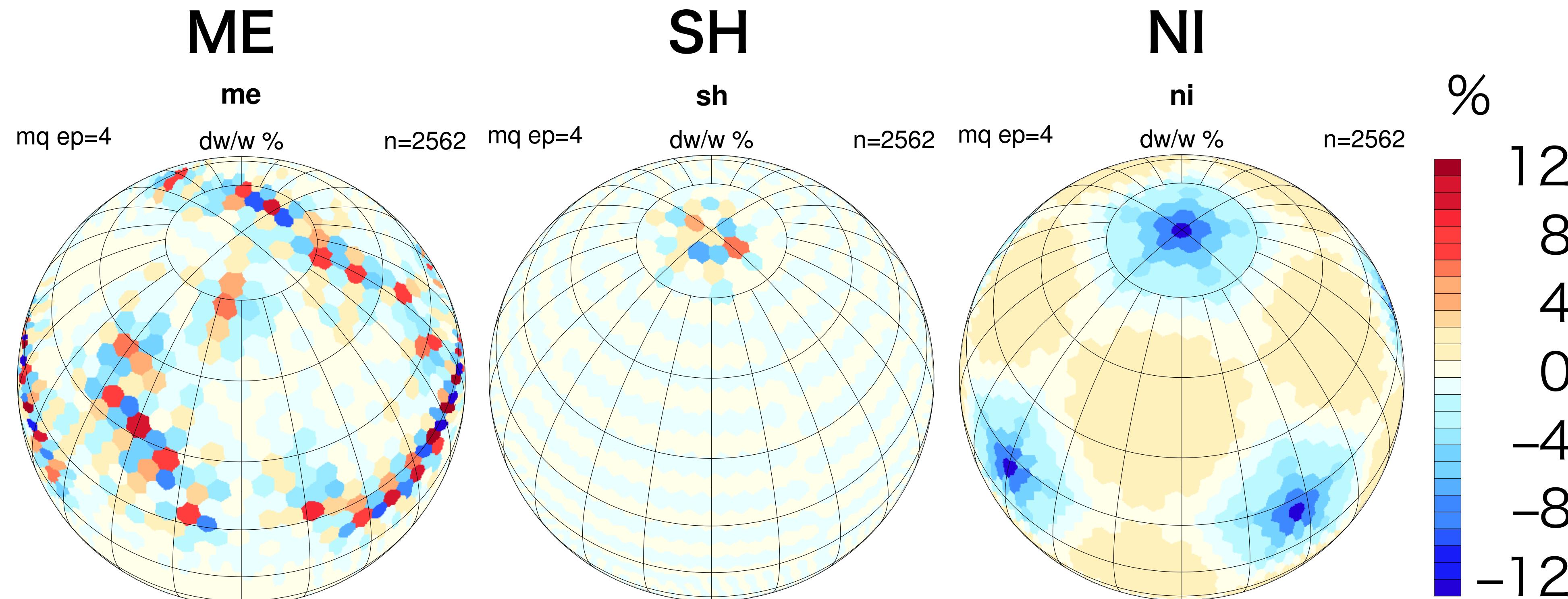
$$\mathbf{f} = A\mathbf{c}$$

$$A = \begin{pmatrix} (0) & (||x_1 - x_2||) & \dots & (||x_1 - x_n||) \\ (||x_2 - x_1||) & (0) & \dots & (||x_2 - x_n||) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ (||x_n - x_1||) & (||x_n - x_2||) & \dots & (0) \end{pmatrix}$$

重みでみた一様性

- 単位球の表面積 4π
- 一様な一つの節点の重み $4\pi/n$
- 重みはRBF内挿行列の列の和 $w = 4\pi \frac{A^{-1}e}{e^\top A^{-1}e} e^T [1, 1, \dots, 1]$

一様性な重みからの誤差



浅水波モデル

デカルト座標

$$\begin{aligned}\frac{\mathbf{u}}{t} &= -(\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u} - f(\mathbf{x}, \mathbf{u}) - g \quad h \\ \frac{h}{t} &= -\cdot (\mathbf{h} \mathbf{u})\end{aligned}$$

微分演算子・速度の時間変化傾向を接平面に投影

微分演算子

$$r(\boldsymbol{x}) = \frac{1}{2(1 - \boldsymbol{x}^\top \boldsymbol{x}_k)}$$

$$_k(r(\boldsymbol{x})) = \frac{\partial}{\partial \boldsymbol{x}} r(\boldsymbol{x}) \quad r(\boldsymbol{x}) = (\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}_k) \frac{k(r(\boldsymbol{x}))}{r(\boldsymbol{x})}$$

標準実験

- Williamson et al. 1992
- 定常性や山岳の効果、惑星波など7つの実験
- 4次のルンゲクッタ
- 節点数2562（正二十面体の制約）～T51
- Case 5～ 数値拡散

RBFフィルタ

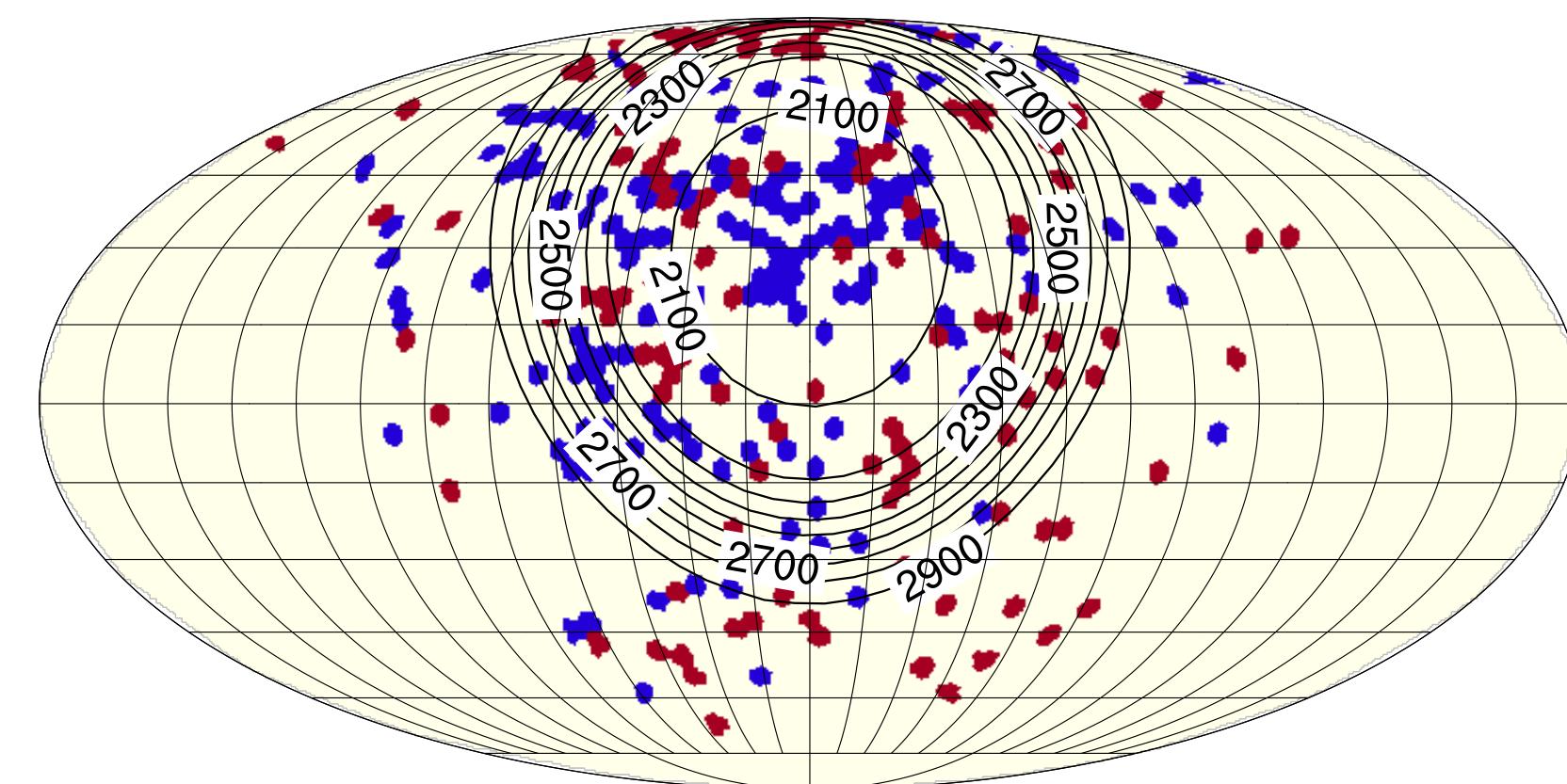
Fornberg and Lehto 2011

- A^{-1} の固有値は急速に小さくなるので $A^{-1}\underline{u}$ は
低次の固有値を弱く, 高次の固有値を強く減衰
- 節点の分布や数, RBFの種類に非依存
- ラプラシアンの次数を考える必要がない。
- どの でも成長しない。

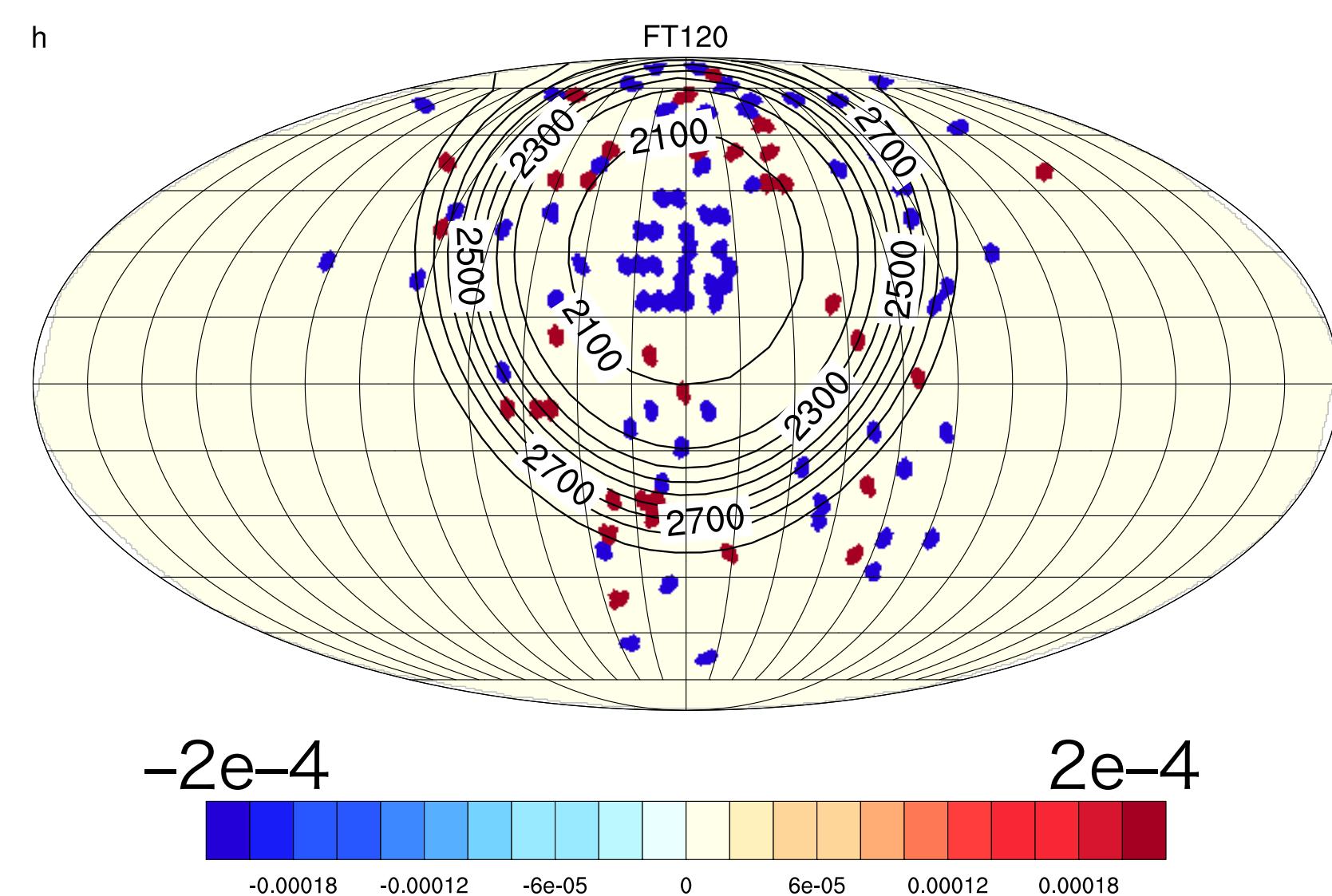
Case 3: 地衡流

$n = 2562; t = 24 \text{ min} = 4.75$

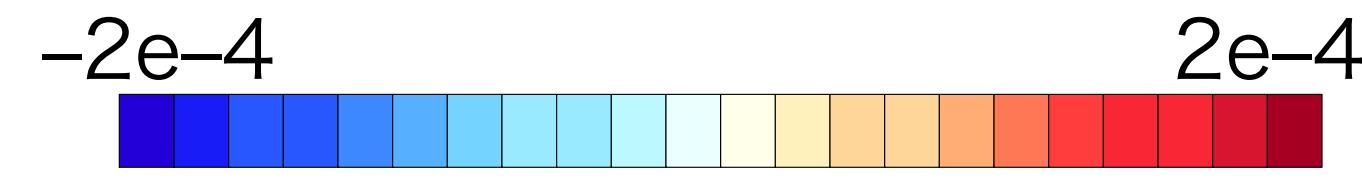
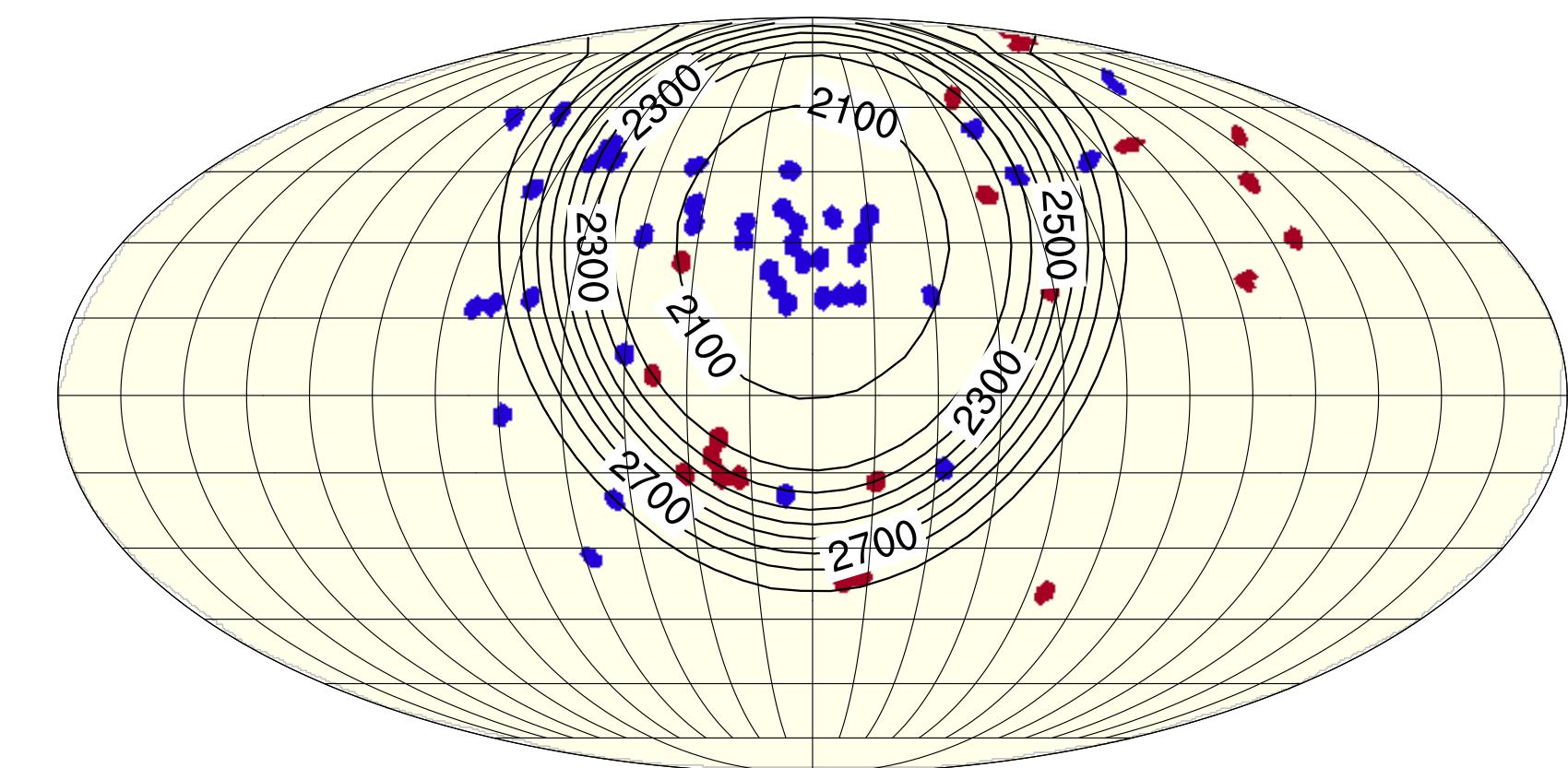
ME



SH



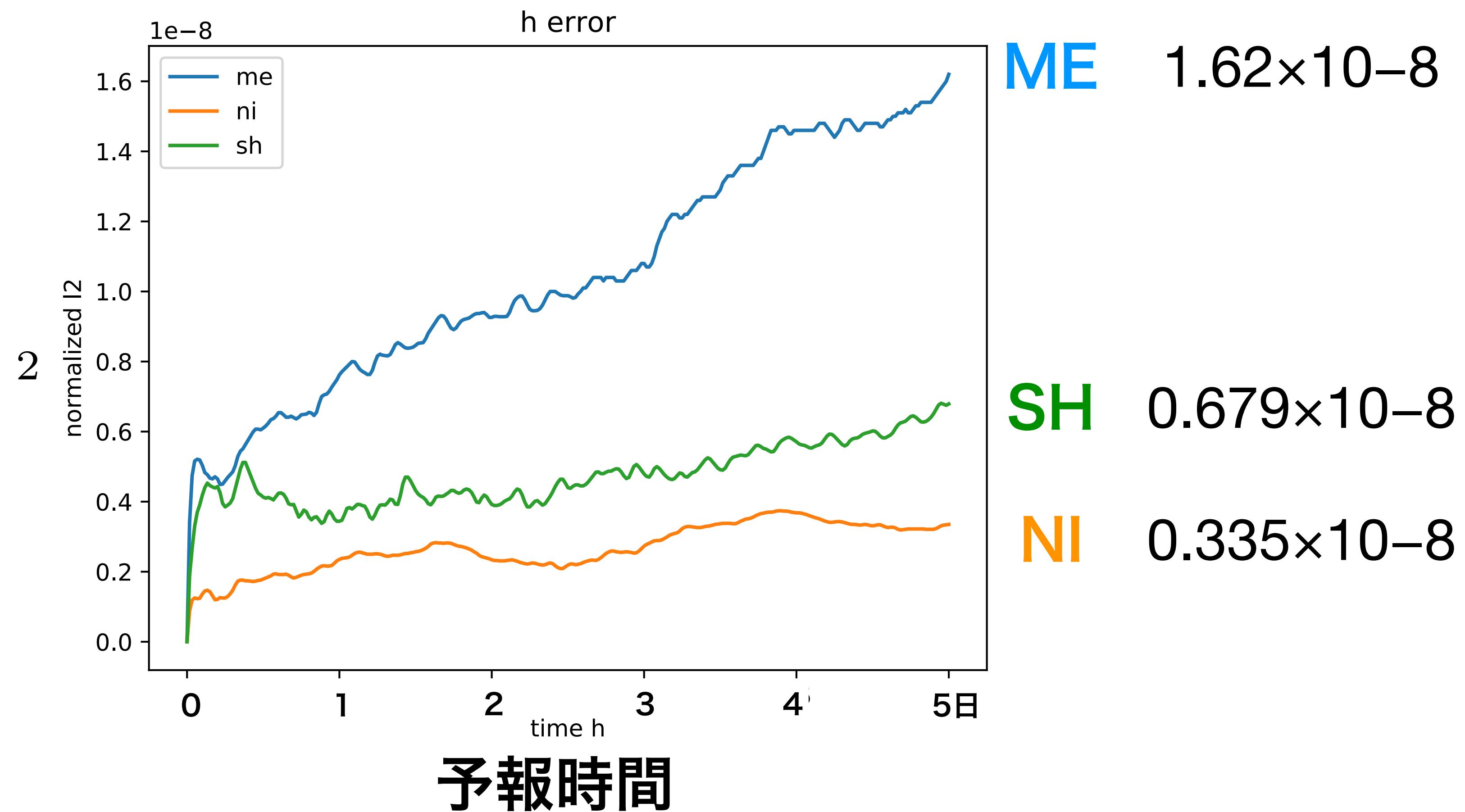
N



CONTOUR FROM 2100 TO 2900 BY 100

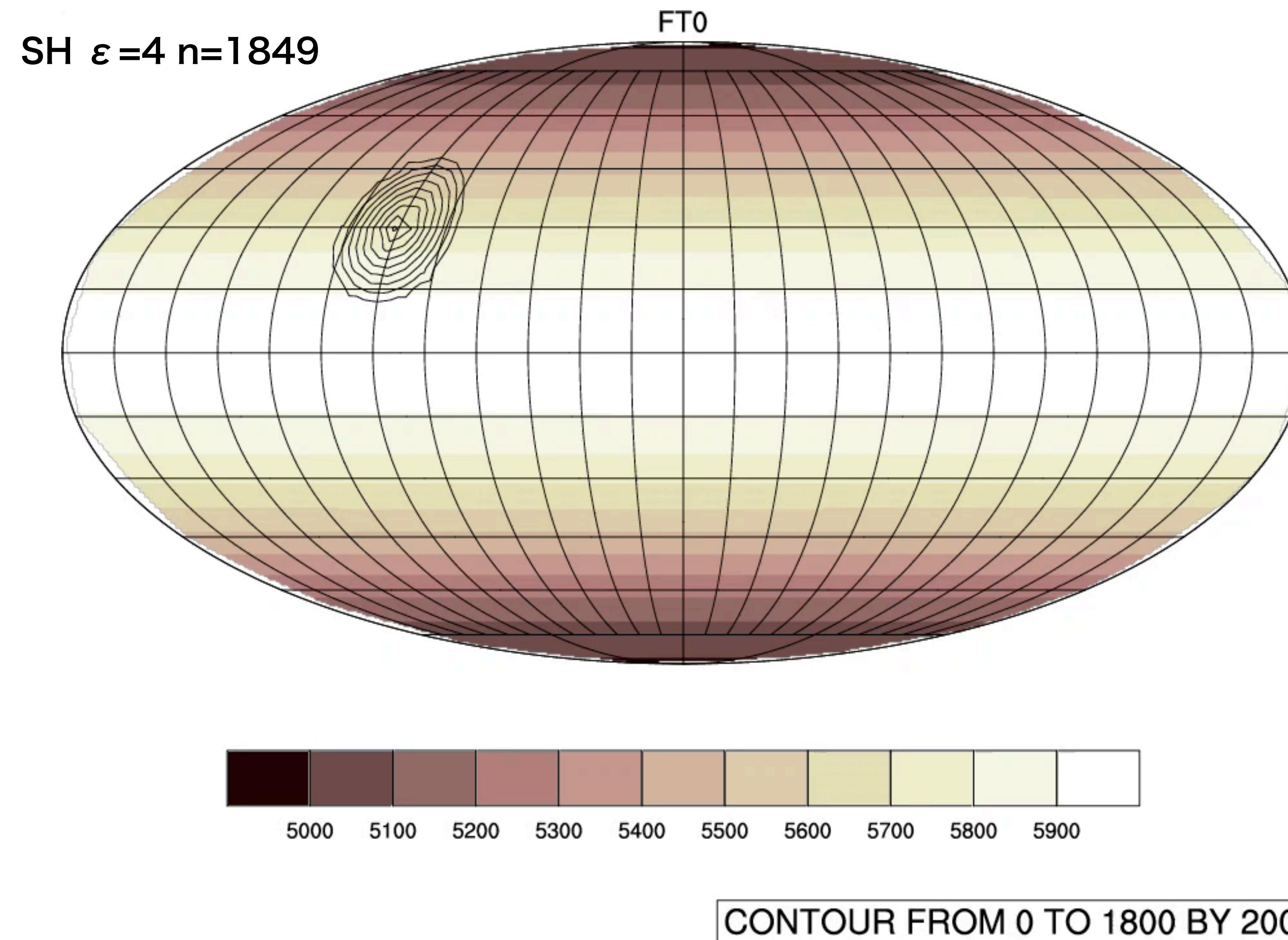
Case 3: 地衡風

$$n = 2562; \quad t = 24 \text{ min} = 4.75$$



method	no. of nodes (N)	time step (Δt)	relative ℓ_2 error in h
RBF リープフロッグ	784 (28)	20 min	6.32×10^{-6}
	1849 (43)	12 min	1.97×10^{-8}
	3136 (56)	10 min	3.65×10^{-10}
	4096 (64)	8 min	4.72×10^{-11}
	5041 (71)	6 min	6.88×10^{-12}
球面調和関数 SH; Jakob-Chien <i>et al.</i> (1995)	8192 (1849)	20 min* (3)	7×10^{-10}
二重フーリエ DF/SHF; Spotz <i>et al.</i> (1998)	18 432 (4096)	15 min*	2.5×10^{-10}
スペクトル要素 SE; Taylor <i>et al.</i> (1997)	2048	6 min	2×10^{-6}
	8192	3 min	4×10^{-10}
	32 768	90 s	2×10^{-13}
	6144	90 s	8×10^{-7}
	24 576	45 s	1×10^{-10}

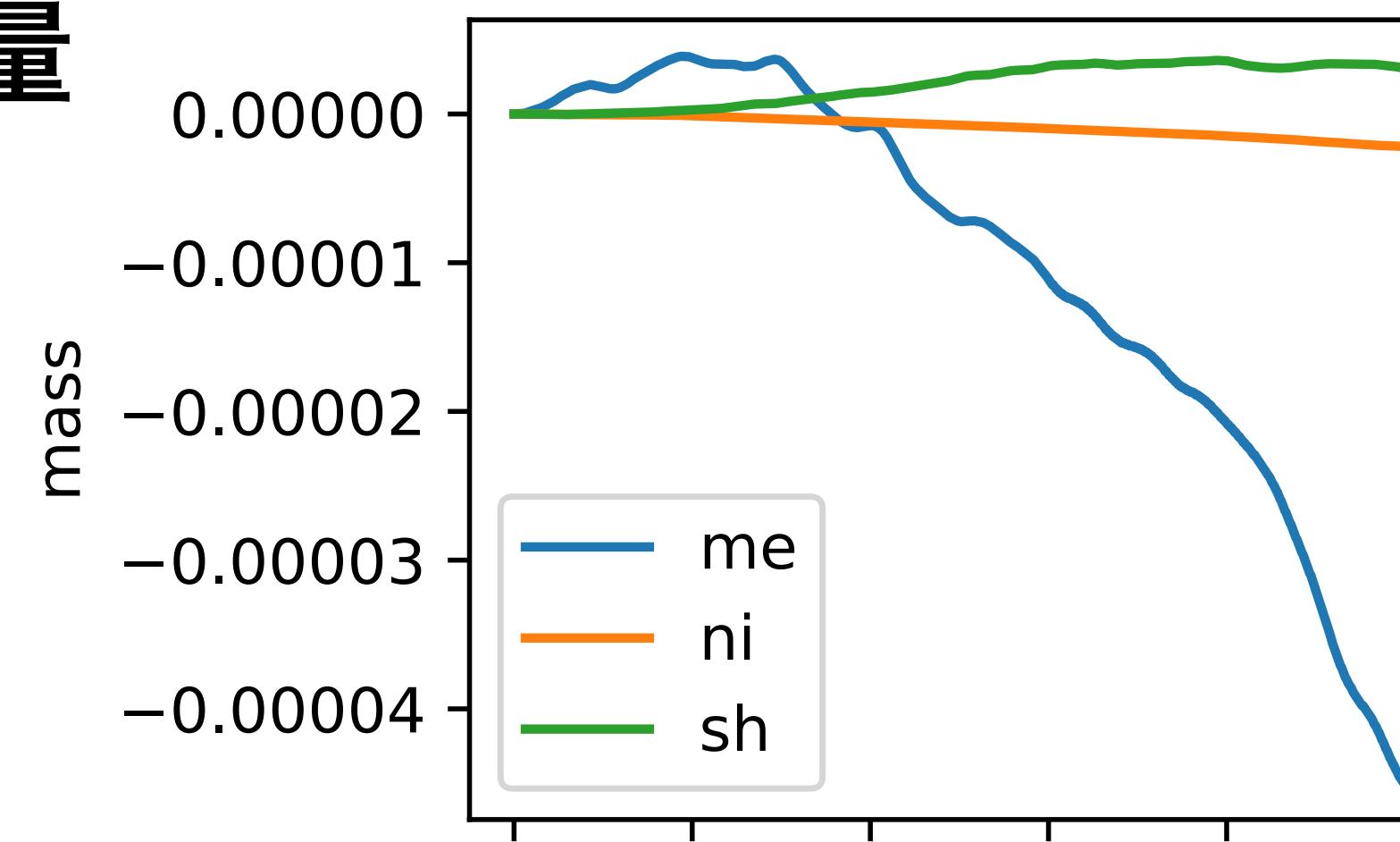
Case 5: 山岳を超える剛体流



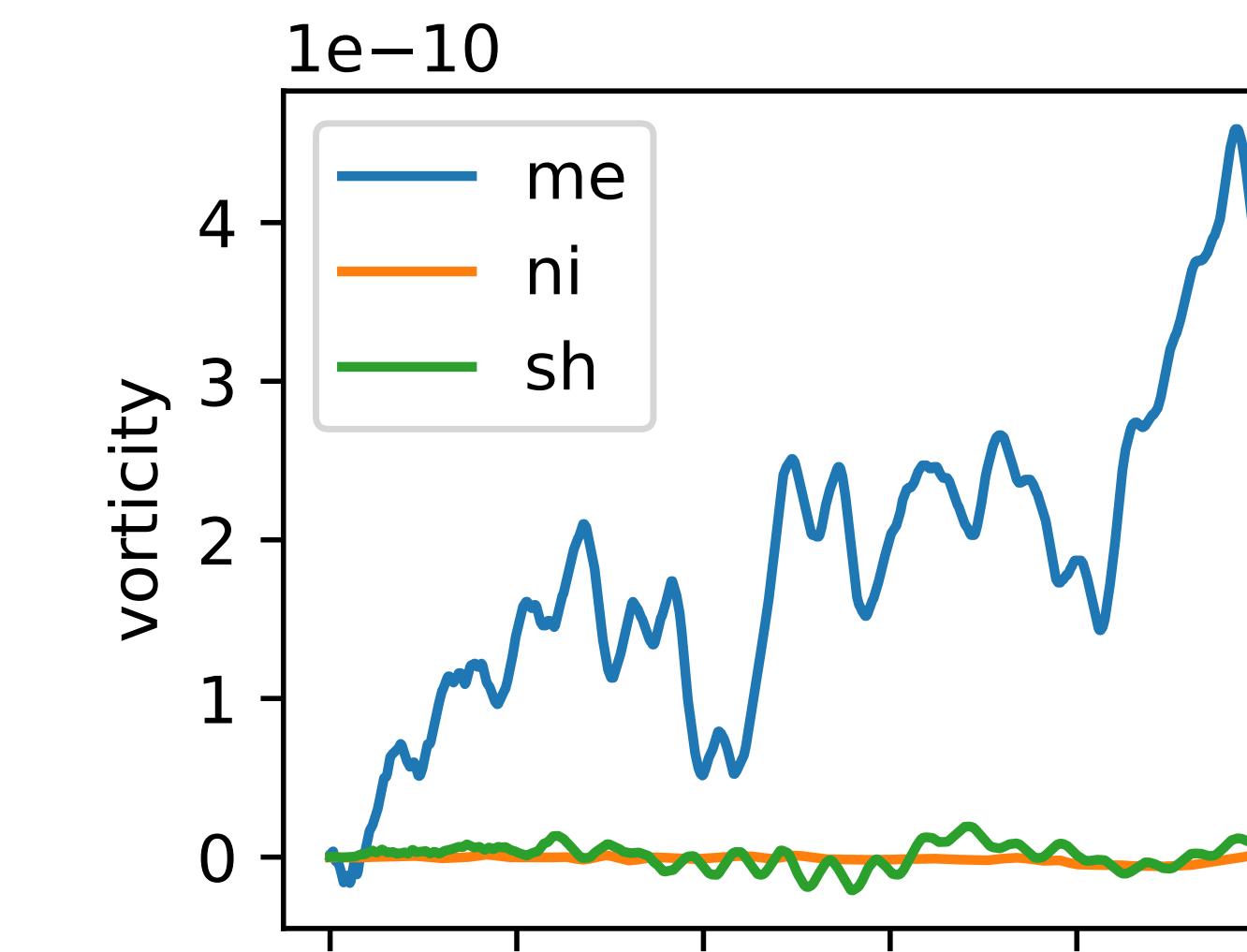
Case 5: 山岳を越える流れ 保存性

$$n = 2562 \quad t = 15 \text{ min} \quad = 4.25 = 2 \times 10^{-8}$$

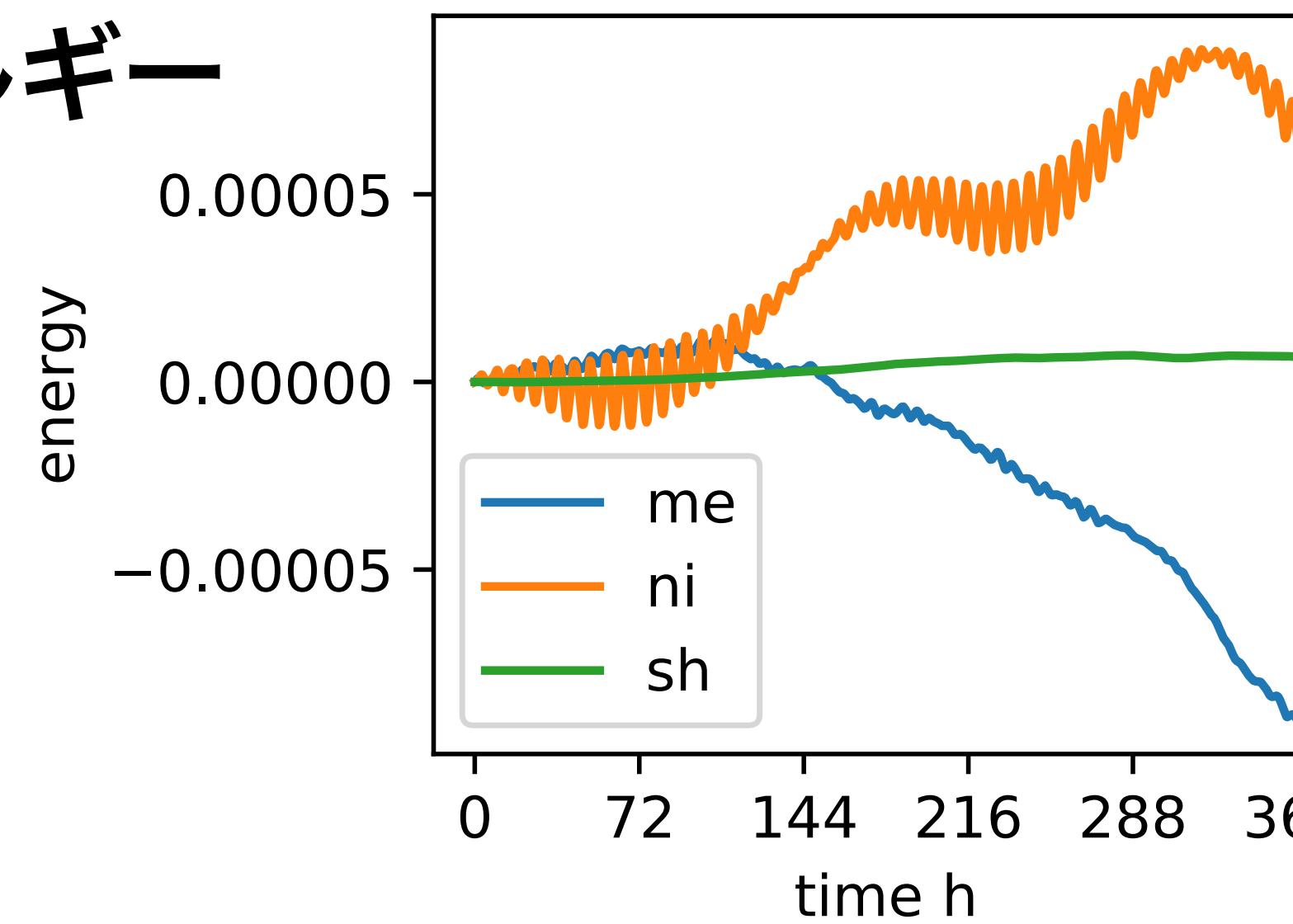
質量



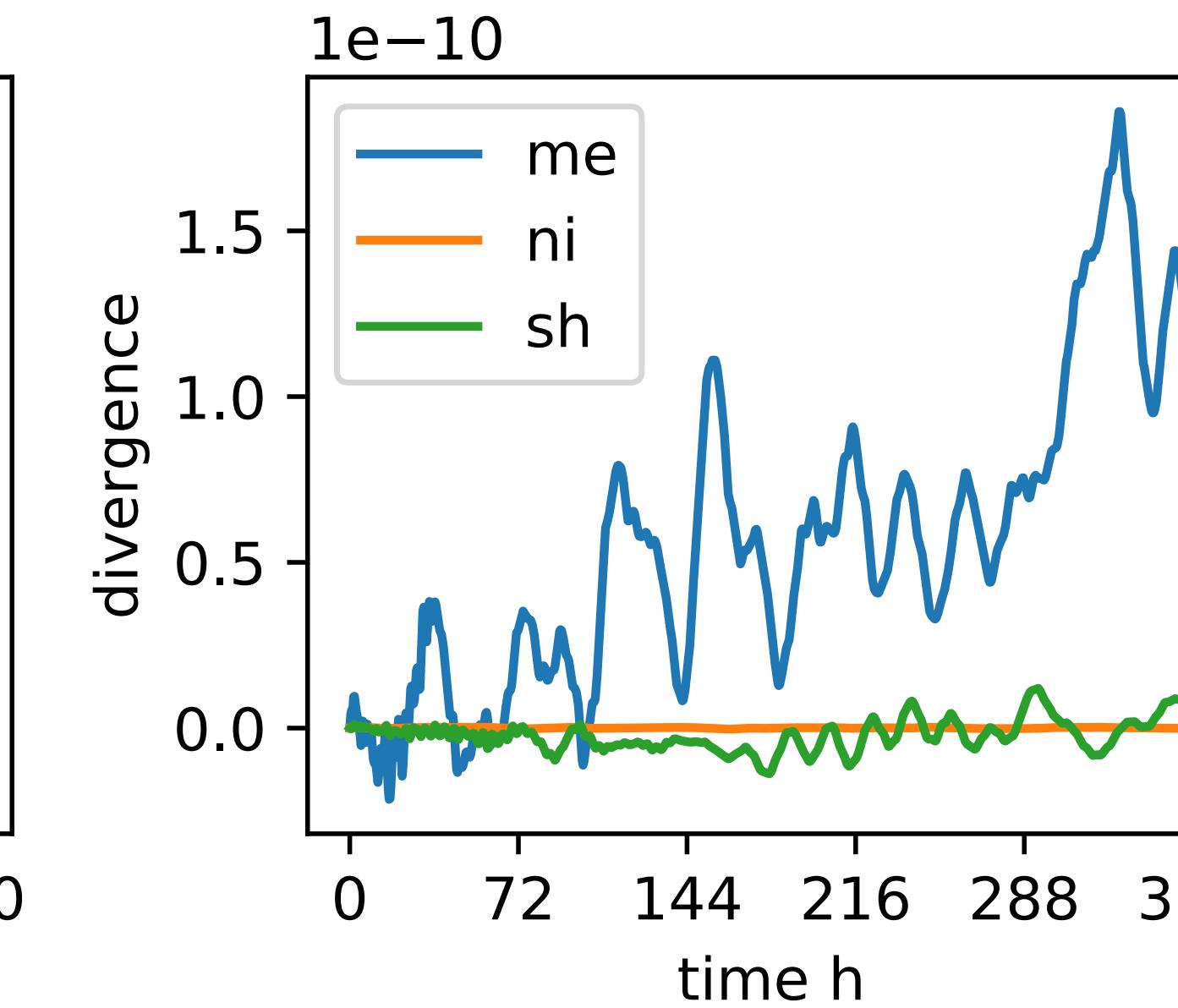
渦度



エネルギー



発散

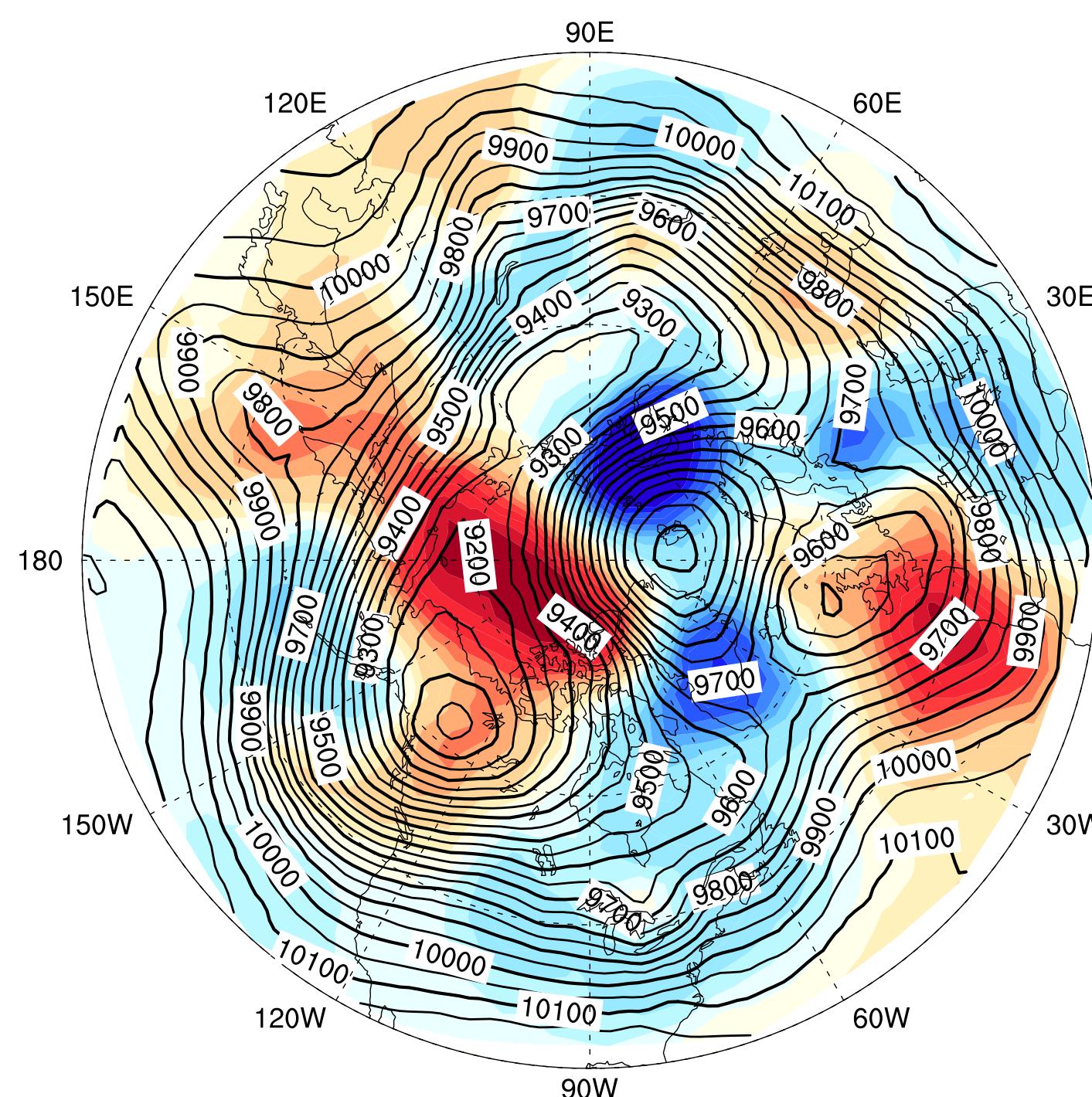


Case 7: 500 hPa解析値からの予報

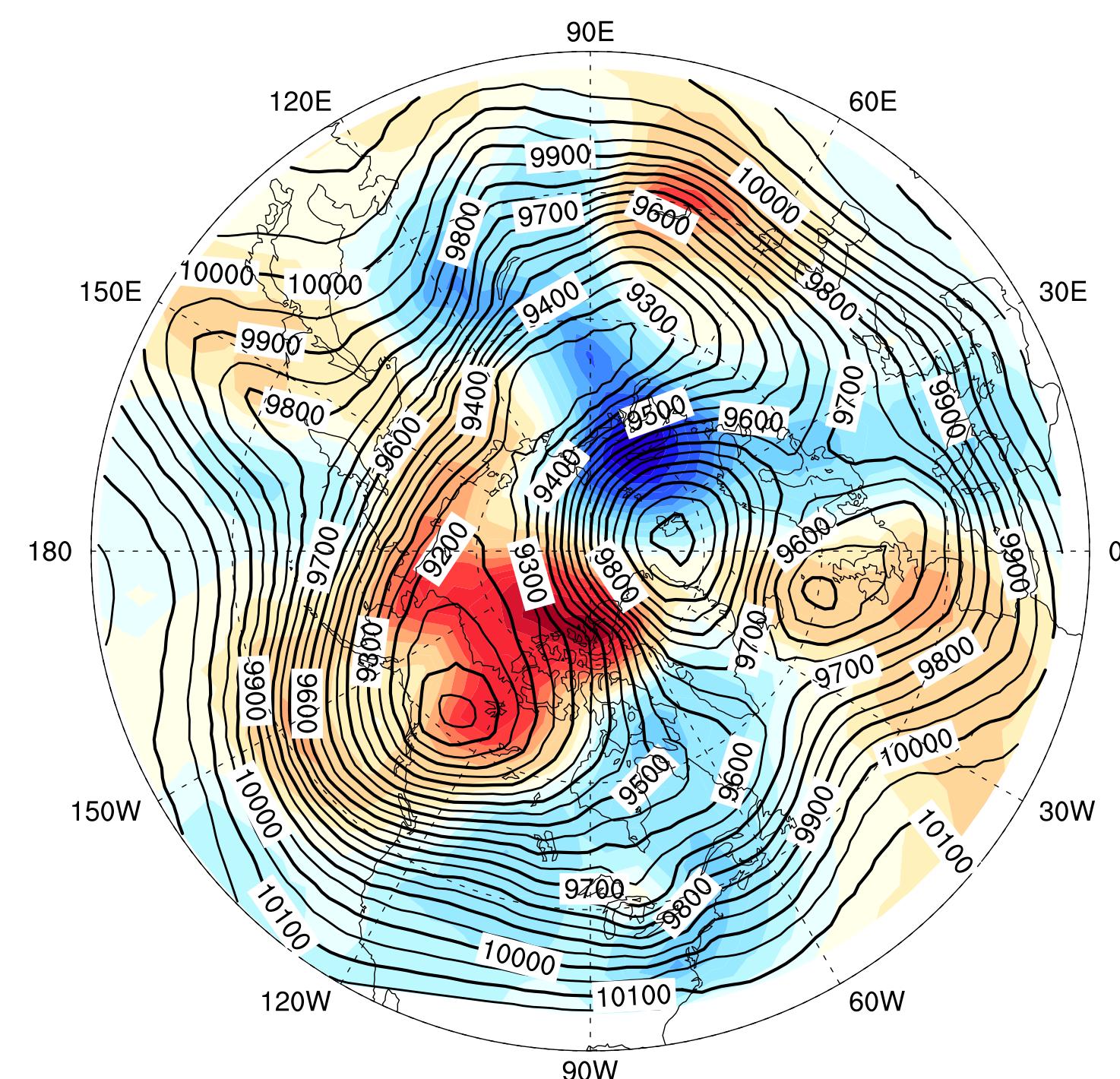
T213参照実験 (等值線) からの誤差

30N以北

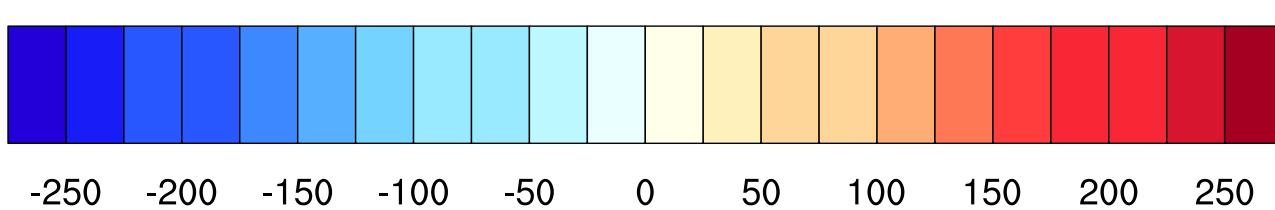
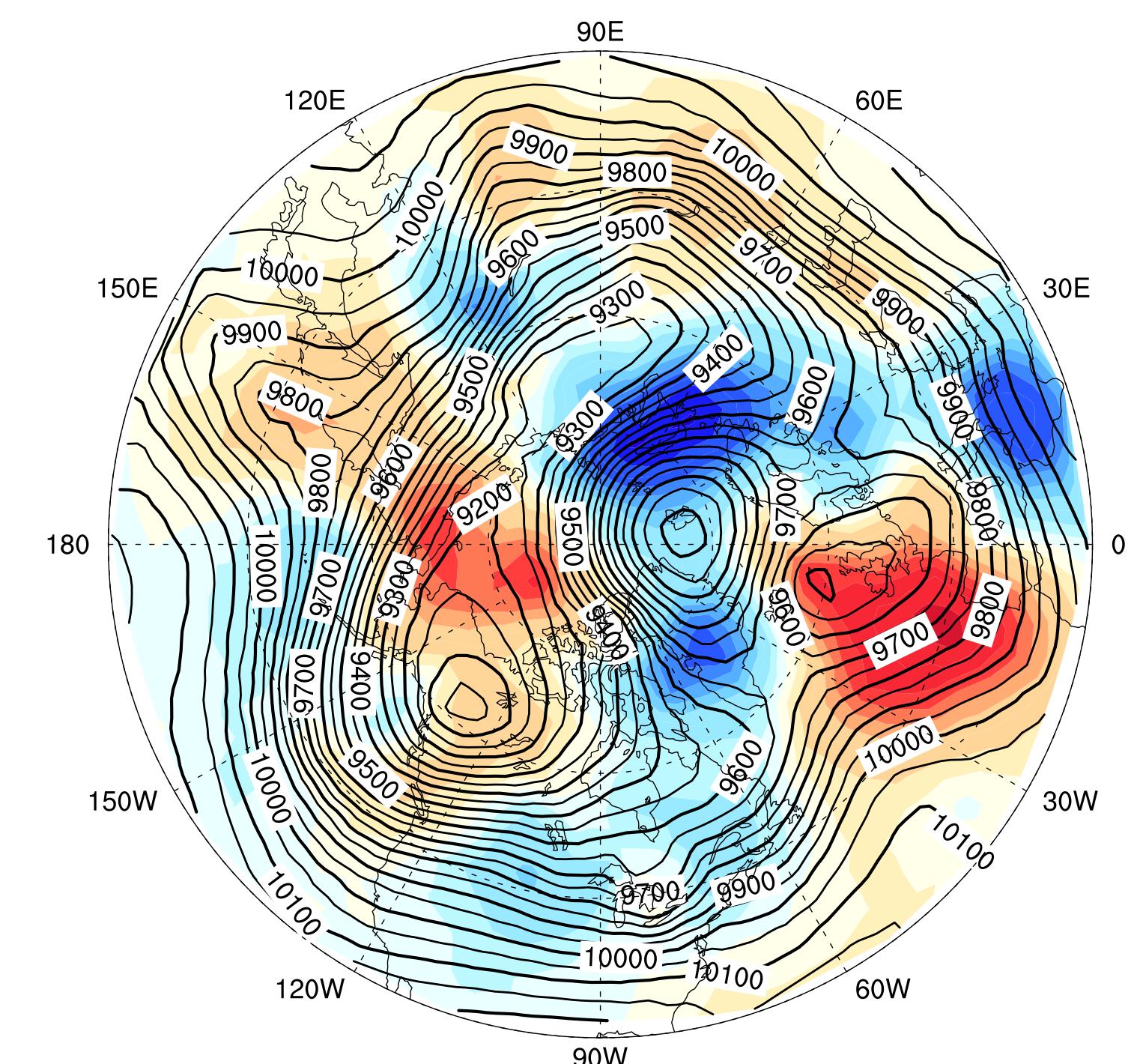
ME



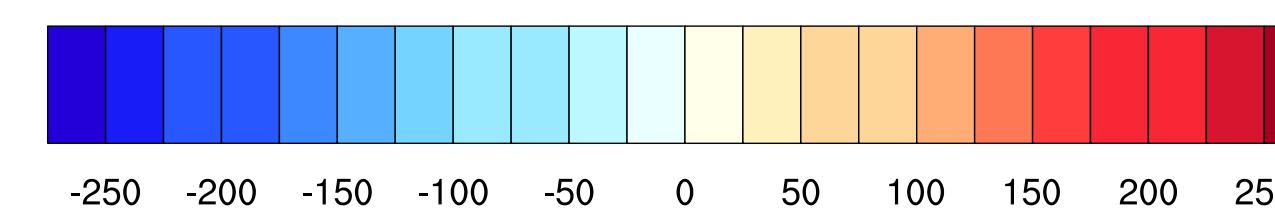
SH



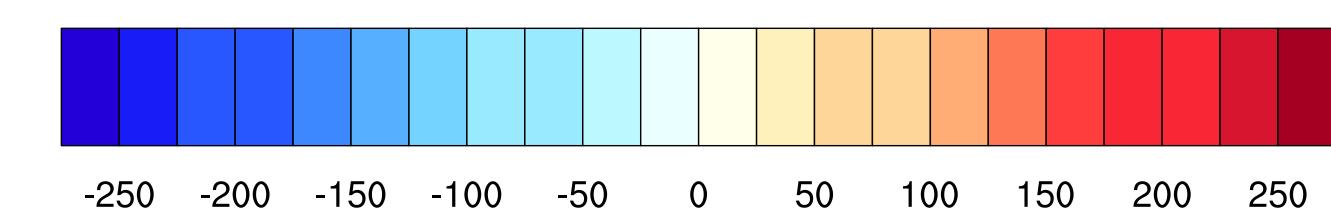
NI



CONTOUR FROM 9050 TO 10250 BY 50



CONTOUR FROM 9050 TO 10250 BY 50

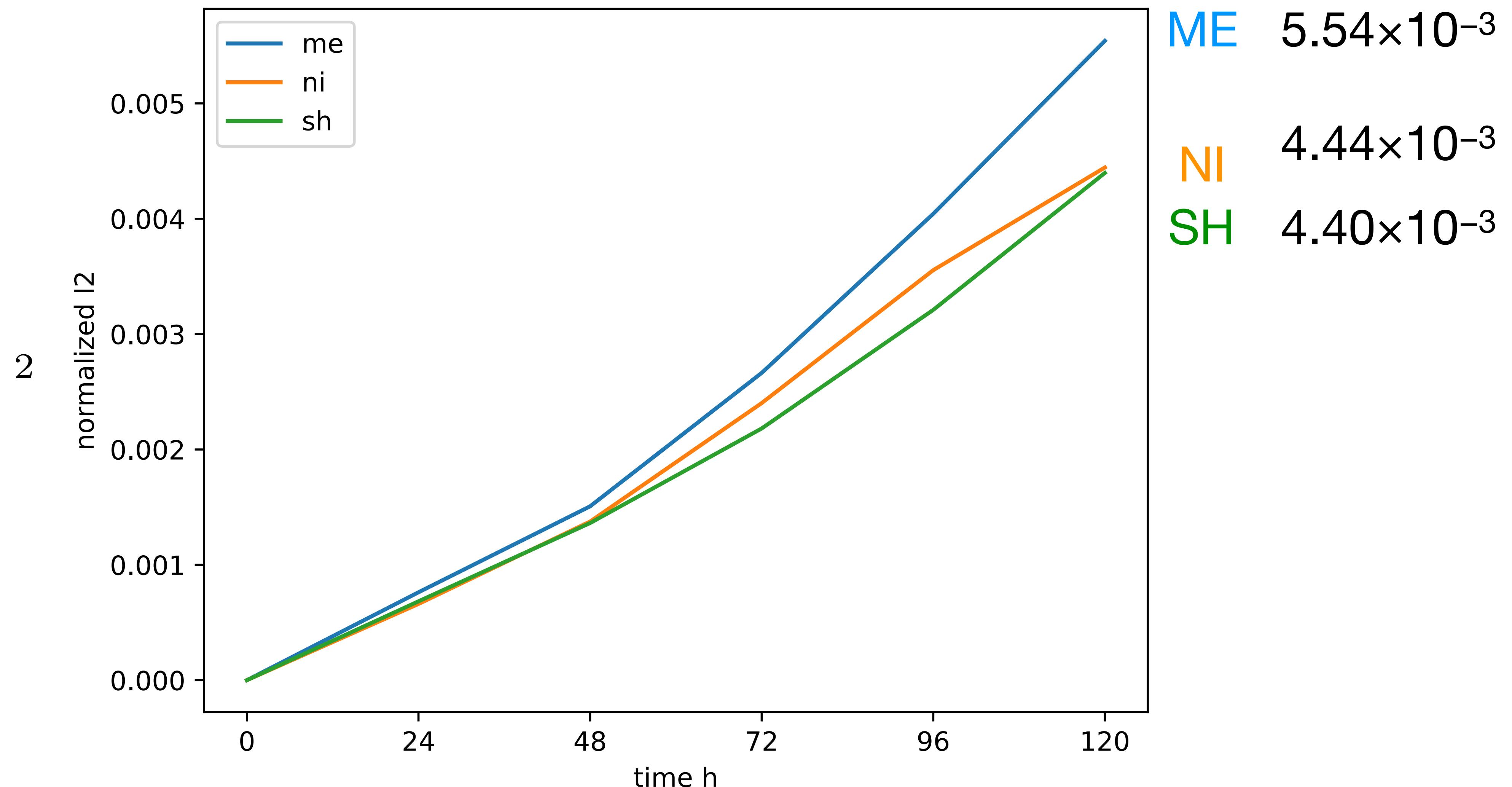


CONTOUR FROM 9050 TO 10250 BY 50

Case 7: 500 hPa解析値からの予報

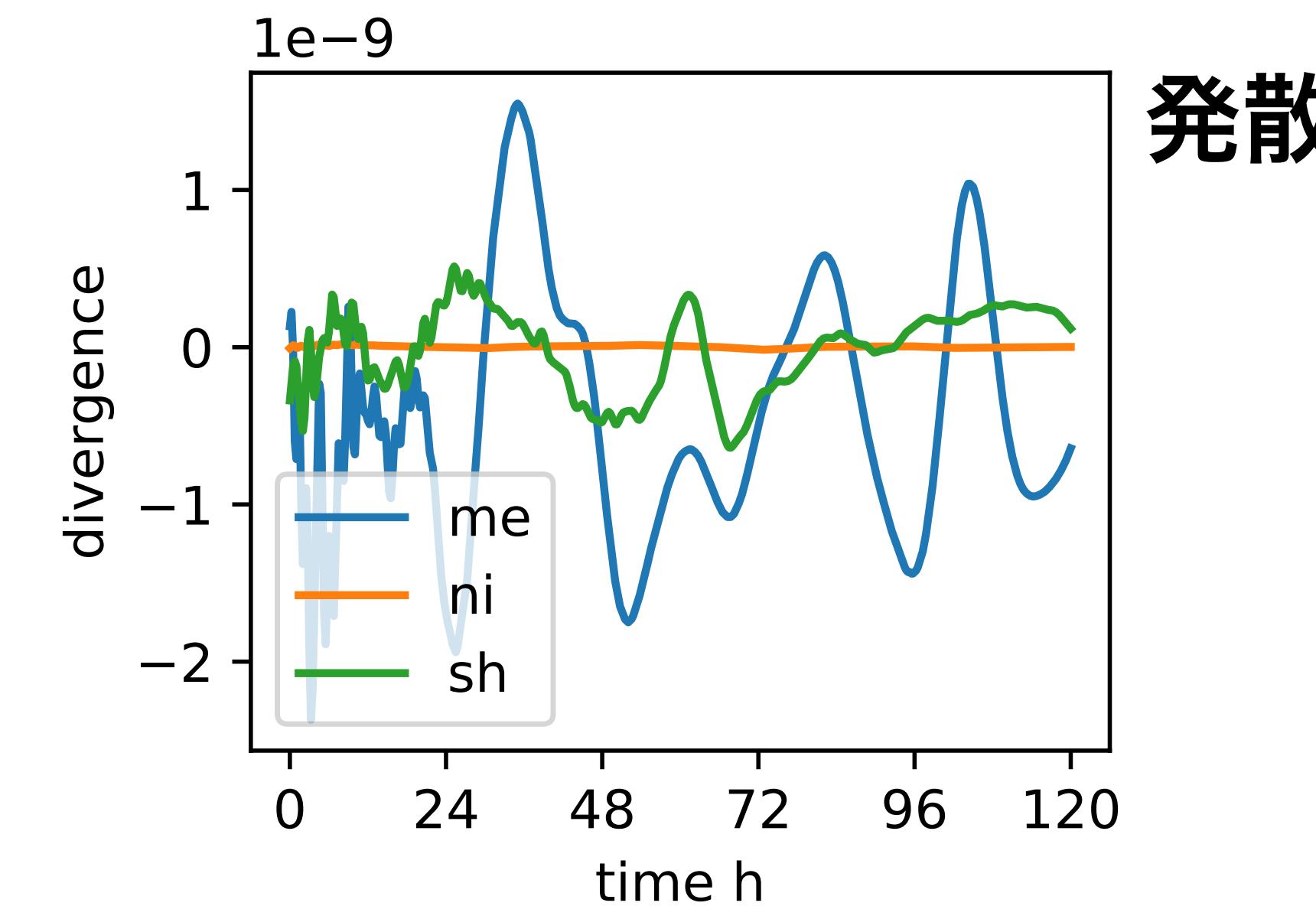
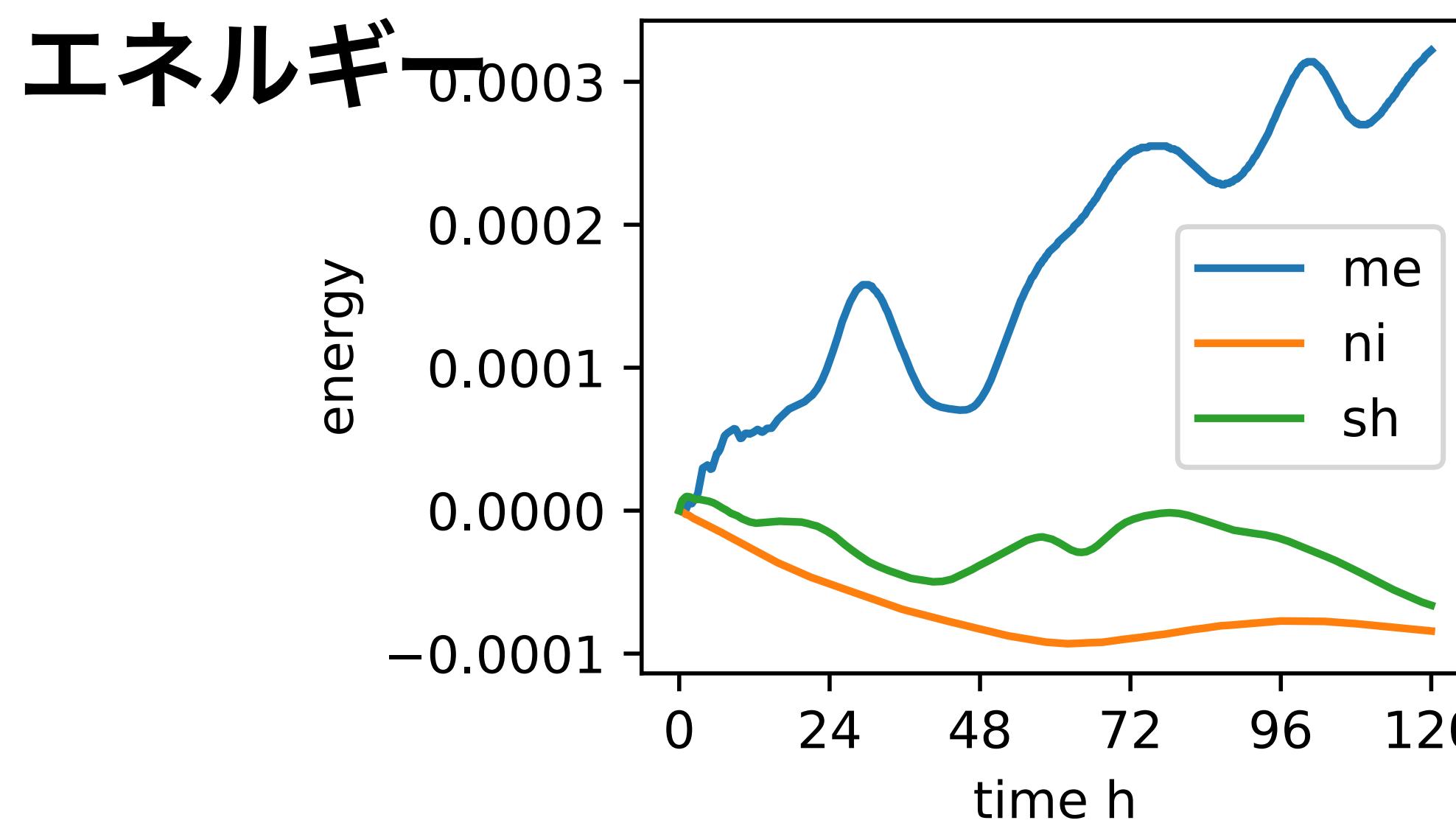
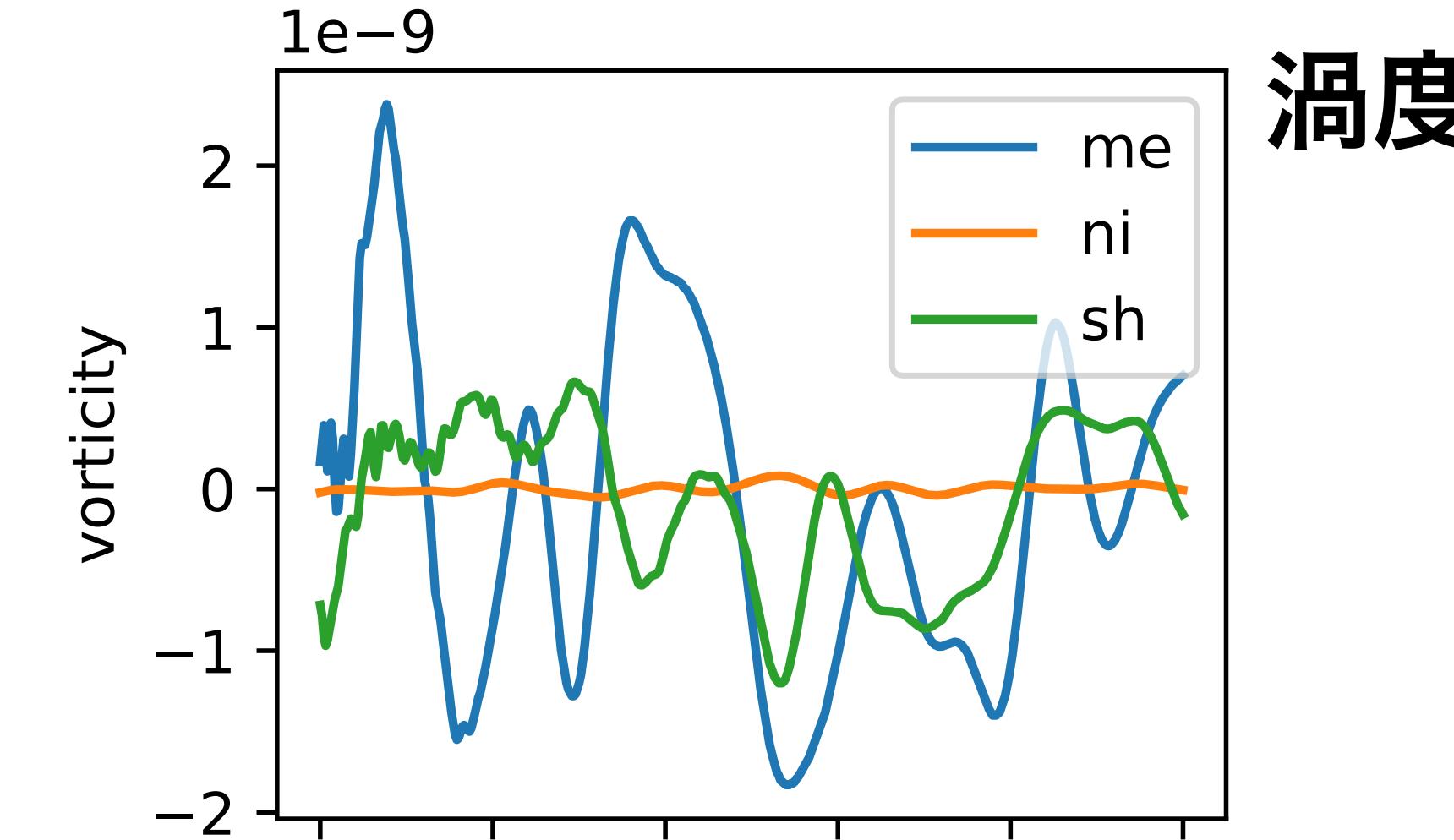
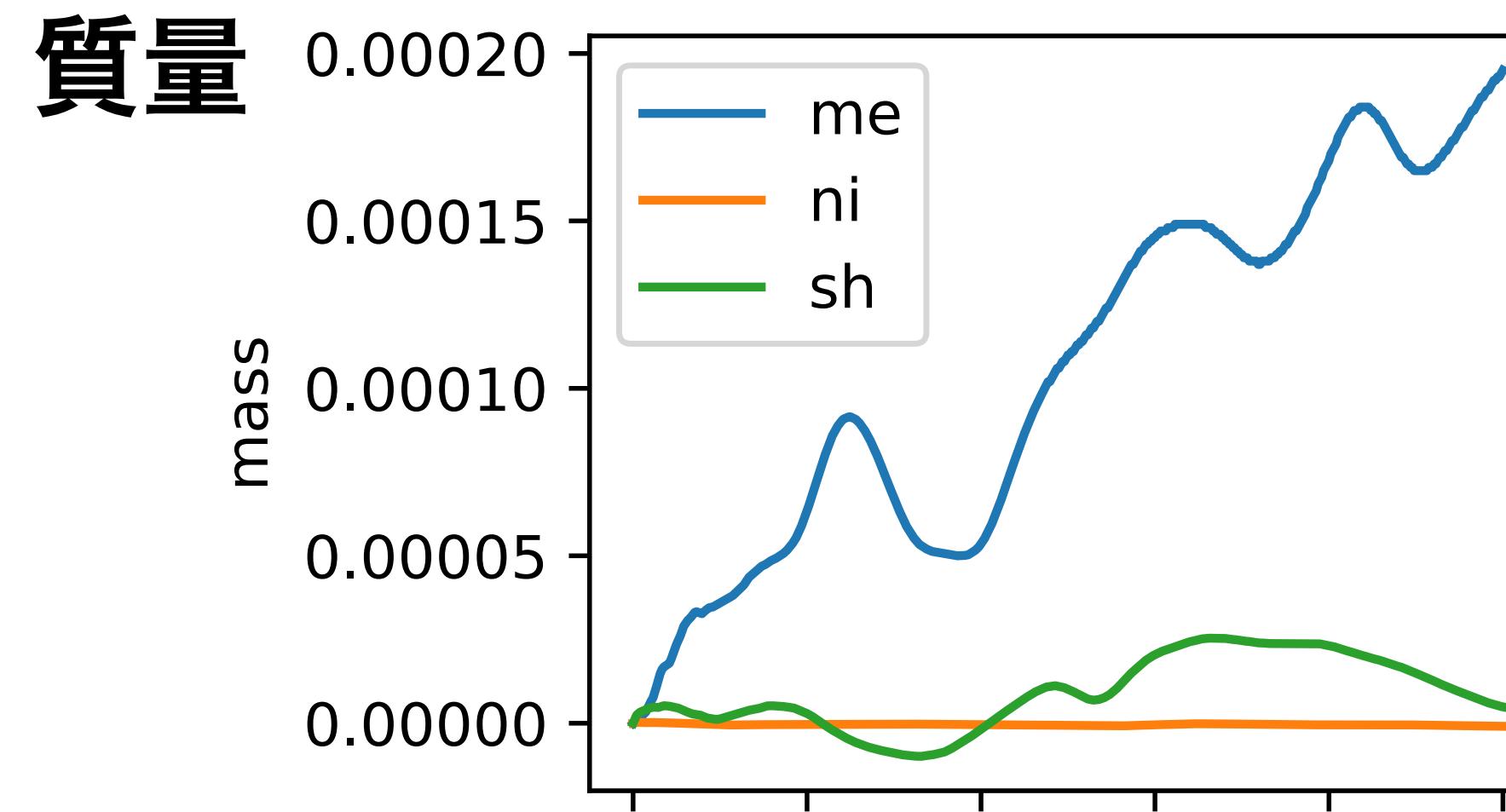
$$n = 2562 \quad t = 15 \text{ min} \quad = 4.25 \quad = 2 \quad 10^7$$

h error from T213



Case 7: 500 hPa解析値からの予報

$$n = 2562 \quad t = 15 \text{ min} \quad = 4.25 = 2 \times 10^7$$



浅水波標準実験

case	2	3	5	6	7
ME	5.39E-09	1.62E-08	7.89E-04	6.81E-03	5.54E-03
NI	2.15E-09	3.350E-09	7.67E-04	6.05E-03	4.44E-03
SH	7.910E-10	6.790E-09	7.82E-04	8.01E-03	4.40E-03

まとめ

- 非一様性 最小エネルギー: 「傷」, 球面螺旋: 極域, 正二十面体: 頂点
- 定常性は, スペクトル法には及ばないものの, RBFも高精度
- 現実的な流れでは, RBFはスペクトル法に遜色ない精度
- 正二十面体 渦度や発散の保存性良好

RBFの適用可能性

- 領域モデル, 局所細分化 (AMR)
- 複雑形状 (地形, 海洋)
- 深い対流 (木星) , マントル対流 (Wright et al. 2010)