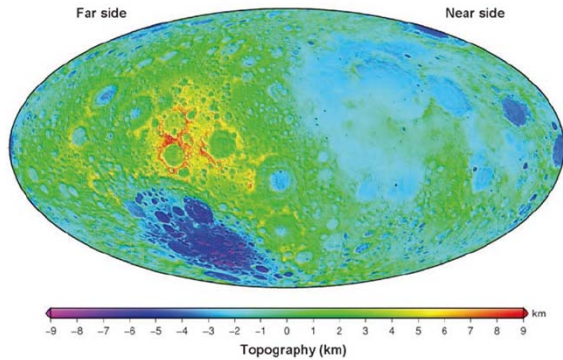


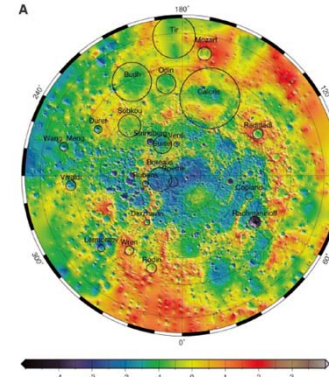
# マントル進化の数値シミュレーションと並列計算

月; 半径 1738 km, 質量  $7 \times 10^{22}$  kg



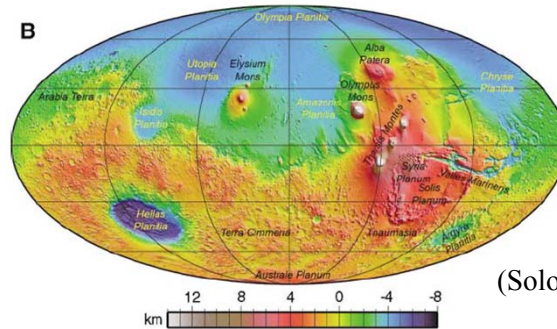
(Haruyama et al., 2009)

水星; 半径 2439 km, 質量  $3.3 \times 10^{23}$  kg



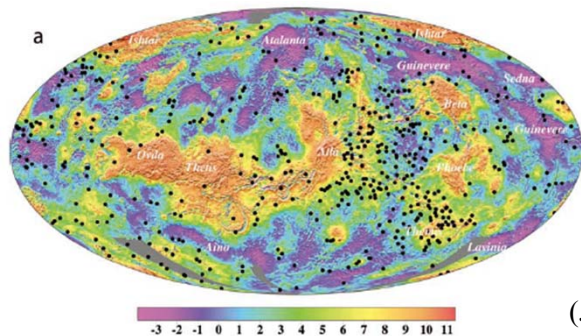
(Zuber et al., 2012)

火星; 半径 3395 km, 質量  $6 \times 10^{23}$  kg



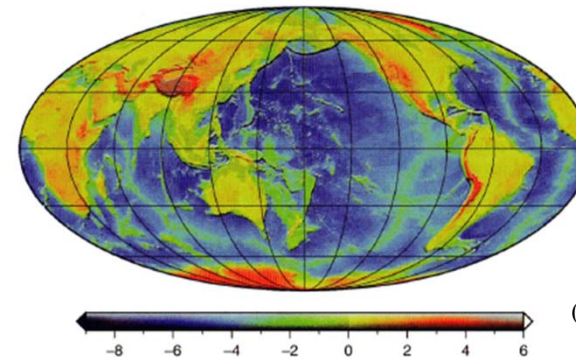
(Solomon et al., 2005)

金星; 半径 6070 km, 質量  $5 \times 10^{24}$  kg



(Johnson & Richards, 2003)

地球; 半径 6378 km, 質量  $6 \times 10^{24}$  kg



(Wiekzorec, 2007)

# 火成活動・マントル対流結合系計算の問題点

運動方程式

$$-\nabla P + \rho \mathbf{g} + \nabla \cdot \left[ \eta (\nabla \mathbf{U} + {}^t \nabla \mathbf{U}) \right] = 0$$

連続の式

$$\nabla \cdot \mathbf{U} = -\nabla \cdot \left[ \varphi (\mathbf{u} - \mathbf{U}) \right]$$

マグマ移動の式

$$\mathbf{u} - \mathbf{U} = -\frac{k}{\varphi \mu} \Delta \rho \mathbf{g}$$

楕円型方程式+粘性率の大きな空間変動+解の不定性



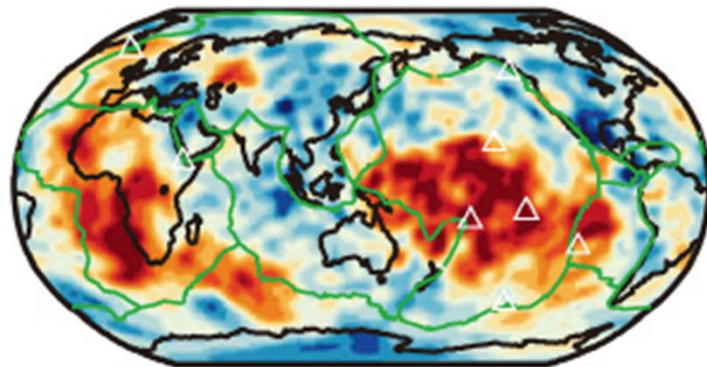
性格の悪い行列

# エネルギー方程式

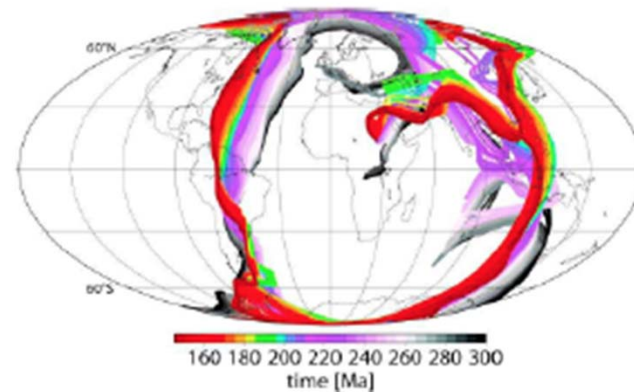
$$\frac{\partial h}{\partial t} + \nabla \cdot [h\mathbf{U}] = -\nabla \cdot [\varphi h_{\ell}(\mathbf{u} - \mathbf{U})] + \textit{source terms}$$

火成活動の時間スケール = さば読んで百年  
　　<< マントル対流の時間スケール(地球で数十億年)

深さ 2800km の S 波速度構造



(Ritsema et al., 2011)



(Steinberger & Torsvik, 2012)

楕円型方程式; 並列計算ではCPU間の通信量大

火成活動の短い時間スケールで長時間積分

⇒ 膨大な時間ステップ数  
数千万ステップ

要するに並列計算に向かない

PC10台でパラメーター10通りの2次元小規模計算

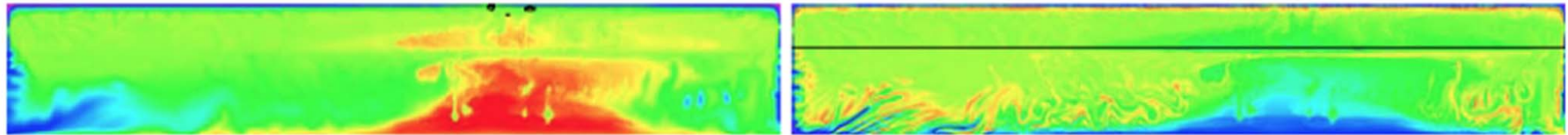
計算時間; 1ヶ月～最長3年

天  
心

# 二次元モデル

温度分布

組成分布



## 運動・連続方程式

直接法; LU分解、SEVP法(シューティング法の2次元版)

逐次近似法; CG法 (ライブラリにお任せ)

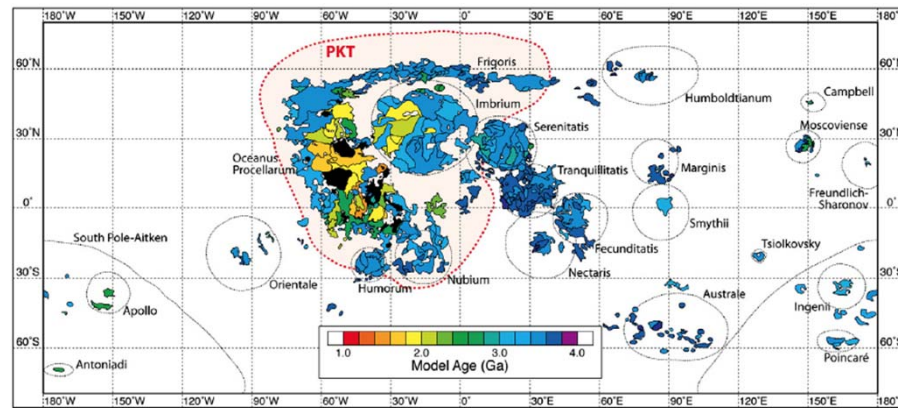
火成活動・マントル対流系の基本的性質の解明

そろそろ飽きてきた

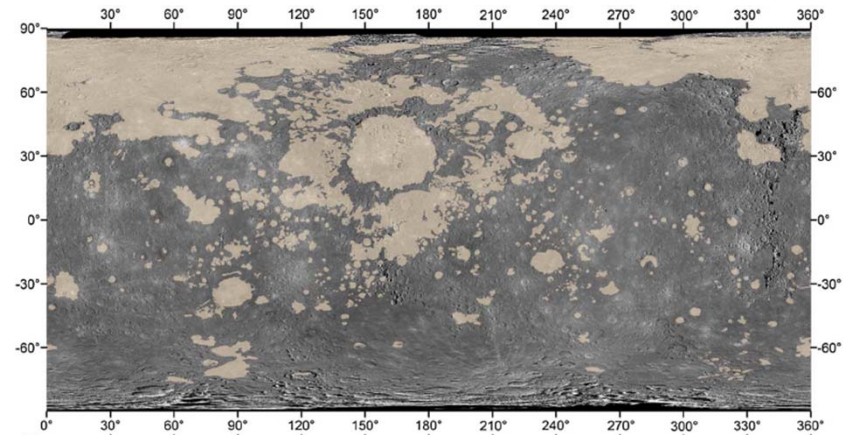


# 三次元モデルの必要性

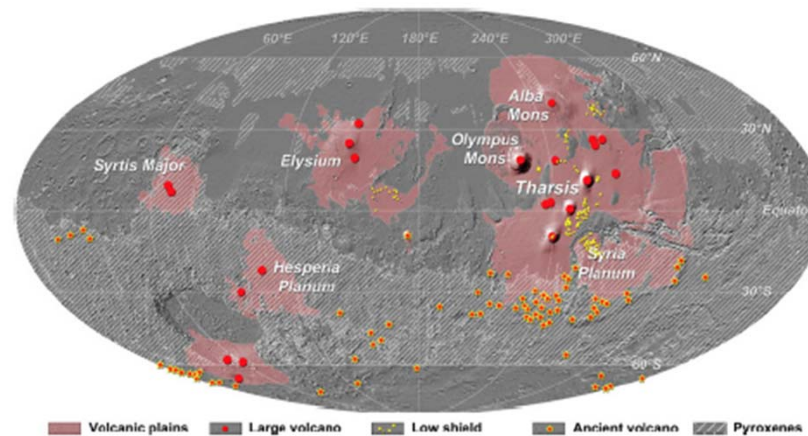
## (1) 小型の惑星の活動の水平不均質性



(Morota et al., 2011)



(Denevi et al., 2013)

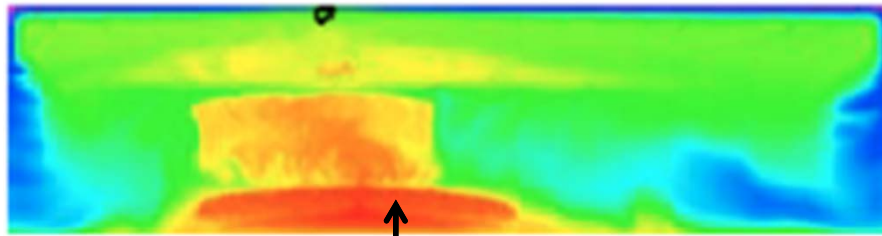


(Grott et al., 2013)

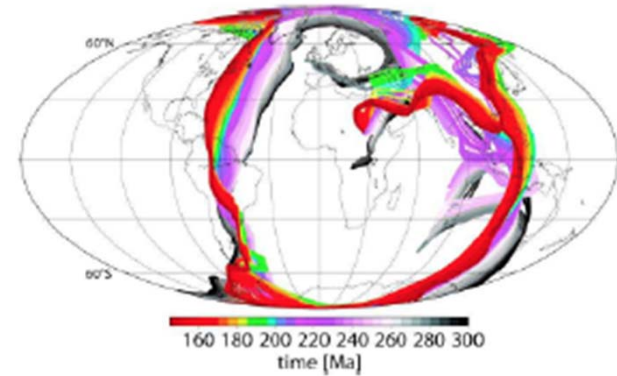
## (2) プレートテクトニクスとマントルの構造

沈み込み帯の位置が安定していることがポイント

温度分布

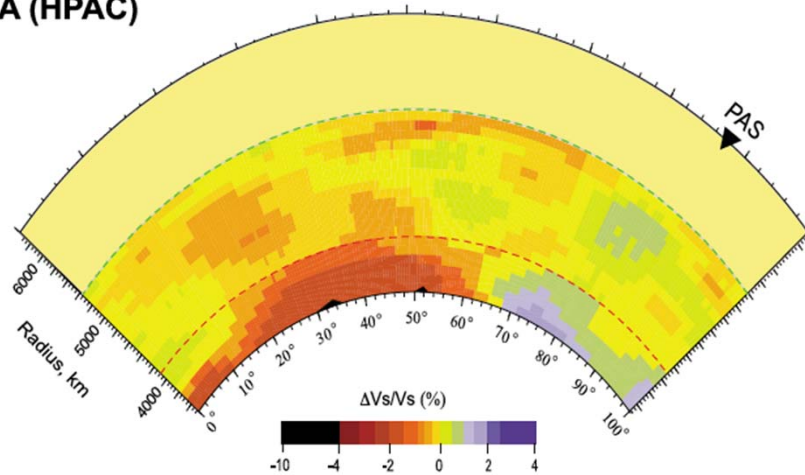


↑  
プルームの源



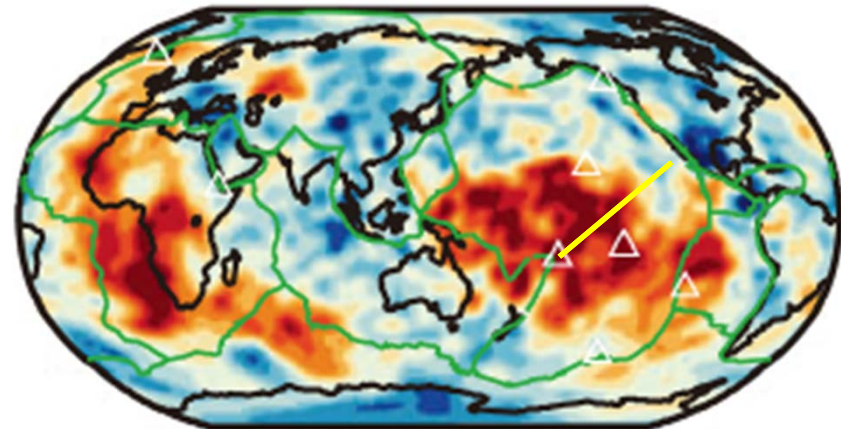
(Steinberger & Torsvik, 2012)

A (HPAC)



(Lieu et al., 2011)

深さ 2800km の S 波速度構造

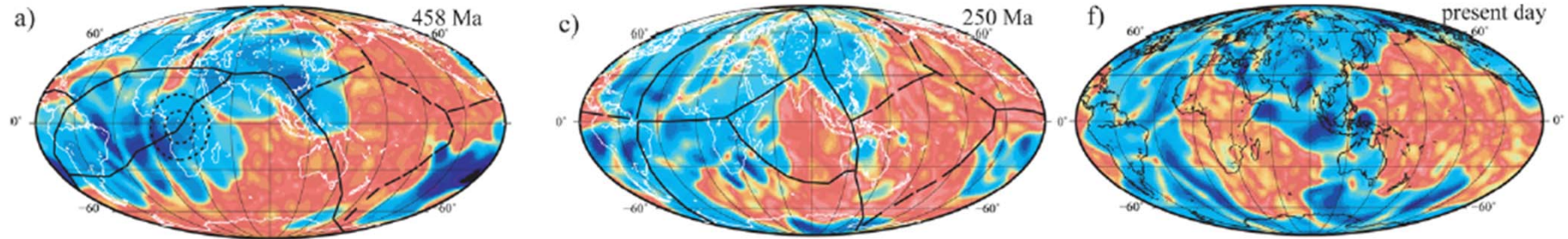


(Ritsema et al., 2011)



# 過去の地球？ プレートと大陸移動

## 最近の5億年間

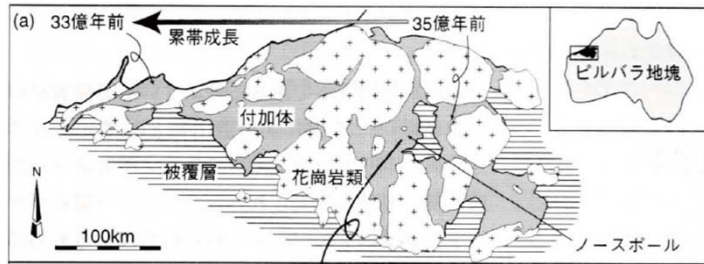


## 11億年前

(Zhang et al., 2010)



## 35億年前



(椛島、寺林2002)

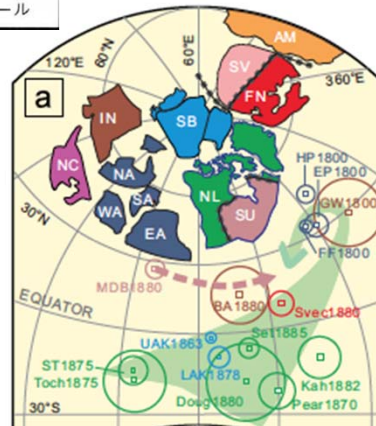
## 7.2億年前



(Liet al., 2007)

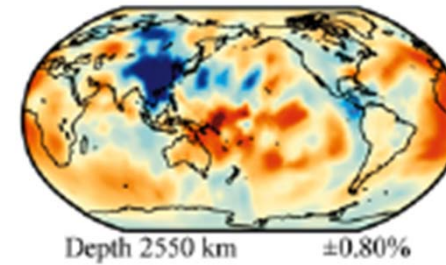
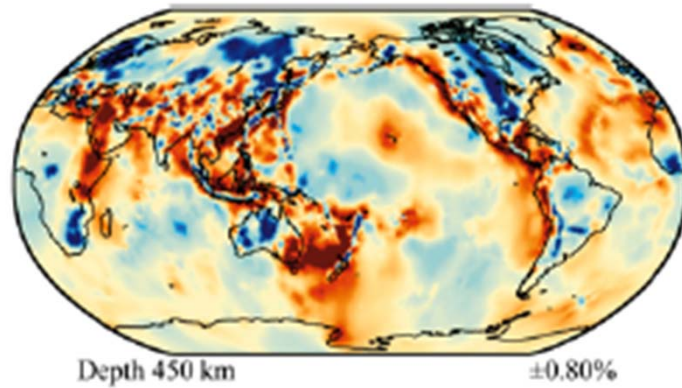
## 19億年前

(Liet al., 2007)



# (3) CMBの面積 < 地表面積 (特に月で)

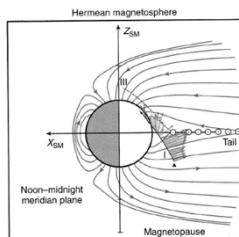
マントル深部での対流攪拌と不均質構造



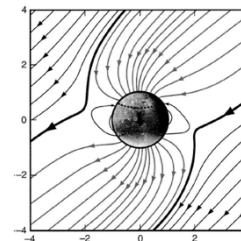
(Li et al., 2008)

コア・マントルの相互作用; マントル深部の熱史⇒コアの熱史  
磁場あり

水星(半径2438km)

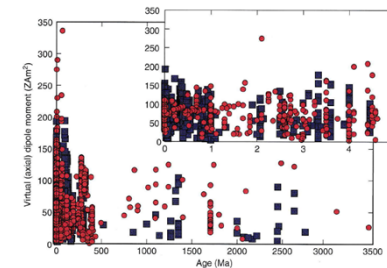


Ganymede(半径2634km)



(Connerney, 2007)

地球(半径6400km)



(Tauxe & Yamazaki, 2007)

磁場無し

火星(半径3540km)、金星(半径6052km)、Io(半径1821km)、Callisto(半径2400km)、Titan(半径2575km)

# 三次元計算; 逐次近似法

CITCOM-Sコード; 有限要素法 (Zhong et al., 2010)

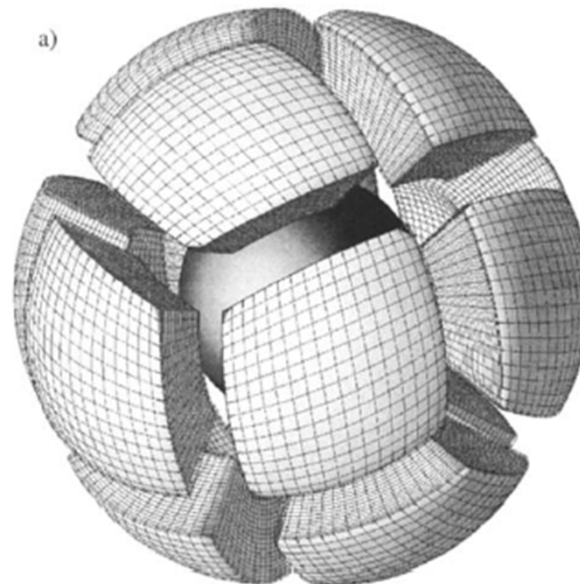
連続の式  $B^T u = 0$  .....(a)

運動方程式  $Au + Bp = f$  .....(b)

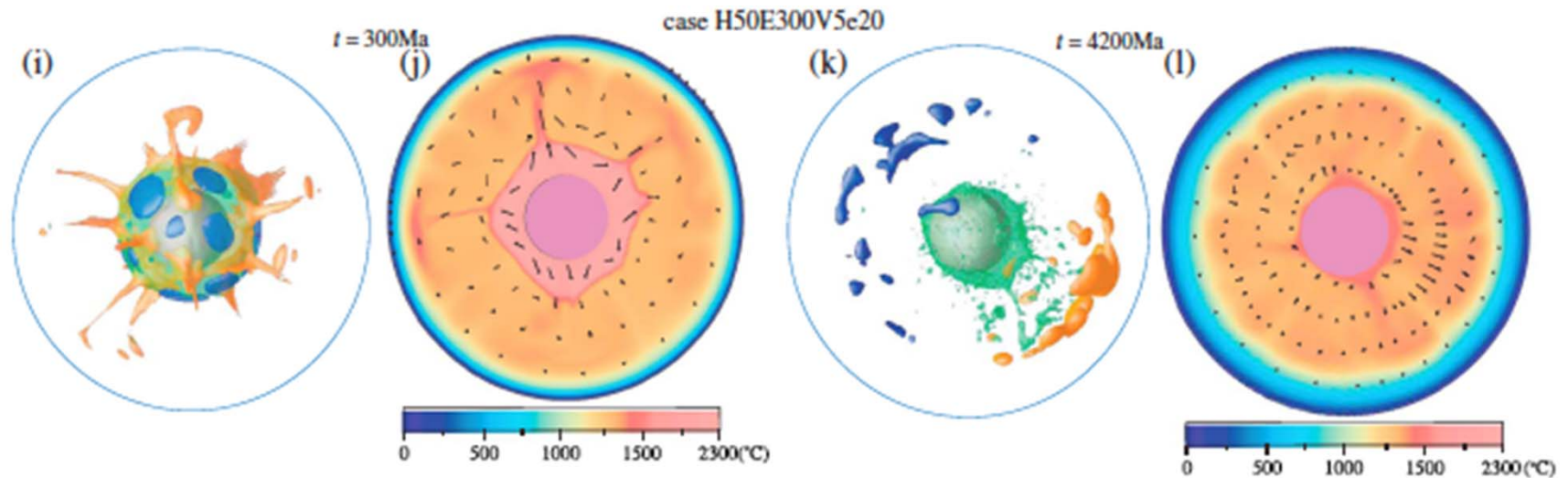
p推定  $\Rightarrow$  u計算 (式b; 共役勾配法)

$\Rightarrow$  p補正;  $p = p - \lambda B^T u \Rightarrow \dots$

領域分割; 12に分割



# 計算例;月のマントル対流(CITCOMs)



(Zhang et al., 2013)



# SIMPLE法; STAG-YY (Tackley), GAIA (Stemmer)

$$\text{運動方程式 } \mathbf{A}u + \mathbf{B}p = f \quad \dots\dots\dots(a)$$

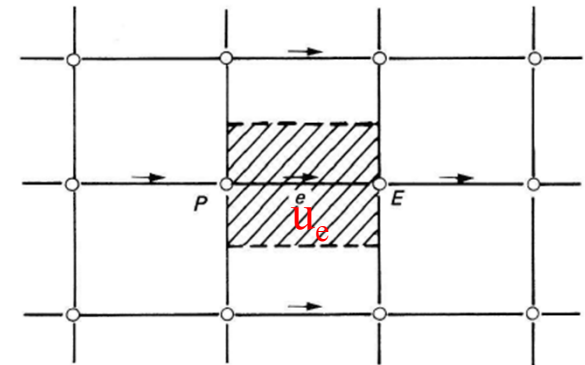
$$\text{連続の式 } B^T u = 0$$

(a)より

$$u_e = [f - Bp - Cu_{neighbour}] / a_e$$

として

$$B^T (1/a_e) B p = B^T [f - Cu_{neighbour}] \quad \dots\dots\dots(b)$$



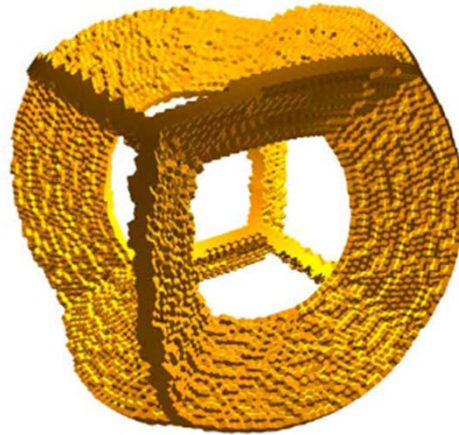
(a), (b)を交互に解く。(SOR, CG)



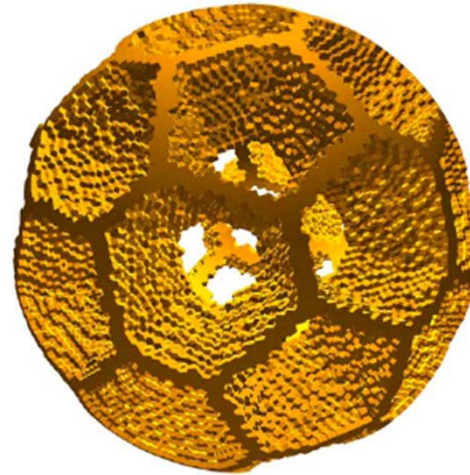
# 領域分割

GAIA

6 CPU

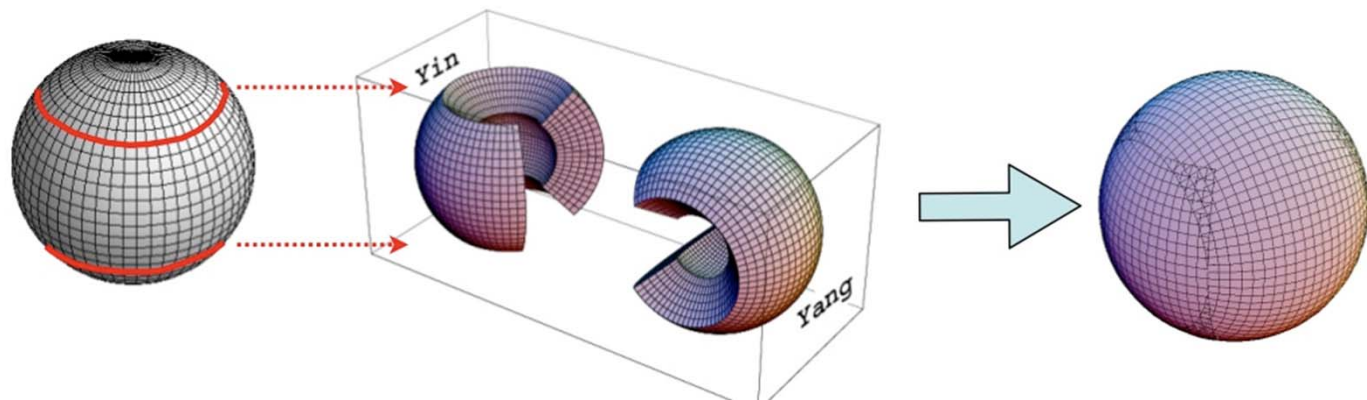


32CPU



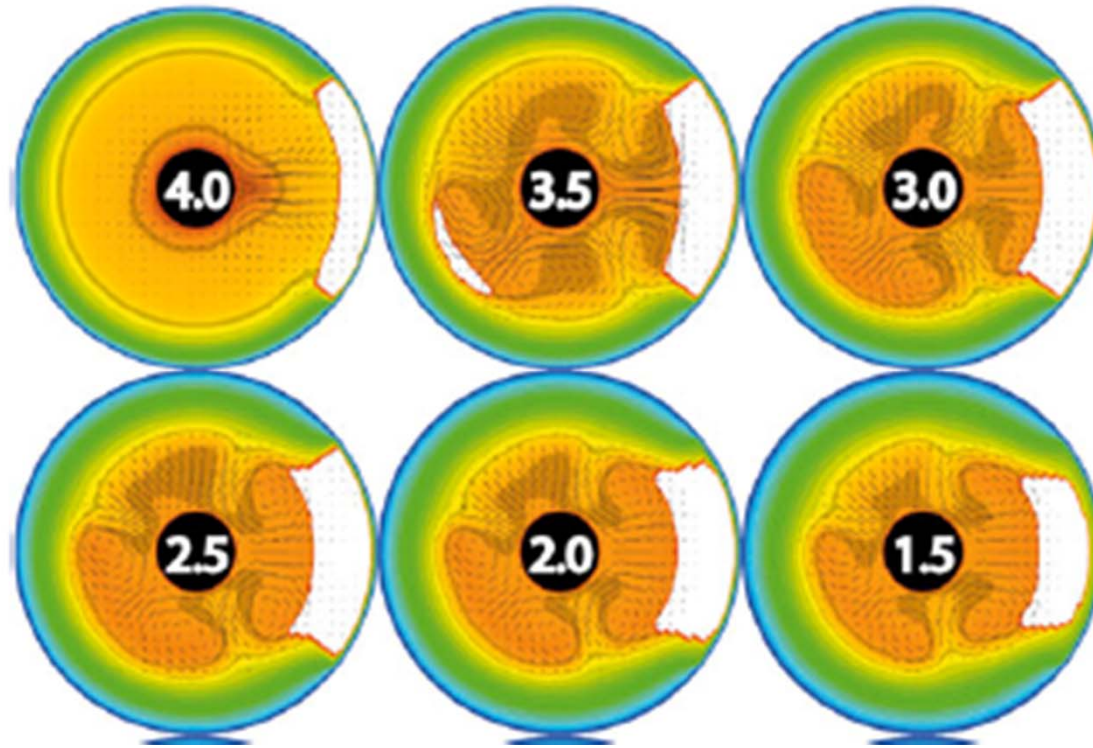
STAG-YY; Ying-Yang法

(Huttig & Stemmer, 2008)



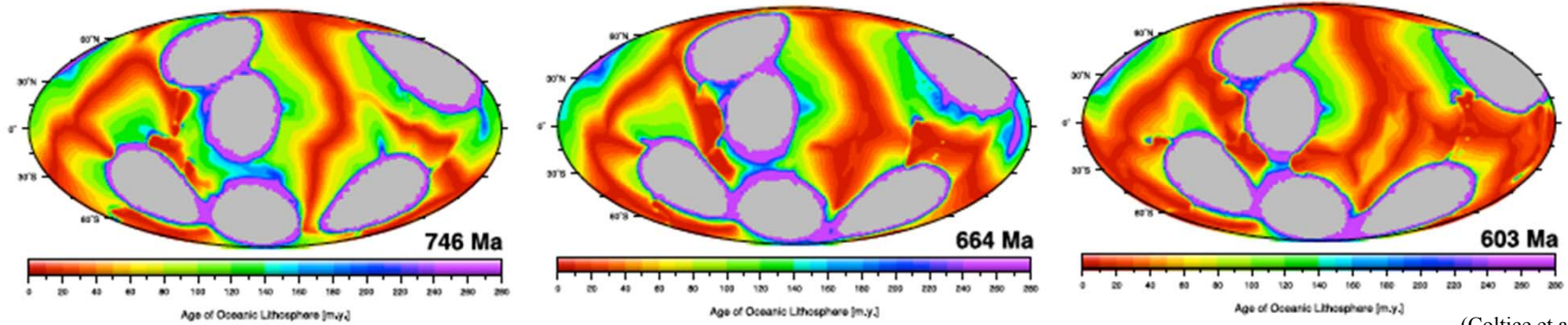
(Kameyama; home page)

# 計算例;月のマントル対流(GAIA)

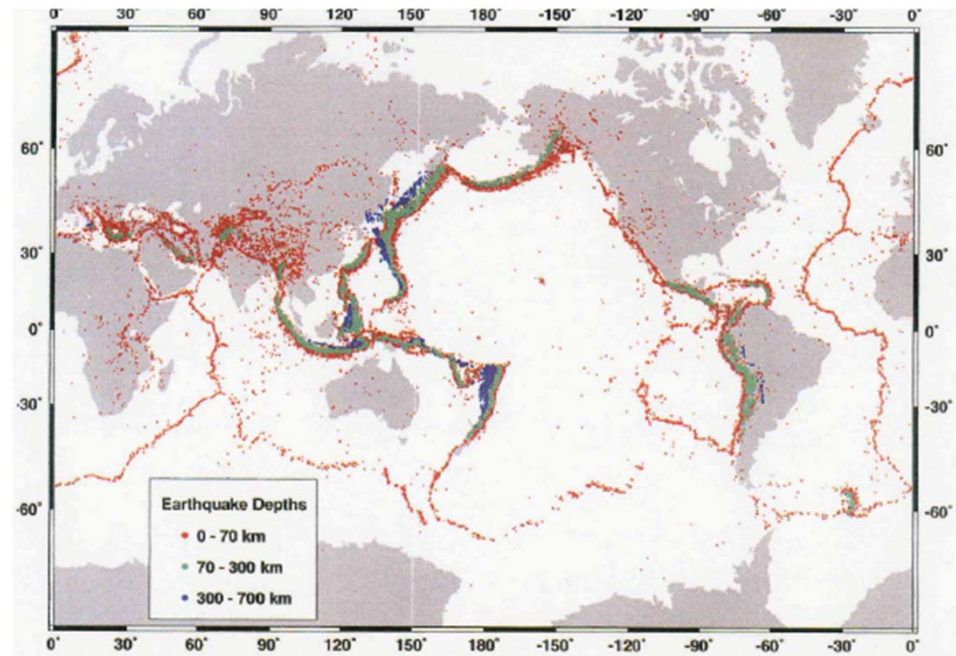


(Lanouville et al., 2013)

# プレート+大陸の'self-consistent model'の例(STAG-YY)



(Coltice et al., 2013)



(Schubert et al., 2001)

# 世の中そんなに甘くはない(1); 収束が悪い

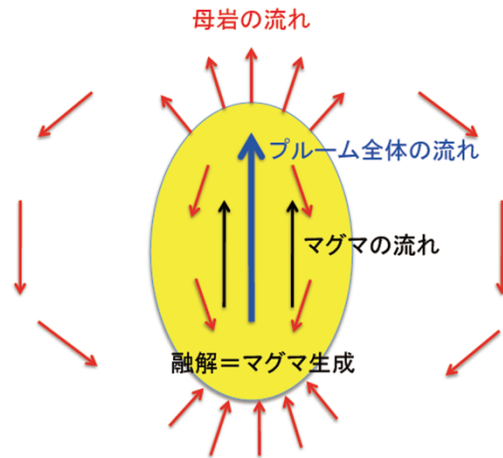
火成活動が有るときの連続の式; 非常に正確に解く必要あり

$$-\nabla P + \rho \mathbf{g} + \nabla \cdot \left[ \eta (\nabla \mathbf{U} + {}^t \nabla \mathbf{U}) \right] = 0$$

$$\nabla \cdot \mathbf{U} = -\nabla \cdot \left[ \varphi (\mathbf{u} - \mathbf{U}) \right]$$

$$\mathbf{u} - \mathbf{U} = -\frac{k}{\varphi \mu} \Delta \rho \mathbf{g}$$

マントル対流と火山活動のポジティブフィードバック→計算不安定



世の中の人たち; 質量保存則は無視。  
計算誤差の中に埋もれさせる。

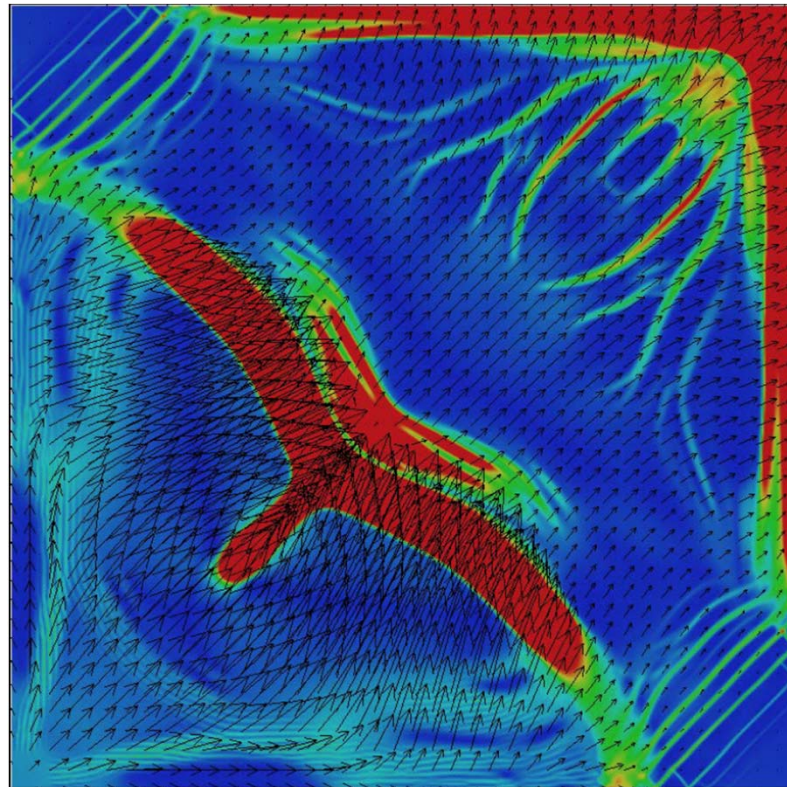
ACuTE法なら見込みあり?



ACuTE法(差分法);専門家の解説(亀山)

## 世の中そんなに甘くはない(2)

プレート運動の3Dモデル(Miyagoshi, Kameyama, Ogawa)  
流速とプレートの破壊の程度





性格の悪い楕円型の方程式を非常に正確かつ速く解く。

ノード間のデータ通信が一瞬でできる事

メモリーから演算部へのデータ転送が一瞬でできる事

欲しいコンピューター

(やけっぱち！)

ワンチップ・エクサフロップス・スーパーコンピューター  
「世界一」でなくてもいい、速ければいい。