

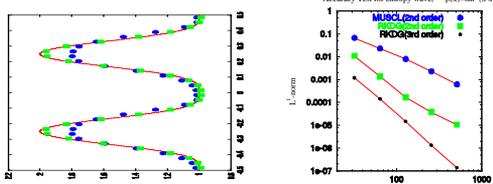
# RKDG法を用いた高精度数値流体計算法の開発

小山洋\*(神戸大自然科学研究科), 西川裕章\*\*(ミシガン大航空宇宙工学科)

(\* ) hkokyama@kobe-u.ac.jp (\*\*) hiroakin@engin.umich.edu

## TVDで満足していませんか？

メッシュ法の高精度化としてTVD (total variation diminishing) を満たす方法が広く使われている。しかし、これが高精度を示すのは1Dのみであって、2Dではほとんどfirst-orderであることが指摘されている[1]。1Dにおいてもcritical pointではfirst-orderに落ちてしまい、high-orderを保つことは難しい。これに対してTVB (total variation bounded) を満たすRKDG (Runge-Kutta discontinuous Galerkin) 法ではcritical pointでも精度が落ちることがない。



Entropy waveのテスト: 同じ2次精度のスキームでもRKDGの方が厳密解に近い

## いま時代はRKDGへ

欧米の航空工学の分野を中心に、いまRKDGを用いた高精度スキームが盛んに研究・応用されている。その適応されている問題はEulerのみならず、Navier-Stokes equation[1], elliptic problems, convection-diffusion equations[3], Maxwell equations[6]などに及ぶ。

### Outline of the RKDG Method for Euler equation

$$\frac{\partial \mathbf{U}}{\partial t} + \text{div} \mathbf{F} = 0, \quad \mathbf{U} = \begin{bmatrix} \rho \\ \rho \mathbf{V} \\ E \end{bmatrix}, \quad \mathbf{F} = \begin{bmatrix} \rho \mathbf{V} \\ \rho \mathbf{V} \mathbf{V} + p \mathbf{I} \\ (E + p) \mathbf{V} \end{bmatrix}$$

いまテスト関数  $w$  を乗じてセル内の体積積分を行えば

$$\int w \frac{\partial \mathbf{U}}{\partial t} dV + \oint w F_n dS - \int F \text{grad} w dV = 0,$$

ここで部分積分によって体積積分の項と表面積分の項に分けた。この表面積分の  $F_n$  の値にセル間の不連続性を利用したリーマン問題の解を用いることで風上性が保たれる。いま保存量  $U$  のセル内の分布をルジャンドル多項式で表すと、

$$\mathbf{U} = \sum U_i(t) \phi_i(\mathbf{x}), \quad \phi_0 = 1, \quad \phi_1 = \frac{x - x_j}{\Delta x_j / 2}, \quad \phi_2 = \frac{y - y_j}{\Delta y_j / 2}, \dots$$

$$C_{ii} \frac{\partial U_i}{\partial t} + \oint \phi_i F_n dS - \int F \text{grad} \phi_i dV = 0, \quad \text{ここに } C_{ii} = \int \phi_i \phi_i dV$$

今  $\phi$  として直交系を選んだので時間微分と空間微分を完全に分離することが出来た。  $i = 0$  から通常のFinite Volumeの表式を得る。すなわちRKDG法はFinite Volume Methodの拡張と言える。RKDG法ではセル平均の他に勾配や高次の微係数の方程式を支配方程式より時間積分するのである。表面積分、体積積分にはquadrature ruleを用いる。このときquadrature pointをうまく選んであげることでコストを削減出来る。

一度差分化してしまえば、TVD Runge-Kuttaによって時間積分を行えば良い。すなわち

$$\frac{\partial U}{\partial t} = L(U)$$

と書けば、時間2次精度では

$$U^{(1)} = U^n + \Delta t L(U^n)$$

$$U^{n+1} = \frac{1}{2}(U^n + U^{(1)}) + \frac{1}{2} \Delta t L(U^{(1)})$$

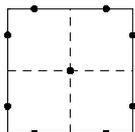
時間3次精度では

$$U^{(1)} = U^n + \Delta t L(U^n)$$

$$U^{(2)} = \frac{1}{4}(3U^n + U^{(1)}) + \frac{1}{4} \Delta t L(U^{(1)})$$

$$U^{n+1} = \frac{1}{3}(U^n + 2U^{(2)}) + \frac{2}{3} \Delta t L(U^{(2)})$$

Quadrature point の例。2D2次精度の場合、表面積分で8点、体積積分で9点を用いる[5]



## RKDG法の特徴

- セル内の分布をセル間の補間ではなく支配方程式から求める。各セルで独立な方程式なのでコンパクトなスキームである。(並列計算に有利)
- セル内の基底が直交系であるので時間微分の項がカップルしない。時間方向の積分が容易
- セル境界で解が不連続である。リーマン問題が設定できる
- 外力、輻射冷却などのSource項を同時に高精度化出来る。

**拡散項を解く場合は注意が必要である。** Cockburn & Shu (2001)[7]はheat equation,  $u_t = u_{xx}$  をDGを用いて解くとメッシュの数を増大させても正しい解に収束しないことを警告している。

このような時は新たな変数  $q$  を導入しfirst-order systemに書き換えて、

$$u_t - q_x = 0, \quad q - u_x = 0,$$

この連立方程式にDGを施せば正しい結果が得られる(Local DG method[3])。

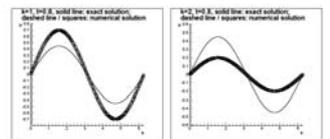
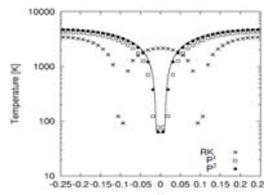


Fig. 2. The nonlocal discontinuous Galerkin method [3, 2] applied to the heat equation for the cell on regular meshes with  $U = 0.001$ ,  $F = 0$ , 100 cells. Third order Runge-Kutta time. Solid line is the exact solution, dashed line and square symbols the computed solution of the cell errors. Left:  $\theta = 1$ , Right:  $\theta = 2$ .

又は、要素間の連続性を取り戻す項を加えたpenalty function methodに基づく手法[8]でも、正しい解を計算できることが知られている。

## Current status & Future works

- Radiative Cooling Hydrodynamics (Thermal Instability) 我々はこれまでに輻射冷却する星間ガスの1Dテスト計算を行い、MUSCLスキームに比べて1/3のメッシュ数でconvergeするという結果を得た。このメッシュスケールは熱伝導で決まる緩和スケールとほぼ等しい。RKDG法ではより少ないメッシュでもconvergenceが見られた。これはRKDG法がより少ないメッシュで解に収束するasymptotic preserving schemeであることを意味している。



(a) Temperature profile: 40 points calculations are shown. The solid line denotes the finest solution obtained by  $P^2$  240 points calculation.

$$\begin{aligned} \frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}(\rho v) &= 0, \\ \frac{\partial \rho v}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}(p + \rho v v) &= 0, \\ \frac{\partial E}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}((E + p)v - K \frac{\partial T}{\partial x}) &= \rho \Gamma - \rho^2 \Lambda \end{aligned}$$

- X: MUSCL(2nd order)
- : RKDG(2nd order)
- : RKDG(3rd order)

## (2) Ideal/Resistive MHD

RKDGのMHDへの応用は開発途上にある。問題は、やはり  $\text{div} \mathbf{B} = 0$  のように満たすかである。一つの興味深い手法は、(セル内に限られるが) divergence-freeなbasis functionを用いる方法である[6]。現在、我々はこの手法をベースにした磁気流体スキームの開発に取り組んでいる。

## References

- [1] Bassi, F. & Rebay, S.: A higher-order accurate discontinuous finite element method for the numerical solution of the compressible Navier-Stokes equations, JCP **131** (1997) 267-279.
- [2] Goodman, J. & LeVeque, R.: On the accuracy of stable schemes for 2D scalar conservation laws, Math. Comp. **45** (1985), 15-21
- [3] Cockburn, B. & Shu, C.-W.: The local discontinuous Galerkin finite element method for convection-diffusion systems, SIAM J. Numer. Anal. **35** (1998), 2440-2463.
- [4] Cockburn, B. Hou, S. & Shu, C.-W.: The Runge-Kutta local projection discontinuous Galerkin finite element method for conservation laws IV: The multidimensional case, Math. Comp. **54** (1990) 545-581
- [5] Cockburn, B. Hou, S. & Shu, C.-W.: The Runge-Kutta discontinuous Galerkin method for conservation laws V: multidimensional systems, JCP **141** (1998) 199-224
- [6] Cockburn, B. Li, F. & Shu, C.-W.: Locally divergence-free discontinuous Galerkin methods for the Maxwell equations, JCP **194** (2004) 588-610
- [7] B. Cockburn and C.-W. Shu, Runge-Kutta discontinuous Galerkin methods for convection-dominated problems, J. Sci. Comput. **16** (2001), no. 3, 173-261.
- [8] J.T. Oden, Ivo Babuska, and C. E. Baumann, A discontinuous hp finite element method for diffusion problems, JCP **146** (1998), 491-519