# 特集「衝突現象・衝突地形」 小惑星形状モデリングと衝突地形 ~はやぶさが教えてくれるもの~ 小林 慎悟'、出村 裕英'、橋本 樹明<sup>2</sup>、斎藤 潤<sup>3</sup>

# 1. 小惑星形状と引き出せる情報

衝突地形と聞くと普通は円いクレーター地形を思い 浮かべるが、実は小惑星形状自身も衝突で割られ削ら れ侵食された衝突地形である.そして、その小惑星全 体形状を厳密に調べることで、母天体の大きさやその 破壊と進化の過程を復元でき、興味深い結論を引き出 せる可能性があるのだ.

小惑星は衝突によってかなり砕かれ、亀裂長と亀裂 間隔がほぼ等しい Fully Cracked Condition[1]と呼ば れる限界までひびが入っているか、もしくは幾つかの ブロックが重力で弱く結びついていると考えられてい る(rubble pile). ある程度以上小さければ、衝突破壊 の過程で飛び散った一枚岩のカケラ(monolithic asteroi d)として存在するかもしれない. 破壊された当時の形 状を保持していれば、Facets (図1) と呼ばれる、母 天体上のクレーター壁の一部と見られる凹地形 [2]な どから、衝突破壊される前の母天体の大きさが推定で きる. 衝突実験からクレーターの直径・深度比は小 天体の曲率によって変わることが確かめられているか らだ[3].また、小惑星形状の三軸比から、衝突破壊 過程がコア型[4]であったか否かも押さえられる (図2). 探査機の軌道や慣性運動から小惑星質量が求められれ ば、小惑星形状に基づく体積から密度が求められる. 密度は小惑星の組成と進化履歴を知るうえで、最も基 本的な物理量である. 組成成分の密度と比べることで, どれだけ衝突で密に締まっているのか、逆に破砕され て見かけの密度が小さくなっているのか、などの考察 の基礎である.

- 2. ISAS/JAXA
- 3. 西松建設



図1: Facet 概念図. 語義は宝石のカット面.





2005年6月に到着予定の小惑星探査機はやぶさのター ゲットは、日本版ロケットの父、故糸川博士にちなん で25143 Itokawa と名付けられた[5].おおまかな大き さはレーダー観測から548x312x276m +/-10%と見積 もられている[6].これくらい小さいと、いわゆる rubble pile ではなく単一岩体であっても不思議ではな い.破局的衝突で放出されたカケラのひとつかもしれ ない.世界の探査計画の中で最も小さなターゲット小 惑星である.きっと、これまでの大きめの小惑星とは 違った知見をもたらしてくれるだろう.

形状認識成果である3D地図は、衝突地形のサイエン スに資するだけでなく、他観測機器成果をマッピング する白いキャンバスとしても重要である. 隕石の母 天体、小惑星における圧密/固化/続成/変成といっ

<sup>1.</sup> 福島県立会津大学コンピュータ理工学部

た作用を知るためには、地球で手に入る隕石サイズ以 上の大きな構造を知る必要がある.しかし、その手が かりは非常に少ない.たとえば圧密時の脱水構造が破 断面での「組成/粒径/風化度」の分布特徴として見 えてきたら、機械的強度の弱線としての議論が可能と なり、そのインパクトは計り知れない.また、破壊前 の構造を組み上げるパズルピースとしての模様として も有用であり、衝突破壊過程を制約する大切な鍵にな ると考えている.

会津大の月惑星グループでは、はやぶさ搭載の望遠 カメラ AMICA[7]を用いて小惑星形状モデルを作成 する予定である.2003年度、AMICA のプロトモデル を用いてテストデータを取得し、高度分解能1 m級の 形状認識の基礎を固めた.以下、その原理・手順なら びに現状と課題を報告する.到着まで残されたあと1 年余りで手順を確立し、運用計画支援ツールとしても 使えるような、マッピングに資する可視化ツールの構 築も考えているので、御意見頂ければ、できる限り取 り入れさせて頂きたい.

# 2. 小惑星形状認識の手法

画像を用いた不規則形状小天体の形状認識は,画像 に楕円体をフィッティングさせていく方法に始まり, 現在では2つに大別できる.ひとつは,低解像度のた めにステレオを構築できない場合で,リムやターミネー タ(明暗境界線)から,球面に格子状に配置されたコン トロールポイントによって,3次元形状モデルを構築 していく方法である.もうひとつは,フォボスなど広 範囲に渡って十分な高解像度の画像が得られた場合で, ステレオ観測によって,形状だけでなく,詳細な地形 まで復元できる場合である[8]. はやぶさの,小惑星 近傍でのデフォルト運用である Home Position(HP)保 持運用とは,電力確保のため探査機は常に太陽に背を 向け,保持 BOX と呼ばれる一定範囲を遊弋すること である.そのためターミネータを観測することは困難 である.また,はやぶさに搭載されている AMICA (Asteroid Multi-band Imaging Camera)は,視野角5.7x 5.7deg, 画素数1024x1024pixel, 空間分解能1m/pixel (高度10km)という高解像度での撮像が可能となって いる.我々のグループは,上記の制約と合わせて,単 ーカメラのため,2枚の画像を同時刻に撮像できない こと(非同期撮像),さらに,自転走査による多視点か らの高解像度画像が得られる点から,2枚の画像から ステレオを構築し,エピポーラ幾何と呼ばれる幾何拘 束を利用した形状復元手法を提案する.エピポーラ幾 何を利用した本手法は,探査機の動きと小惑星の自転 を相対運動としてひとまとめにして考えることができ るという利点がある.以下,その原理と手法を述べる.

# 3. カメラモデル



図3:ピンホールカメラモデル

ピンホールカメラモデル(図3)[10]は,被写体の投 影面である画像平面 | を含む画像座標系(c, x, y) と,焦点面 F を含むカメラ座標系(C, X, Y, Z) から構成される.ここで,画像平面と焦点面は並行で あり,レンズ中心 C を通る両平面に垂直な線を光軸 といい,また,画像平面から焦点面までの距離を焦点 距離という.空間中の物体 M は,レンズ中心 C を通 り,画像平面上の m として射影される.ここで,実 際のデジタル画像の座標系においては,原点は画像左 上に位置し,通常,水平右方向に x 軸,垂直下方向に y 軸をとることから,このモデルとは座標系が異なる. さらに、レンズ歪や焦点距離などのカメラが持つ固有 のパラメータも考慮する必要がある.そこで,正規化 カメラの概念を導入する.デジタル画像座標mから正 規化画像座標 xへの変換  $\hat{x} = A^{-t}\hat{m}$  (ここで, A は, カメラの固有パラメータを含む3×3行列)によって, どのカメラを用いても,同じようにビジョンの問題を 考えることが出来る.なお" "は拡張ベクトルを表す. また,実際には A は,次式 A<sub>0</sub>を初期値として5章で 述べる最小二乗フィッティングによって求めた.

 $\mathbf{A}_{o} = \begin{pmatrix} (W+H)/2 & 0 & W/2 \\ 0 & (W+H)/2 & H/2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ ここで Hと W は画像の横サイズと縦サイズ.

# 4. 画像の対応付け

ステレオを考えるとき、2枚の画像間の対応関係が 必要となってくる.もし、対応点の集合のなかに、数 ピクセルのずれや、間違った対応が混じっていると、 形状の復元結果に大きく影響してしまう.そこで、少 しでも偽マッチを避け、マッチングの精度を上げるた めに、以下のようなステップを踏んで、特徴点対応を 求めた.

Step 1: スーザンオペレータを用いた特徴点抽出
 Step 2: 正規化相関関数によって対応点を仮決定
 Step 3: ミスマッチの除外
 Step 4: サブピクセルマッチングで対応点を修正

4.1 特徵点抽出

画像は膨大なデータを持っているため,特徴的なコー ナーやエッジのみを抽出して処理を行う.特徴点抽出 にはスーザンオペレータを用いた.スーザンオペレー タはフィルタリング処理の一種で,以下の式で定義さ れる.

$$\begin{split} N(r_0) &= \sum_{r \in M} \{1 - \delta(\| I(r) - I(r_0) \| - t)\} \\ \mathbf{z} = \mathbf{\overline{c}}, \\ \delta(x) &= \begin{cases} 1(x > 0) \\ 0(x < 0) \end{cases} \end{split}$$

r:ピクセル座標

r<sub>0</sub> : フィルタの中心座標
 M : フィルタのサイズ
 I : 濃淡値
 t : 閾値

フィルタの中心座標の濃淡値 *I*(*r*<sub>0</sub>)と,その近傍の濃 淡値との差の絶対値が,閾値 *t*より小さければ *N*(*r*<sub>0</sub>) に1を加える.*N*(*r*<sub>0</sub>)は,*r*<sub>0</sub>における特徴の強さを決 定する.

#### 4.2 正規化相関関数によるマッチング

マッチングとは、2枚の画像間で対応するピクセル を検出する処理である.画像間の類似度は正規化相関 関数によって求める.まず、1番目の画像の特徴点近 傍の矩形領域をテンプレートイメージとして切り出す. 次に、2番目の画像を探索し、テンプレートと一致す る部分をみつける.ここで、一致する部分の中心点が 対応点となる.正規化相関係数Rは次の式によって決 定される.この相関係数は-1.0から1.0までの値をと り、値が高いほど相関が高いことを示す.

$$\begin{split} R(x,y) &= \frac{A}{BC} \\ \mathbf{\overline{C}} = \mathbf{\overline{C}}, \\ A &= \sum_{i=1}^{N} \sum_{j=1}^{M} (W(x+i,y+j) - \overline{W}) (T(i,j) - \overline{T}) \\ B &= \sqrt{\sum_{i=1}^{N} \sum_{j=1}^{M} (W(x+i,y+j) - \overline{W})^2} \\ C &= \sqrt{\sum_{i=1}^{N} \sum_{j=1}^{M} (T(i,j) - \overline{T})^2} \end{split}$$

R:正規化相関係数

- ₩: 画像の濃淡値
- Τ:テンプレートイメージ. サイズは *M*× N
- Ŵ:2番目の画像の探索窓内の濃淡値の平均
- Ť:テンプレートイメージの探索窓内の濃淡値の平均

4.3 サブピクセルマッチング

サブピクセルマッチングとは、画像の最小単位であ るピクセルよりも、さらに細かい精度(サブピクセル) で対応点を検出する処理である.相関係数は2次式な ので、相関が高いところに現れるピークを対象画素の 8近傍の放物線近似に基づいて、サブピクセル単位で 求めることができる(図4).



図4:相関係数分布とサブピクセルマッチングの概念図

#### 4.4 階層的かつ再帰的な探索

偽マッチを避けるために導入した手法である. 探索 窓を縮小しながら、同じ特徴点に対して3度のマッチ ングを行う.まず21x21の探索窓を使ってマッチング を行い、次に1回目の探索で発見された対応点を中心 として19x19の窓を使って探索する.最後に、2回目に 発見された対応点を中心として、9x9の窓を使って探 索する. 探索窓の範囲を変えた3度の探索で、いずれ の探索でも対応点が検出されたとき、その点は保存さ れる.1回目の探索で対応点が検出されても、2回目、 3回目で検出されなければ、その点は偽マッチとみな して破棄される.また,探索窓を大きくすると,広い 範囲でマッチングできるという利点があるが、まれに、 探索窓内で相関値のピークが2つ以上存在する場合が ある.この場合、探索窓を狭めた2回目、3回目の探索 により、間違ったピークのほうを選択してしまう可能 性があるが、相関値に閾値を設け、それを下回った場 合,1回目の探索で検出された点を対応点とした.

# 5. エピポーラ幾何



図5:エピポーラ幾何

エピポーラ幾何(図5)とは最初,両眼立体視の対応 付けの問題から考えられたもので、ステレオビジョン を記述する上でよく用いられている.ただし、図5で は、VP1と VP2は2つのカメラではなく、ひとつのカ メラが2つの視点から非同期で撮像したものとする. 2つの視点で3次元空間中の同じ点を見ているとする と、その点と2視点はひとつの平面にある.この平面 をエピポーラ平面といい、エピポーラ平面と画像平面 との交線をエピポーラ線という. さらに、各画像にお いてエピポーラ線が交わる点をエピポールという.2 視点間の幾何関係が既知の場合、一方の画像で1点が 与えられると、エピポーラ平面と各画像上のエピポー ラ線が決まる、他方の画像上では、対応点がエピポー ラ線上に限定される.したがって、対応点を探すには 2次元の探索でなく、エピポーラ線に沿ってのほぼ1次 元探索で済む.

#### 5.1 エピポーラ方程式

画像1の点の座標をx,画像2の点の座標をx'と する.また,視点1から視点2への運動は回転運動R と並進運動tによって表現することができる.つまり, 視点1から視点2への運動は $\hat{x} = R\hat{x}'+t$ によって表 される.ここで,ベクトル $\hat{x}$ , t,  $R\hat{x}'+t$ は共平面で あるのでスカラー3重積は0となる.つまり  $\hat{x}(t \times (R\hat{x}'+t)) = 0$ .

この式をエピポーラ方程式という. 歪対称行列

$\begin{bmatrix} x_1 \end{bmatrix}$	0	$-x_3$	$x_2$
$x_2 =$	$x_{3}$	0	$-x_0$
$\lfloor x_3 \rfloor_{\mathbf{x}}$	$-x_{2}$	$x_1$	0 )

を使って変形すると,

 $\tilde{\mathbf{x}}(\mathbf{t} \times (\mathbf{R} \tilde{\mathbf{x}}' + \mathbf{t})) = \tilde{\mathbf{x}}[\mathbf{t}]_{\times} (\mathbf{R} \tilde{\mathbf{x}}' + \mathbf{t}) = \tilde{\mathbf{x}} \mathbf{E} \tilde{\mathbf{x}}',$ 

(E = [t]<sub>×</sub>R). さらに、デジタル画像座標が与えら れた場合は、 $\tilde{\mathbf{m}}^T \mathbf{F} \tilde{\mathbf{m}}' = \mathbf{0}$ , (F =  $\mathbf{A}^{-T} \mathbf{E} \mathbf{A}'^{-1}$ ), ここで, E を基本行列(Essential Matrix), Fを基礎行列 (Fundamental Matrix)という. もし一方のデジタル画 像座標が与えられた場合, エピポーラ線は  $\ell = \mathbf{F} \tilde{\mathbf{m}}' (\ell = \mathbf{F}^T \tilde{\mathbf{m}})$ として与えられる.

#### 5.2 基礎行列の推定

基礎行列を求めることはエピポーラ方程式を解く上 で最も重要なステップだとされており、過去、いかに 精度よく基礎行列を求めるか、という研究が数多くな されてきた.本手法では、8点の特徴点対応から基礎 行列を推定する Eight-Point Algorithm[11]と、数百点 の特徴点対応からランダムに点を選び出し、評価関数 が閾値以下になるまで計算を繰り返すという RANSAC 法を組み合わせて、基礎行列を求めた.

(1) Eight-Point Algorithm (EPA)

画像1のi番目の点 $\mathbf{m}_i(u_i, v_i)$ と画像における対応点 $\mathbf{m}_i'(u_i; v_i')$ はエピポーラ方程式 $\tilde{\mathbf{m}}_i^T \mathbf{F} \tilde{\mathbf{m}}_i' = 0 を満たす.ここで、最低8点以上が与えられれば、線形解法が存在する.基礎行列の要素をベクトルとして並べると、次式が成り立つ.$ 

 $\mathbf{u}_i^T \mathbf{f} = 0$ 

 $\mathbf{u}_{i} = (u_{i}u_{i}, u_{i}v_{i}, u_{i}, v_{i}u_{i}, v_{i}v_{i}, v_{i}, u_{i}, v_{i}, u_{i}, v_{i}, 1)^{T}$ 

 $\mathbf{f} = (f_{11}, f_{12}, f_{13}, f_{21}, f_{22}, f_{23}, f_{31}, f_{32}, f_{33})^T$ 

ここで, *f<sub>ii</sub>*は, **F**の各要素.

さらに、n点の対応が与えられたとき、

 $\mathbf{UF} = \mathbf{0}$ ,  $\mathbf{z} = \mathbf{C}$ ,  $\mathbf{U} = (\mathbf{u}_1^T \cdots \mathbf{u}_n^T)^T$ .

最小二乗法に基づき F は, U<sup>7</sup>Uの最小固有値に対応 する固有ベクトルとして求められる.

(2) RANSAC 法

Step 1: 特徴点集合から無作為に8点を抽出

Step 2: EPA により基礎行列を計算

 Step 3: もし, 評価関数が閾値以下なら終了. それ以

 外なら Step 1に戻る.

上記の手法で求めた数百点の特徴点対応からランダ ムに8点を抽出し、特徴点とエピポーラ線とのユーク リッド距離が0となることを利用した評価関数を立て、 これが閾値以下の値になれば、その基礎行列を採用す る、評価関数は以下の式で表される。

 $C = \sum_{i} \left( \frac{(\mathbf{\tilde{m}}_{i}^{T} \mathbf{F} \mathbf{\tilde{m}}_{i}^{'})^{2}}{l_{1i}^{2} + l_{2i}^{2}} + \frac{(\mathbf{\tilde{m}}_{i}^{T} \mathbf{F} \mathbf{\tilde{m}}_{i}^{'})^{2}}{l_{1i}^{2} + l_{2i}^{2}} \right)$ 

ここで、F $\tilde{\mathbf{m}}_{i}^{\,\prime} = (l_{1i} \ l_{2i} \ l_{3i})^{T}, \mathbf{F}^{T} \tilde{\mathbf{m}}_{i} = (l_{1i}^{\,\prime} \ l_{2i}^{\,\prime} \ l_{3i}^{\,\prime})^{T}.$ 本来ならばすべての組み合わせについて計算すれば最 も精度良く基礎行列が求まるような点の組み合わせが 分かるが、計算コストがかかりすぎるため、上記の方 法を採用した.

5.3 評価関数の最小化による3次元形状復元

復元された3次元点をもう1度画像面に投影してやれ ば,元の特徴点と一致するはずである.そこで,次の 評価関数を立て、これを最小化することによって、カ メラの運動と、物体の3次元点を復元することができ る(図11参照).  $C = \sum_{i=1}^{M} \sum_{j=1}^{N} \|\mathbf{m}_{ij} - \hat{\mathbf{m}}(\mathbf{A}, \mathbf{R}_{ij}, \mathbf{t}_{ij}, \mathbf{X}_{j})\|^{2}$ M:画像枚数 N :特徵点対応数 m<sub>ii</sub>:i番目の画像のj番目の特徴点対応ベクトル m : 復元された3次元点を逆投影した点 :カメラ固有パラメータ A :回転行列 R : 並進ベクトル t X : 3 次元点

この関数は非線形であるため,最小化には最急降下法 を用いた.

# 三角形パッチによる3次元点集 合からの面構成

求まった3次元点の集合に面を張る必要がある.また,張られた面にテクスチャをマッピングすることで, 表面の粗さなどの情報を併せて表現できるようにする. 本手法では,面の要素としては最も簡単な3角形を, ドロネー分割法によって3次元点の集合に自動的に張っ ていく.

6.1 ドロネー分割

最初にボロノイ分割(図6)について考える.これは, ユークリッド距離に基づき,平面をそれぞれの点の勢 力圏に分割したものである.この分割の境界線は両側 の点を結ぶ線分の垂直2等分線となり,一般に3つの境 界線が1点で交わる[12].ここで,この辺を共有する2 点を線分で結んだものをドロネー図という(図7). 退 化の場合を除いて、この分割は三角形となる.3点を 選んで三角形を作る時に線の結び方に様々な組み合わ せが考えられるが、ドロネー分割は、3辺の比が最小 となるようなバランスのよい三角形が選択されていく ので、結果として最良の面が選択されていると言える.



図6:ボロノイ図

図7:ドロネー図

#### 6.2 3次元点集合への適用

ドロネー分割は、必ず点集合を凸面で囲む(凸包)と いう性質がある.よって、単純にドロネー分割を2次 元から3次元に拡張すると、できあがった形状が凸面 体になってしまうという問題が出てくる.そこで、最 初に、乙座標を0とすることで、一旦平面化してから、 2次元のドロネー分割を適用し、その後、乙座標を元 に戻すことで、立体的に面を張るようにした.ここで、 Z軸は視線方向であり、半透明な物質でない限り、原 理的に視線方向で重なった面が見えることはない.ま た、極端に鋭い面や、輪郭付近にみられる意味のない 面は、閾値を設けて削除するようにした.

### 7. 実験

本手法の有用性を確かめるため、宇宙科学研究所か ら AMICA のプロトモデル(PM)をお借りして、はや ぶさの撮像シミュレーションを行った.実験では、被 写体として Design Cast Studios 社製の小惑星模型"47 69 CASTALIA"と、"2063 BACCHUS"の2種類を採用 したが、本解説では前者の結果についてのみ示す.ま た光源には SHIMADZU 社製の平行光源を使用した. PM と小惑星の間に焦点の合う位置を調整するための レンズを挟み,光源はできるだけ光軸と平行になるように配置した(図8).小惑星を設置するためのターン テーブルは太陽位相角,俯角,自転の3軸について自 由に振ることができる.



図8:コンフィギュレーション.

我々は, HP 保持運用時に, はやぶさが遊弋する箱 状の領域(保持ボックス)内の各頂点など, 重要と思わ れる12種類の視点からの撮像を行った. なお探査機の 視点の位置は, 太陽位相角と俯角によって決定した. また, 各視点につき, 自転1周分, 3度刻みでの撮像を 行った. 図9に撮像結果を示す.



図9: 撮像結果. 自転軸まわりに3度刻みで撮像した. 小惑 星模型のスケールは1:2,000, サイズは8x5x4[cm].

#### 7.1 復元結果

以下に実験により取得した画像を使って、復元した 結果を示す.図10は、2枚のステレオ画像にエピポー ラ線を重ねた図である.2枚の画像間の運動に回転成 分が入っていない場合、すなわち平行ステレオの場合 は、エピポーラ線は完全に平行になる.本実験では、 3度という極小さな回転運動が加わっているため、エ ピポーラ線はほぼ平行に見えている.



図10:エビポーラ線の復元結果. 自転軸まわりに3度という 小さな回転運動のため,エピポーラ線はほぼ平行に見 えている.また,前処理として,画像に対して特徴を 強調するためのシャープ化と,背景のマスキング処理 を施している.

図11は異なる4つの視点を使って復元した3次元形状 モデルである.VRML1.0形式で出力した後,AC3D[1 3]という商業用ソフトウェアを用いて表示した.



図11:復元された形状. 4 つの視点について,それぞれ形状 を復元したもの. CASTALIA の特徴的な 2 つのこぶの ような形状が復元されている.

# 8. 現状と今後の課題

自転軸まわりに3度回転分の視差をもつ2画像から形 状を復元することに成功し,自転走査による単一カメ ラ画像に基づく形状認識の基礎を固めた.今後は,2 視点から復元された面パーツ群について,どう結合し 精度を上げてゆくか,その手順を確立する.面の重複 域を自動抽出し,自転一周分に結合誤差を平均で押し 付ける(最小二乗フィッティング)ことから始め,さら に,得られた形状モデルと画像から探査機の位置を逆 算し,慣性運動の制約から形状モデルの更新を繰り返 してゆくことを考えている.また,2視点間の幾何拘 束に更に複数の視点を追加し解の収束を安定させるこ と、エピポーラ線を平行にする投影変換を噛ませるこ とで撮像枚数をどれだけ間引けるか検討すること,な ども考えている.

### 9. 謝辞

実験を支援してくださった宇宙科学研究所の藤原顕 先生,安部正真先生,神戸大の平田成先生には大変お 世話になりました.同僚の西山耕太郎・村井靖彦両氏 にも御協力頂きました.最後に,本稿を丁寧に査読し て下さった匿名査読者の方に感謝申し上げます.

# 10. 参考文献

- Demura, H., 2001, Earth Planets and Space 53, 1065
- [2] Chapman, C.R. et al., 1996, Icarus 120, 231
- [3] Fujiwara, A. et al., 1993, Icarus 105, 105
- [4] Fujiwara, A., 1980, Icarus 41, 356, Fujiwara, A., 1986, Mem. S. A. It. 57, 47]
- [5] JAXA, SPACE NEWS, http://www.isas.jaxa.jp/j/snews/2003/1007\_2.shtml
- [6] Ostro, S. J. et al., 2004, Meteoritics and Planetary Science, 39, 407
- [7] Nakamura, T. et al., 2001, Earth Planets and Space 53, 1047
- [8] Simonelli, D. P. et al., 1993, ICARUS 103, 49
- [9] 宇宙科学研究所, 2003, M-V-5/MUSES-C 飛翔実 験計画書, 582
- [10] 徐 剛, 2001, 写真から作る 3 次元 CG, 7
- [11] Hartley, R. I., 1997, IEEE 19, 6
- [12] Berg et al, M. D., 1997, Computational Geometry, 179
- [13] AC3D, http://www.ac3d.org/