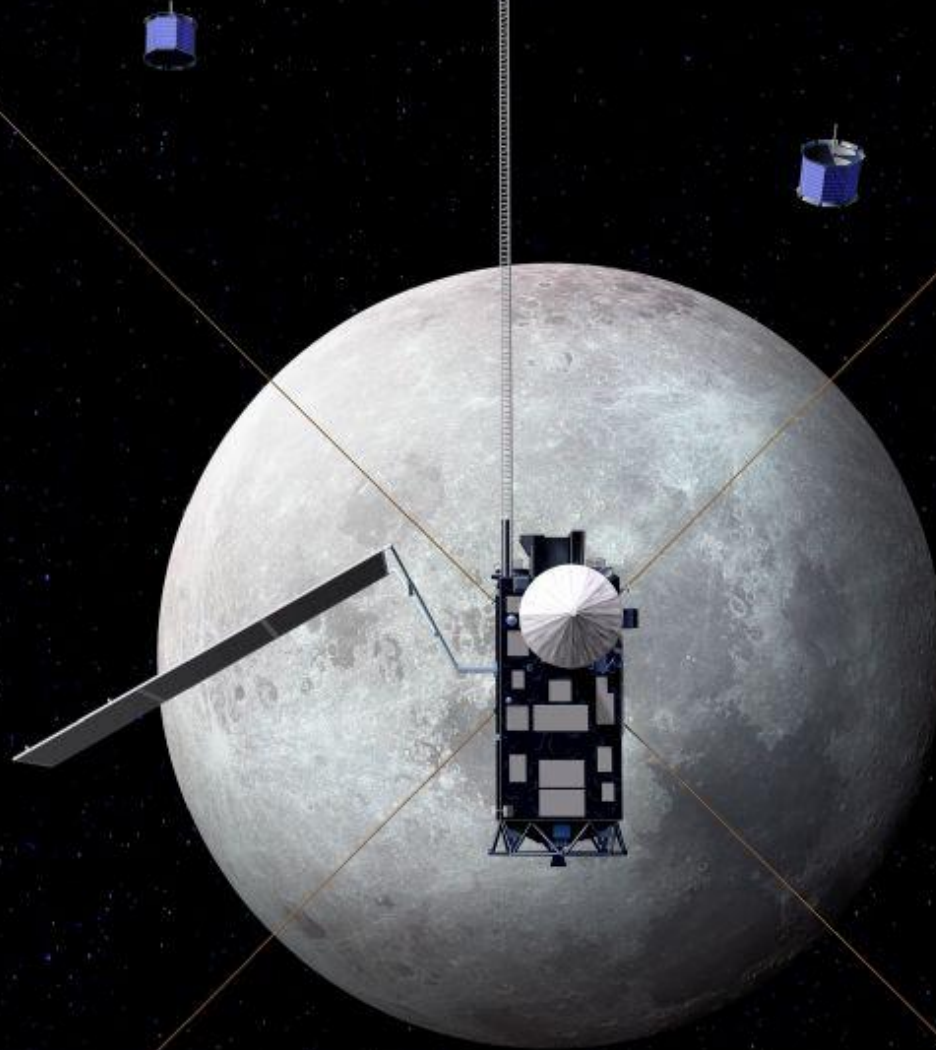


第5回惑星探査データ解析実習会



国立天文台RISE月探査プロジェクト 松本晃治

2012. 02. 20

RISE : Research In SElenodesy

Geodesy : 測地学

測地学の3本柱 {
(1) 地球の形状
(2) 地球の回転
(3) 地球の重力場

測地学を月に応用 → Selenodesy : 測月学
「かぐや」では月の形状と重力場を観測する
ミッション機器を担当

月の基本

月の大きさ

月の軌道

月の回転

月の二分性

地球と月の大ききくらべ



地球：直径約12800km



月：直径約3500km

注1：実際には、月と地球は平均して約38万4400km離れています。

注2：ちなみに、月の重さは地球の重さの約80分の1です。

Lunar Orbit

Semimajor axis = 384,400 km
 or $60.27 \times$ Earth radius

Eccentricity = 0.05490

Inclination = 5.145 deg

Orbit period = 27.321582 days

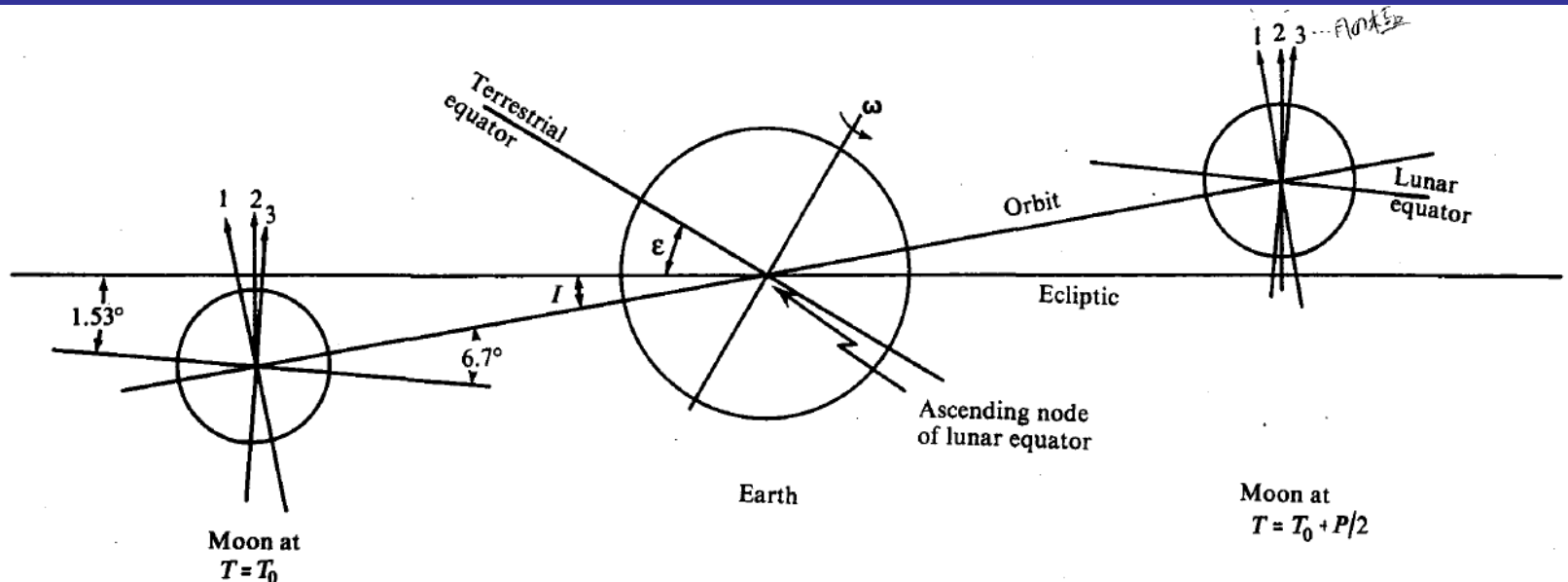


FIG. 7.3. The Earth-Moon geometry at a time T_0 and a half orbital period (P) later. The axis 1 is the pole of the lunar orbit, axis 2 is parallel to the pole of the ecliptic, and axis 3 is the pole of the lunar equator. In the absence of dissipation the three axes are coplanar.

遠地点

Apogee



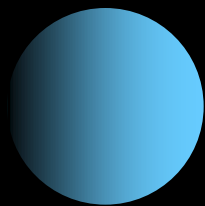
2004-12-26
405,363 km
29.94 arc-mins
Altitude @ 77.81°

近地点

Perigee



2004-07-02
357,448 km
33.66 arc-mins
Altitude @ 21.72°



軌道のおさらい

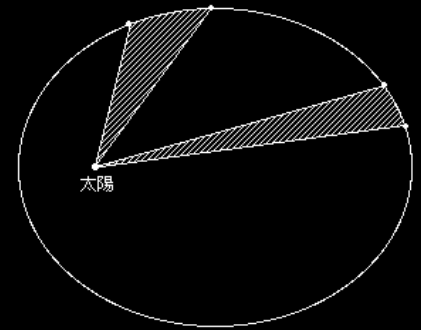
- ケプラーの法則
- 軌道要素

- **ケプラーの第1法則**

すべての惑星は太陽を1つの焦点とする楕円軌道をえがく。

- **ケプラーの第2法則**

惑星と太陽を結ぶ線分が一定時間にはく面積は、それぞれの惑星について一定である。



- **ケプラーの第3法則**

惑星の公転周期(T)の2乗と軌道長半径(a)の3乗の比は惑星によらず一定である。G = 万有引力定数。

$$\frac{a^3}{T^2} = \frac{GM}{4\pi^2}$$

太陽と惑星の間だけでなく、惑星と衛星(あるいは人工衛星)などの間でも成立する。

$$\frac{a^3}{T^2} = \frac{G(M+m)}{4\pi^2}$$

軌道要素 (ケプラー要素)

a 軌道長半径

e 離心率

i 軌道傾斜角

Ω 昇交点経度

ω 近点引数

M 平均近点角

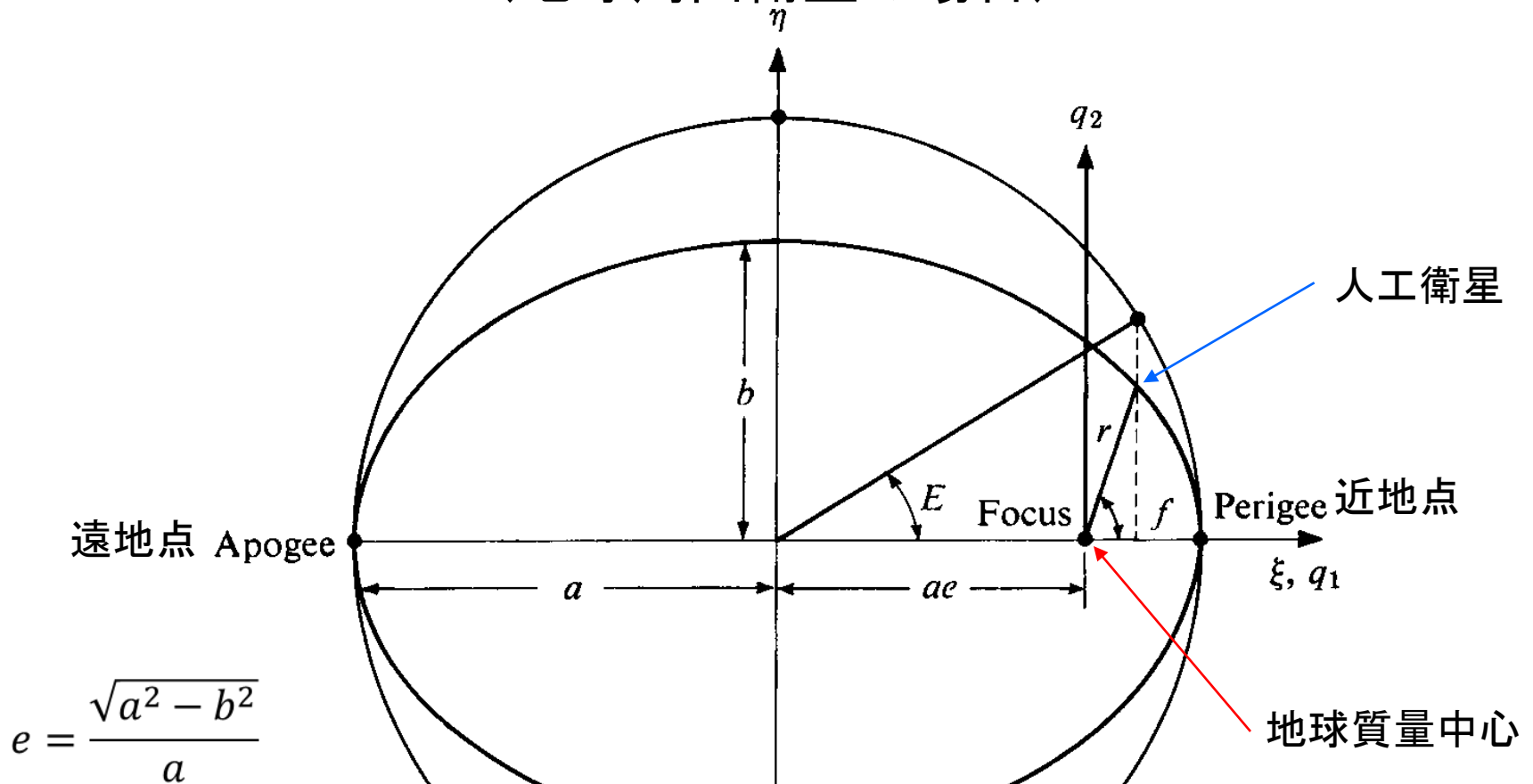
軌道の形状を指定する要素

軌道面を指定する要素

軌道の向きを指定する要素

軌道上の位置を指定する要素

軌道の形状を指定する要素 軌道上の位置を指定する要素 (地球周回衛星の場合)



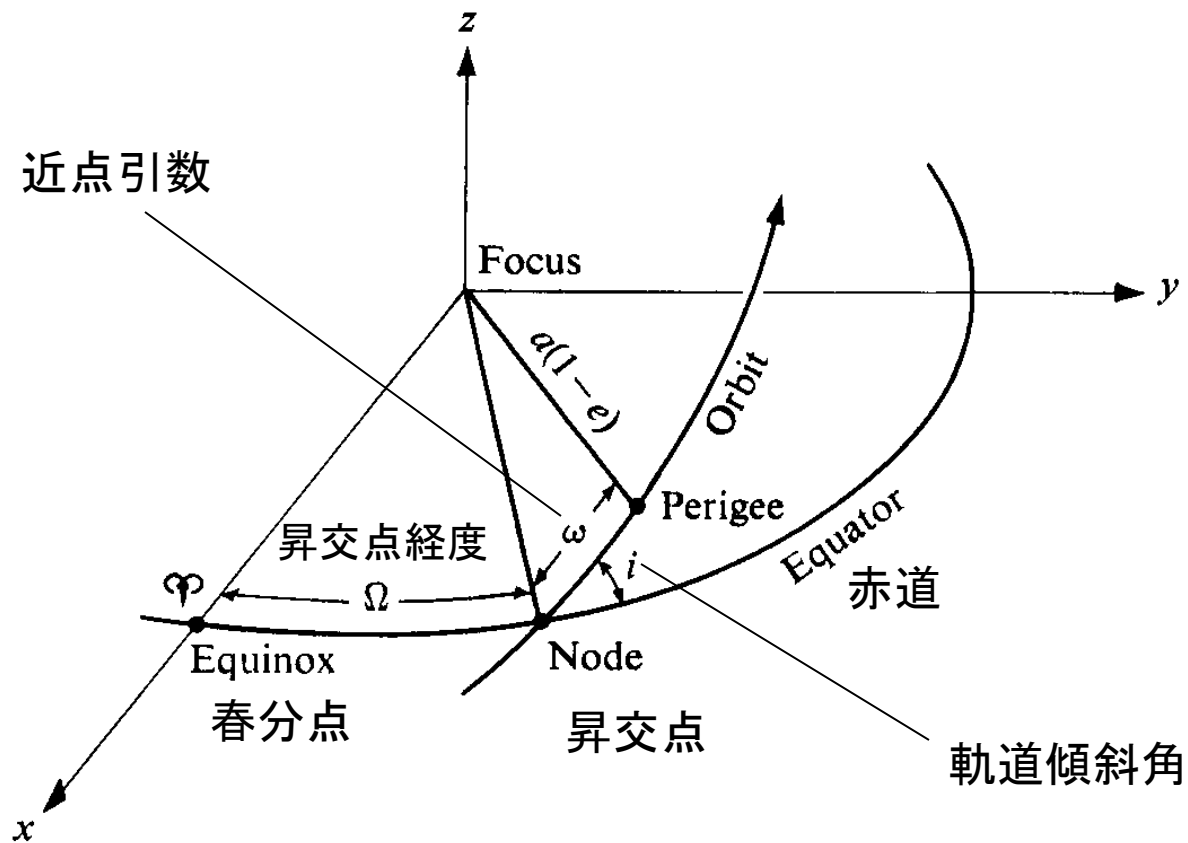
f: 真近点角 (True anomaly)

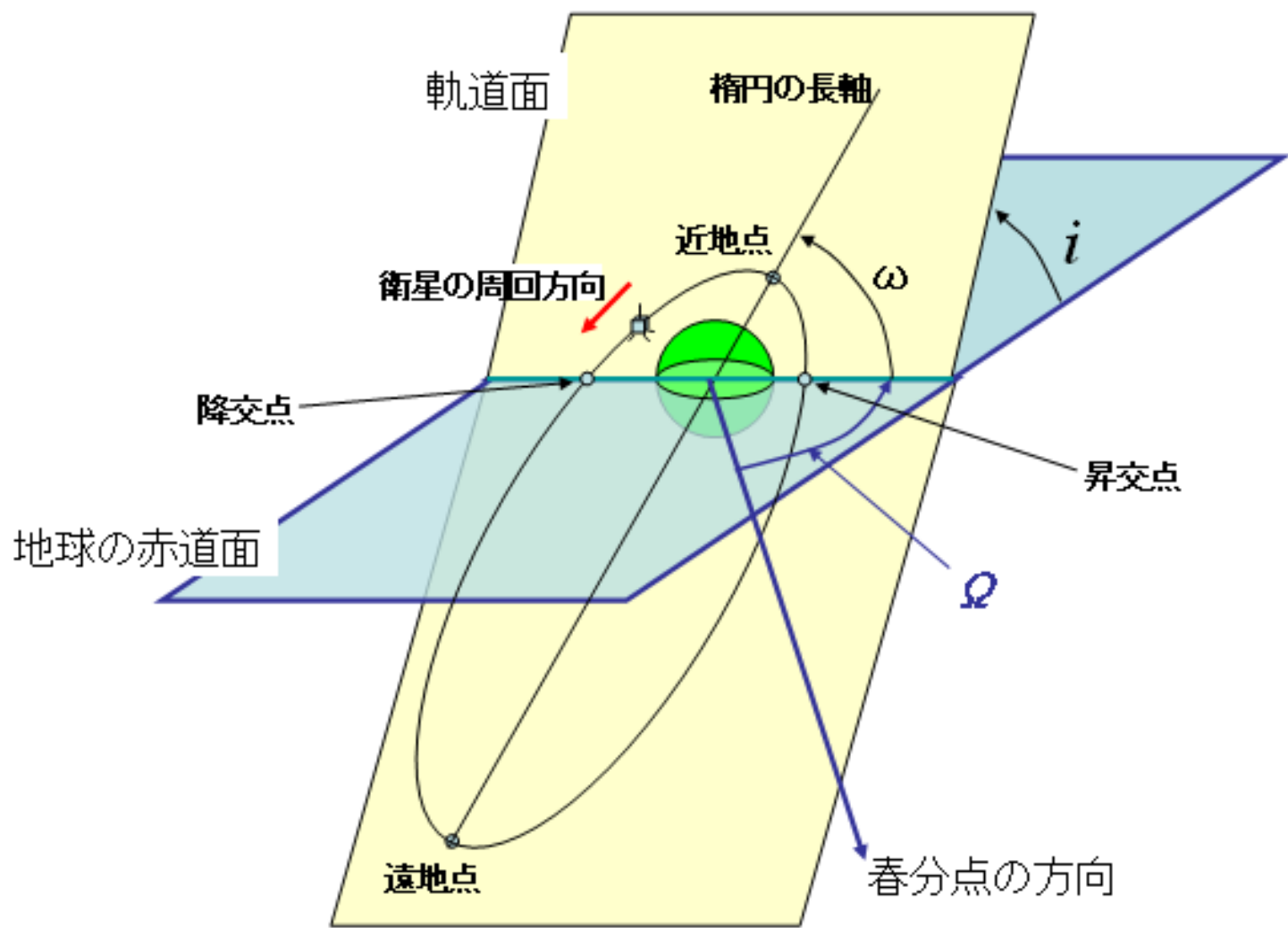
E: 離心近点角 (Eccentric anomaly)

M: 平均近点角 (Mean anomaly) 近地点通過後の経過時間の、軌道周期に対する割合

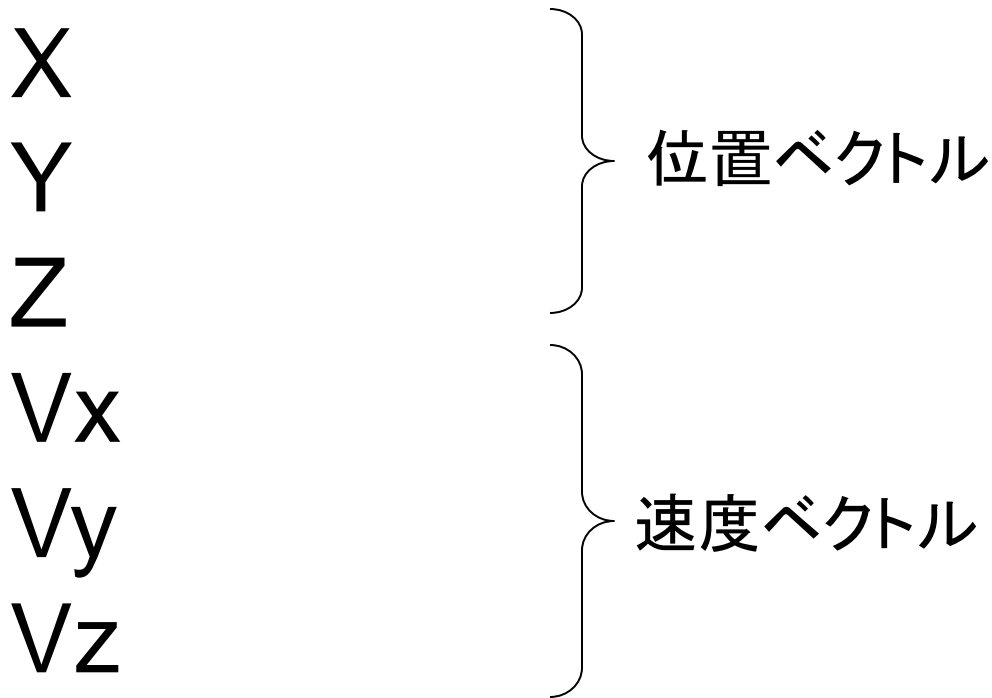
$M = E - e \times \sin E$ ケプラー方程式

軌道面を指定する要素





軌道要素(カーテシアン要素)

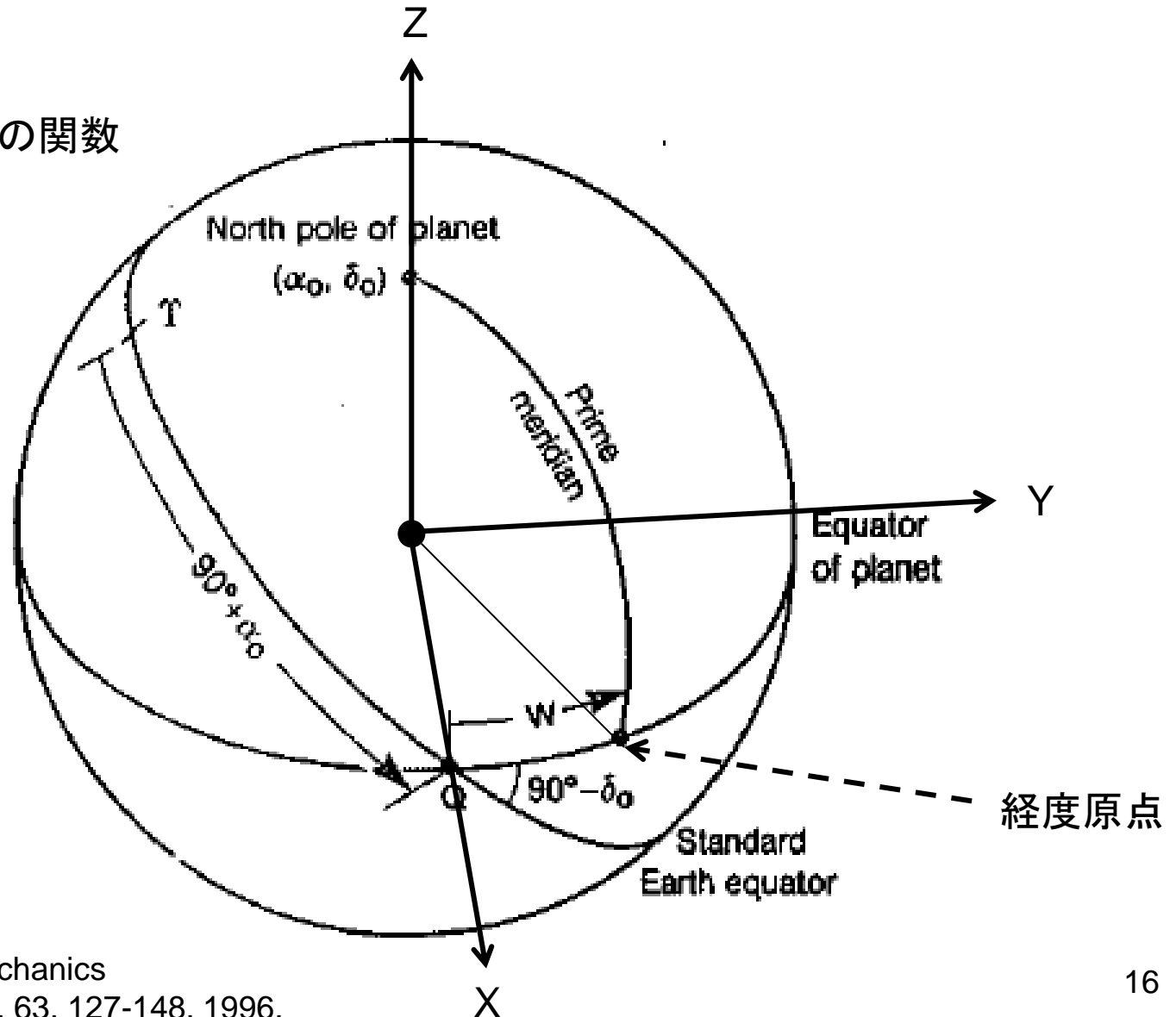


位置ベクトルと速度ベクトルを合わせて状態ベクトル(state vector)と呼ぶこともある。

ケプラー要素とカーテシアン要素は互いに変換可能。

GEODYN II における軸の定義

α_0, δ_0, W は時間の関数
JPL DE暦から取得。



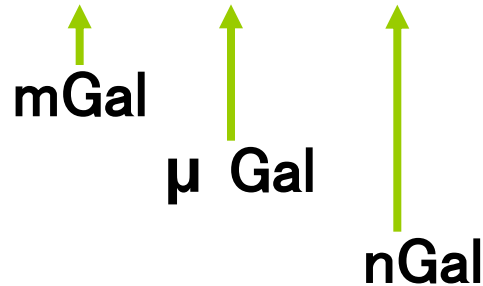
月重力場モデル

- 重力異常とは？
- 球面調和展開による表現
- グリッド分割による表現
- かぐや以前のモデルとその問題点

重力の単位

$$1G = 9.8\text{m/s}^2 = 980\text{cm/s}^2 (\text{Gal})$$

979. 123 456 789 Gal



SI単位 (m/s²)

$$\text{Gal} = 0.01\text{m/s}^2$$

$$\text{mGal} = 0.01\text{mm/s}^2 = 10\mu\text{m/s}^2$$

$$\mu\text{Gal} = 0.01\mu\text{m/s}^2 = 10 \text{ nm/s}^2$$

重力異常って？

重力異常 = 重力の観測値 - 基準面での重力値

$$\Delta g = g_{\text{obs}} - \gamma$$

基準面: 回転楕円体面、ジオイド(等ポテンシャル面)

Free-air異常

一般に、基準面で重力値を測るのは難しいので、基準面から観測点までの高さの差を補正したもの。ただし、観測点と基準面の間に物質は無いものとする。

$$\Delta g_f = g_{\text{obs}} + dg/dz \times h - \gamma$$

地形や天体内部の密度の違いによる補正は一切されていない。

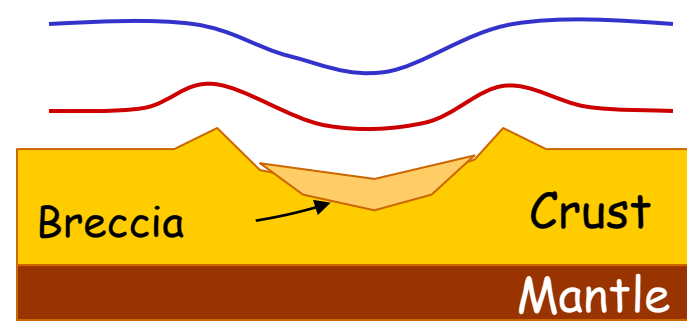
ブーゲー異常

基準面より上にある物質の影響を計算で取り除き、基準面より下の質量異常、あるいは密度の大小を反映した重力異常。

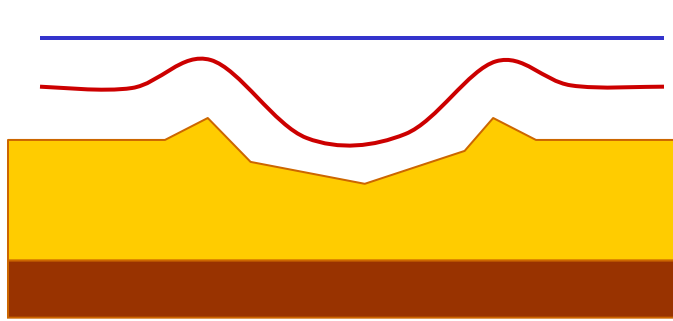
$$\Delta g_b = g_f - 2\pi G \rho h$$

ρ : 地殻の密度、 h : 基準面から測った観測点の高さ。

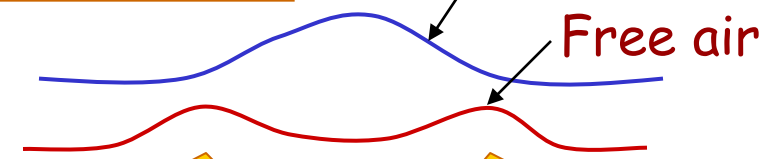
Gravity signatures of craters/impact basins



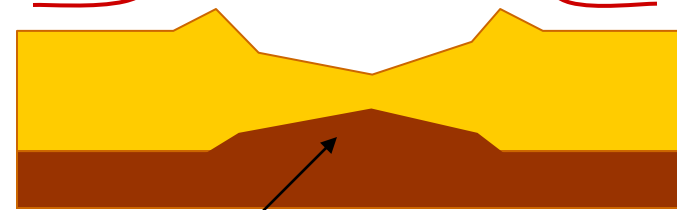
Enhanced



Uncompensated

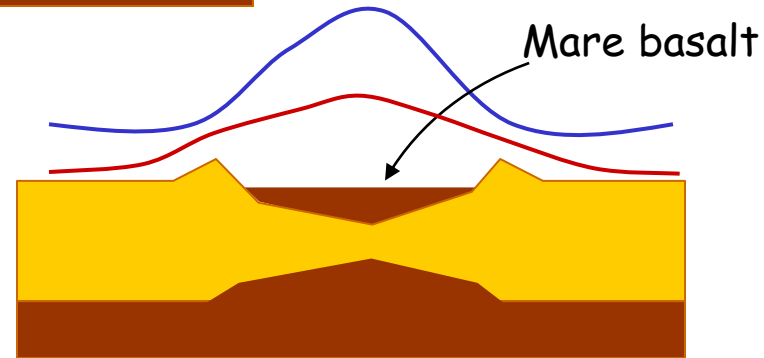


Compensated

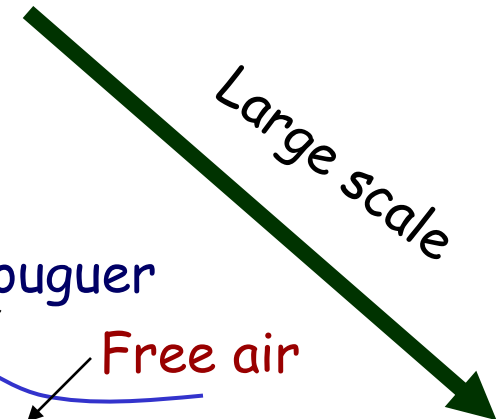


Mantle plug

Overcompensated (MASCON)

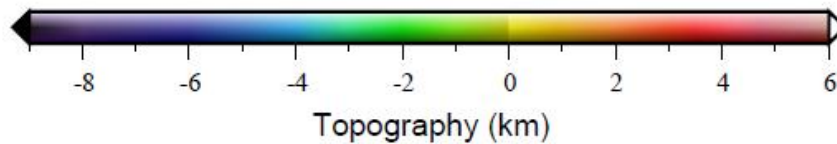
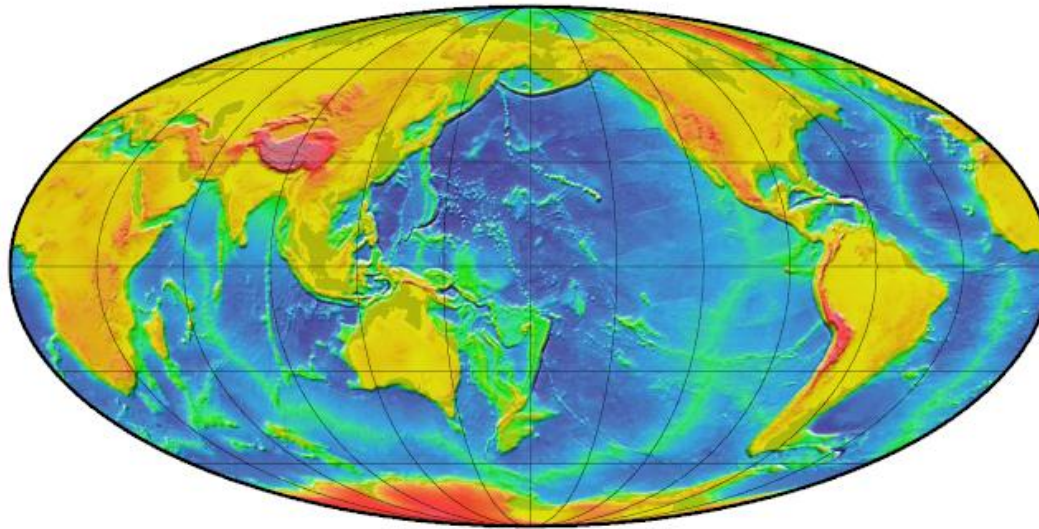


Large scale

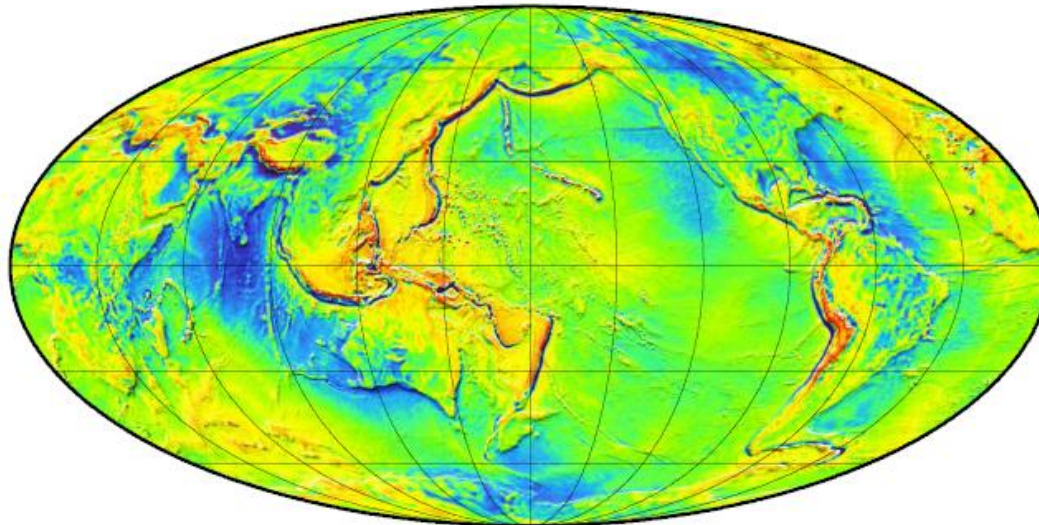


地球

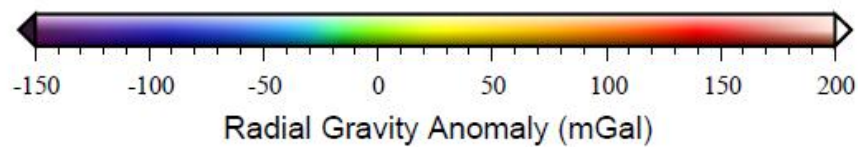
地形



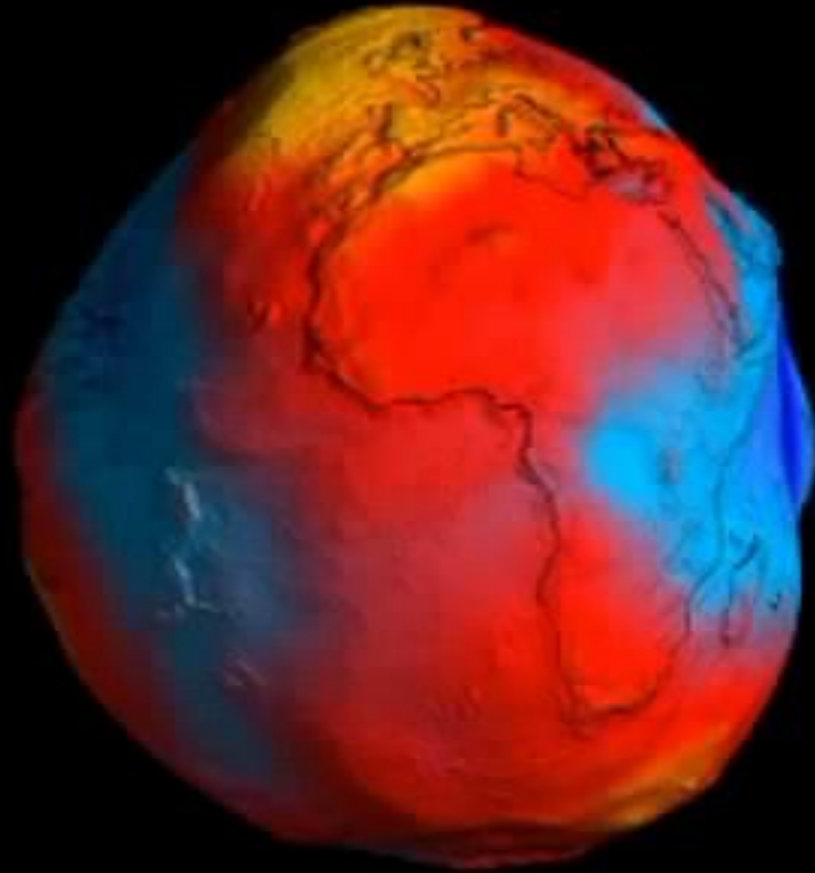
フリーエア重力異常



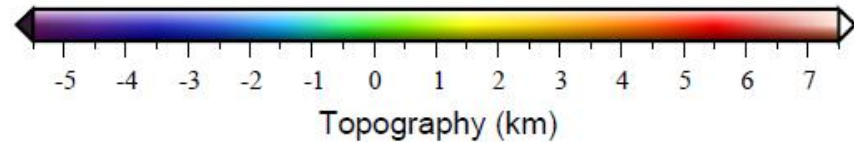
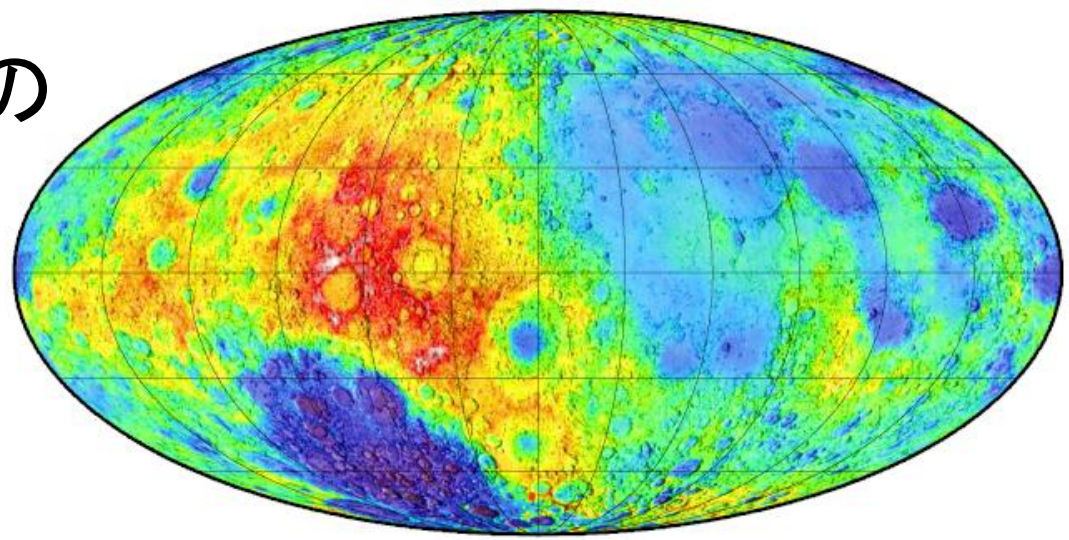
Wieczorek (2007)



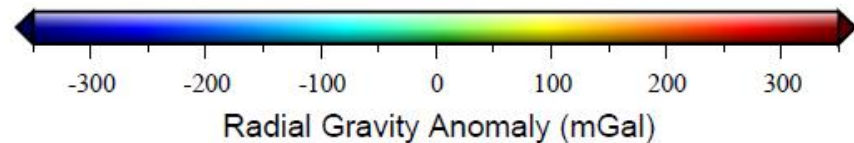
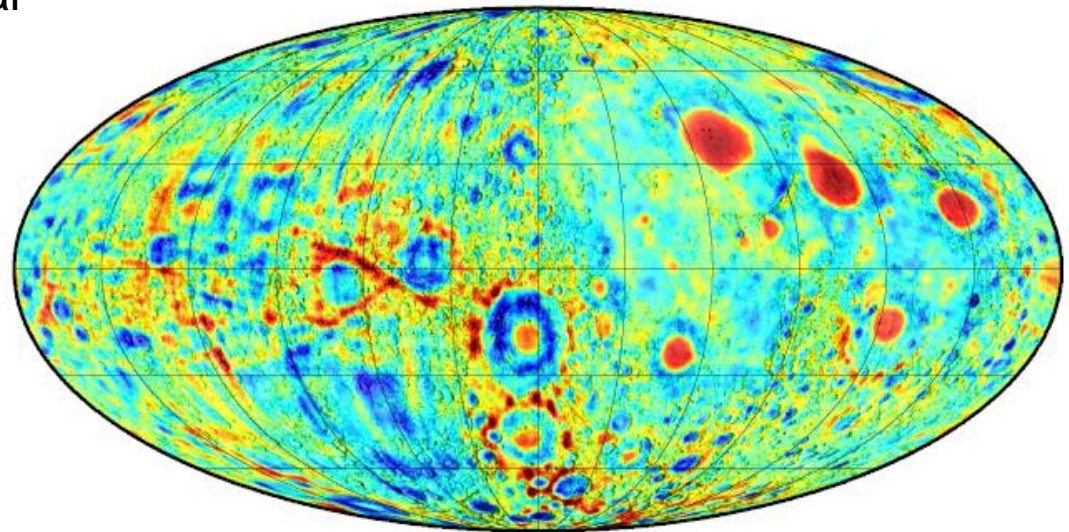
GOCE geoid



月(「かぐや」以前のデータ)



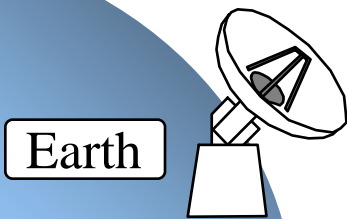
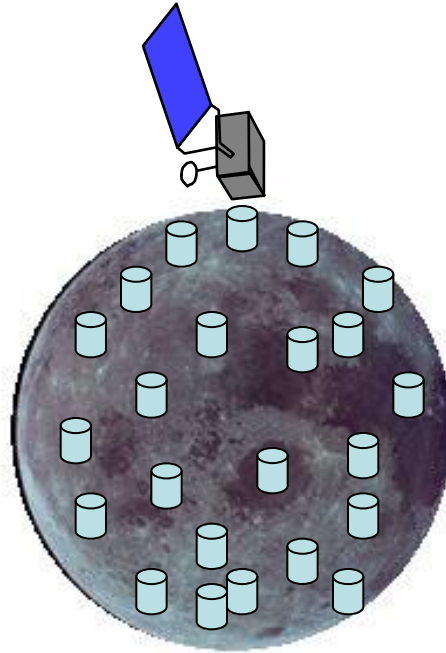
地球のフリーエア異常～数10mGal
月のフリーエア異常～数100mGal
月はアイソスタシーの働きが鈍い



Wieczorek (2007)

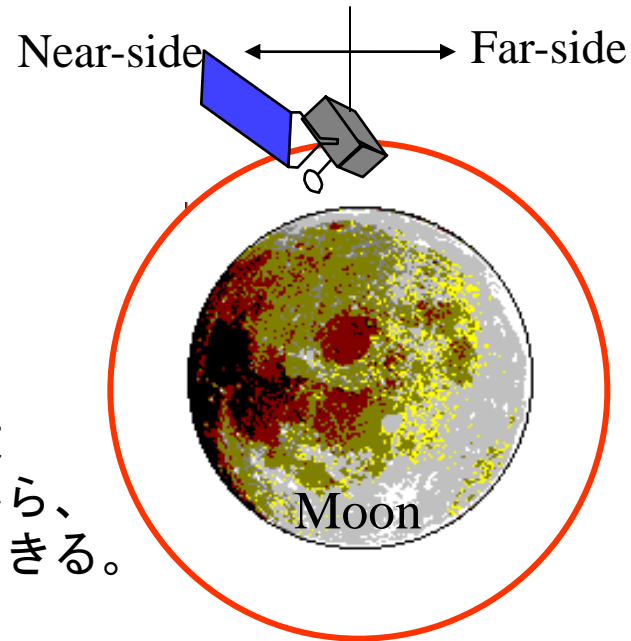
月・惑星の重力場 どうやってはかる？


重力計

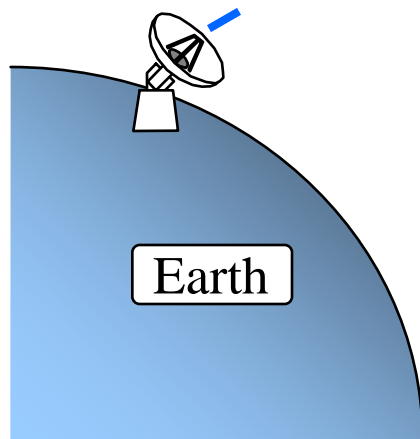


電波などを利用して人工衛星の飛び方を調べる

ドップラー観測



ドップラー効果によって送信周波数と受信周波数が異なる。この違いから、人工衛星の視線方向の速度が観測できる。



重力場をどのようにして表すか

1. 球面調和展開

$$V = \frac{GM}{r} \left[1 + \sum_{n=2}^{\infty} \sum_{m=0}^n \left(\frac{R}{r} \right)^n (C_{nm} \cos m\lambda + S_{nm} \sin m\lambda) P_{nm}(\cos \theta) \right]$$

重力ポテンシャルの
非球状成分を表す。

$R < r$
重心から離れるほど
高次項 (n が大きい項)
の影響が小さくなる
(見えにくくなる)。

重力ポテンシャル V の球面調和展開
(重ねあわせで表す → フーリエ展開の3次元版)

G : 万有引力定数

M : 天体の質量

R : 天体の平均赤道半径 (月では1738.0kmとする場合が多い)

(r, λ, θ) : 天体の重心を原点とした球座標 (θ = 余緯度)

求めたいもの → C_{nm}, S_{nm} : ストークス係数 (重力場係数)

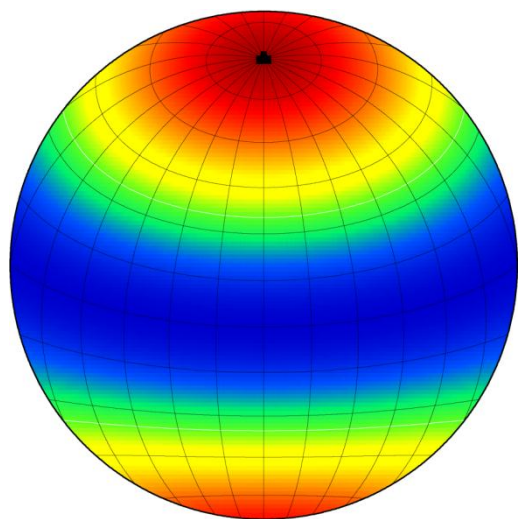
P_{nm} : ルジャンドル陪関数

$n=1$ の項は、座標原点の重心からのズレを示す。

これらは、座標原点を重心に選ぶことによりすべて0になる。

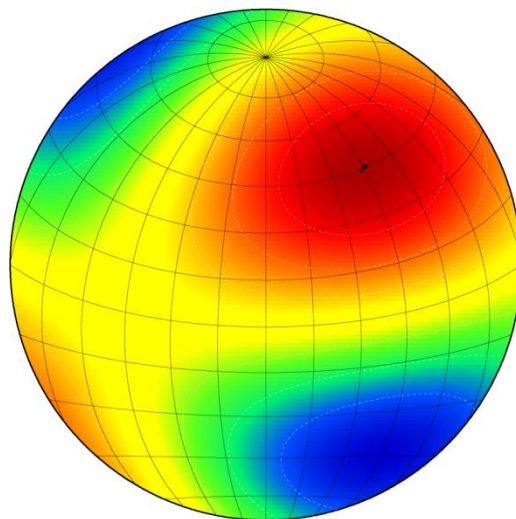
2次の球面調和関数

Zonal (n=2, m=0)



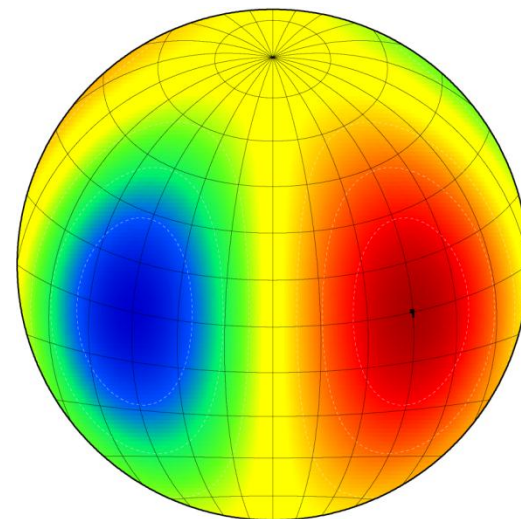
$$P_{20}(\sin \phi) = \frac{1}{2} (3 \sin^2 \phi - 1)$$

Tesseral (n=2, m=1)



$$P_{21}(\sin \phi) = 3 \sin \phi \cos \phi$$

Sectorial (n=2, m=2)

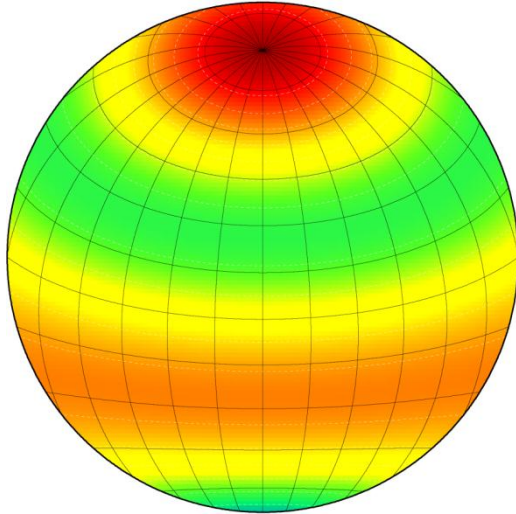


$$P_{22}(\sin \phi) = 3 \cos^2 \phi$$

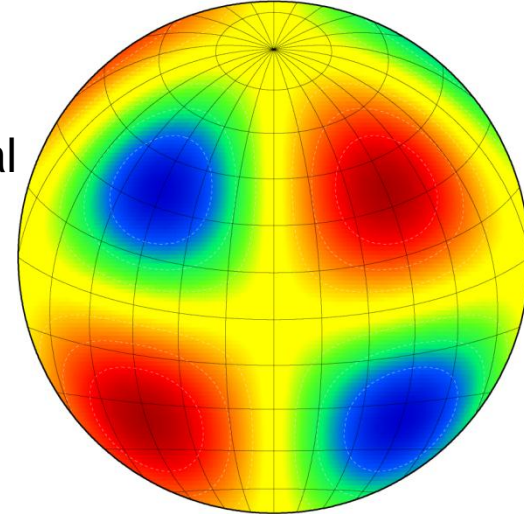
Φ : 緯度

3次の球面調和関数

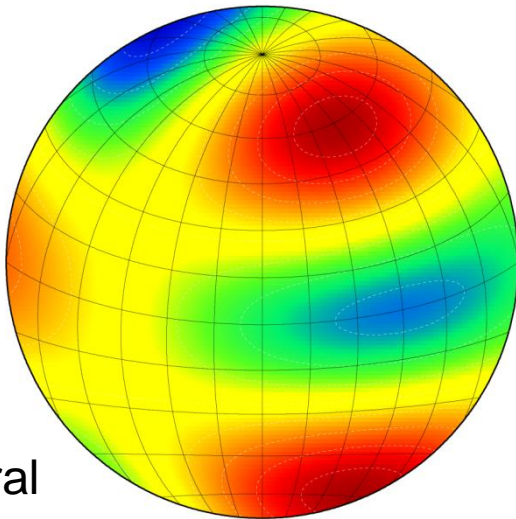
$N=3$
 $M=0$
Zonal



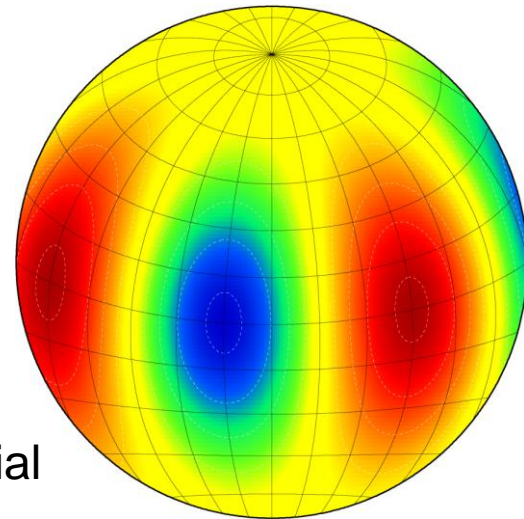
$N=3$
 $M=2$
Tesseral

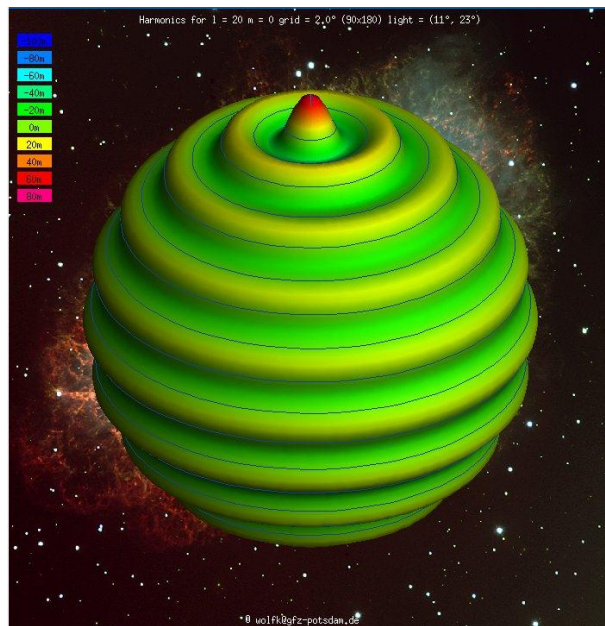


$N=3$
 $M=1$
Tesseral

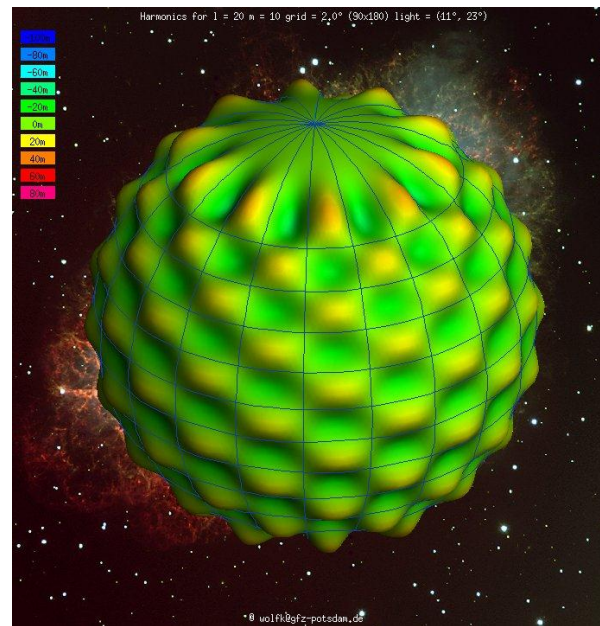


$N=3$
 $M=3$
Sectorial

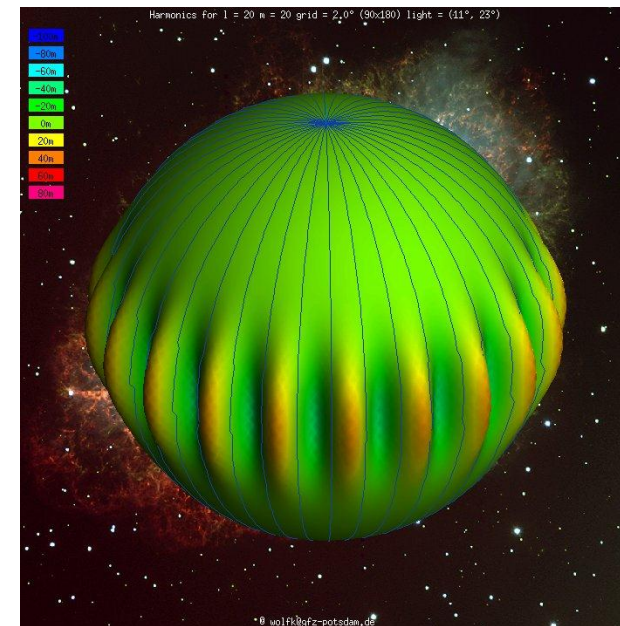




$n=20, m=0$



$n=20, m=10$



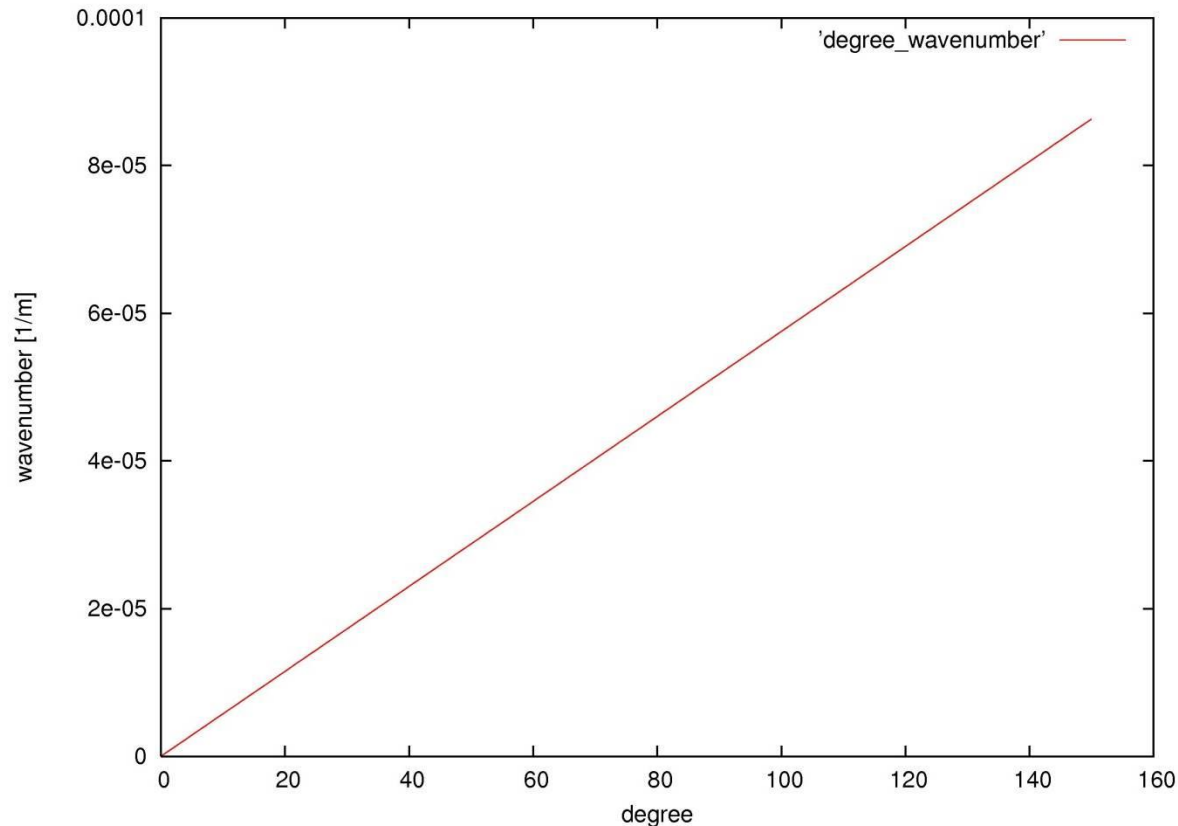
$n=20, m=20$

次数 & 波数

- n : 球面調和関数の次数
- λ : 波長 (m)
- k : 波数 (m^{-1})
- R : 月の半径

$$\lambda = 2\pi R/n$$

$$k = 2\pi /\lambda = n/R$$



LP100Jモデル

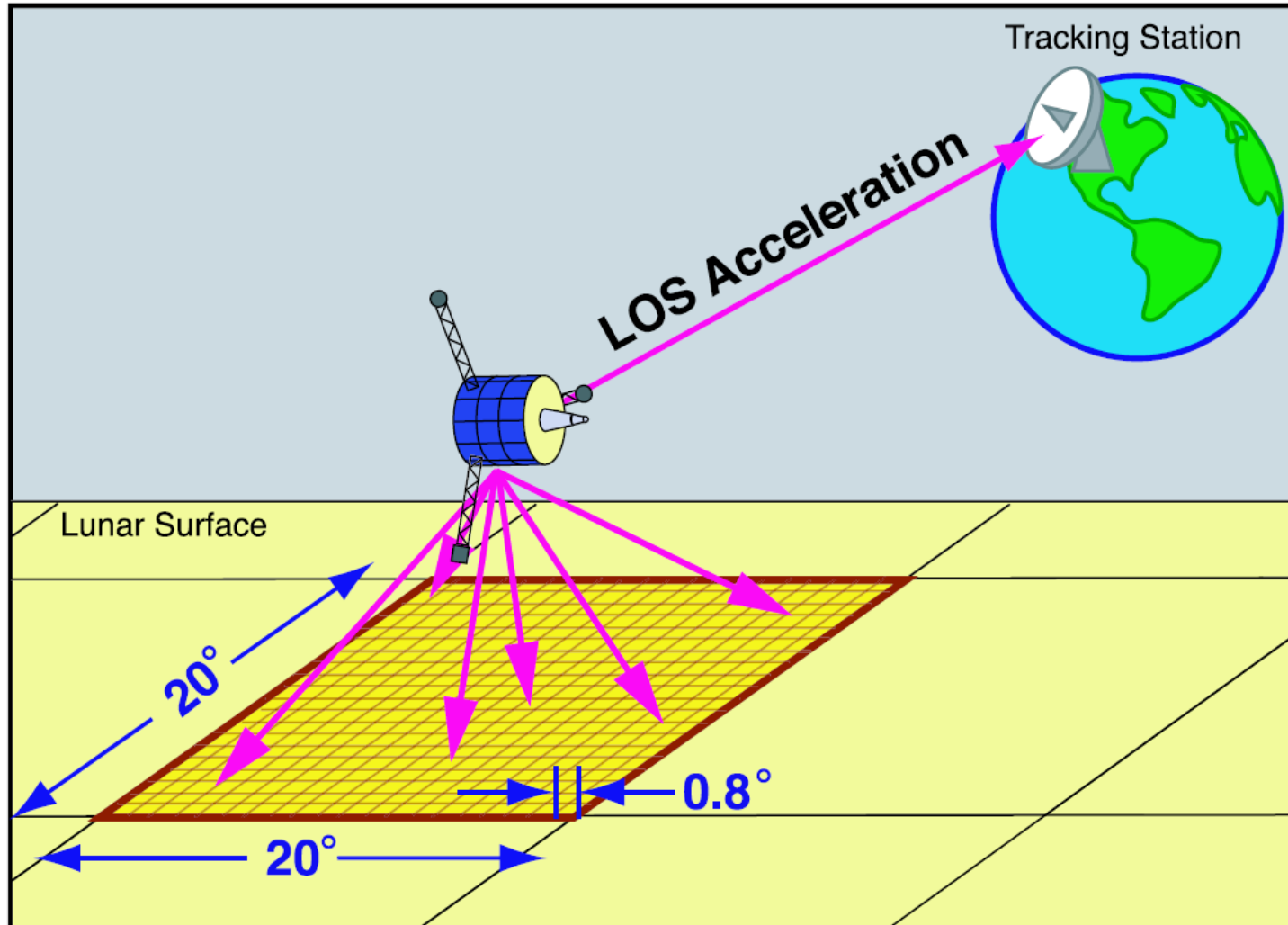
GM	4.902800476000000D+12
R	1.7380000D+06
C20	-0.9088104067710D-04
C21	0.9884415690670D-08
S21	0.4789762867420D-08
C22	0.3462661505670D-04
S22	0.1190433144690D-07
C30	-0.3177659811830D-05
C31	0.2634978329350D-04
S31	0.5465649298950D-05
C32	0.1420053175440D-04
S32	0.4888753415900D-05
C33	0.1228605046040D-04
S33	-0.1764160630100D-05
C40	0.3215025829860D-05
C41	-0.6011540710940D-05
S41	0.1633042938510D-05
C42	-0.7106670374500D-05
S42	-0.6760121764940D-05
C43	-0.1370417118340D-05
S43	-0.1342870281680D-04
C44	-0.6036527199180D-05
S44	0.3943346429900D-05
...	

注！！ 規格化された値

$$(C_{nm}; S_{nm}) = \left[\frac{(n-m)!(2n+1)(2-\delta_{0m})}{(n+m)!} \right]^{1/2} (\bar{C}_{nm}; \bar{S}_{nm})$$

重力場をどのようにして表すか

2. グリッド分割



90年代前半までの月重力場モデル (from Lemoine et al., 1997)

Table 1. Previous Lunar Gravity Analyses

Reference	Data Used	Comment
<i>Muller and Sjogren</i> [1968]	Lunar Orbiters	Discovery of lunar mascons.
<i>Lorell and Sjogren</i> [1968]	Lunar Orbiters	4x4 spherical harmonic solution + zonals to $l=8$.
<i>Wong et al.</i> [1971]	Apollo 8, 12	Solution for discrete masses on near side.
<i>Michael and Blakeshear</i> [1972]	Lunar Orbiters	13x13 spherical harmonic solution.
<i>Sjogren et al.</i> [1972a,b; 1974b,c]; <i>Muller et al.</i> [1974]	Apollos 14-17	Mapped line of sight (LOS) accelerations with data from as low as 12-20 km altitude.
<i>Sjogren et al.</i> [1974a]	Apollo subsatellites	Solve for LOS and discrete masses.
<i>Ferrari</i> [1977]	LO-5 and Apollo subsatellites	16x16 spherical harmonic solution.
<i>Ananda</i> [1977]		Solve for discrete masses.
<i>Bryant and Williamson</i> [1974]	Explorer 49	3x3 spherical harmonic solution from Keplerian mean elements.
<i>Blakeshear and Gapcynski</i> [1977]	Explorers 35 and 49	Zonal solution, $J_2 - J_6$ only from Keplerian mean elements.
<i>Williams et al.</i> [1973]	Lunar laser ranging (LLR)	
<i>Ferrari et al.</i> [1980]	LLR and LO-4	
<i>Bills and Ferrari</i> [1980]	LLR, LO 1-5, Apollo subsatellites, and Apollo 8,12	16x16 spherical harmonic solution
<i>Konopliv et al.</i> [1993]	LO 1-5 and Apollo subsatellites	60x60 spherical harmonic solution.
<i>Dickey et al.</i> [1994]	LLR	

Clementine以降SELENE以前の の重力場モデル



1994

1996

1998

2001

GLGM-1
70 x 70

GLGM-2
70 x 70

LP75G
75 x 75

LP100J
100 x 100

LP165P
165 x 165

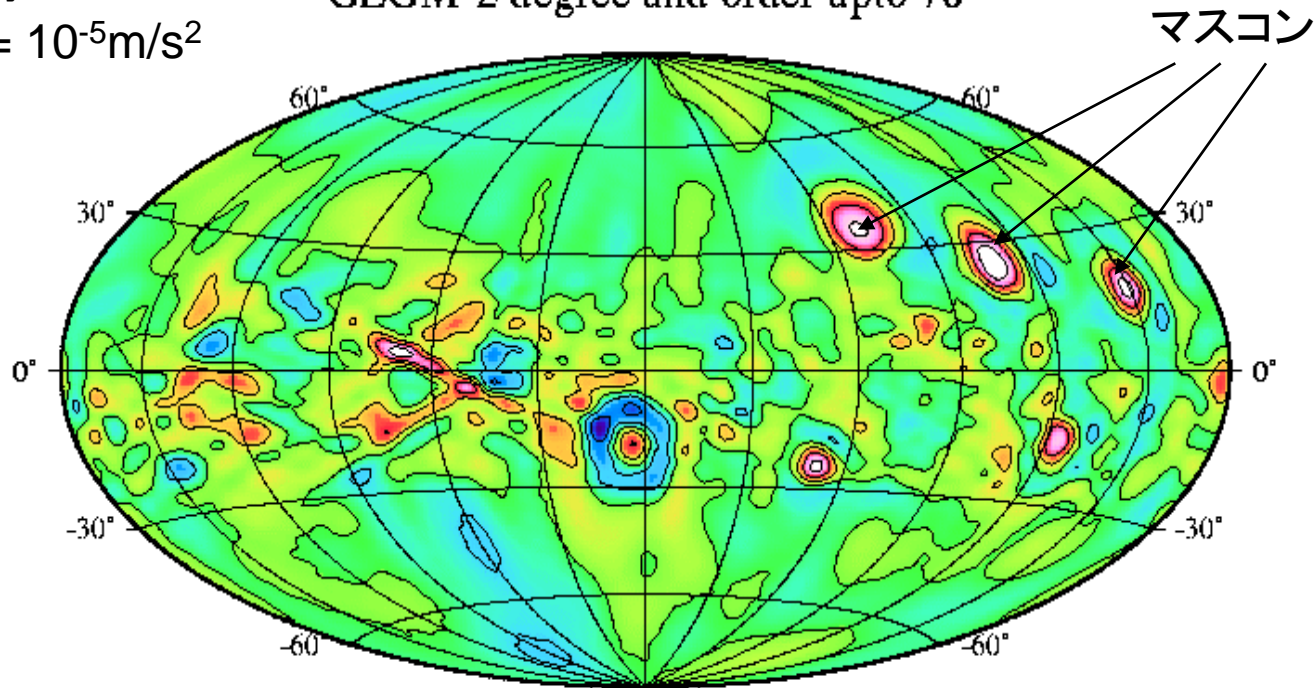
Sugano (2004)より

クレメンタインがはかった月重力場

重力異常

1mGal = 10^{-5}m/s^2

GLGM-2 degree and order upto 70



(mgals)

Far-side ←

→ Near-side

ルナプロスペクターがはかった月重力場

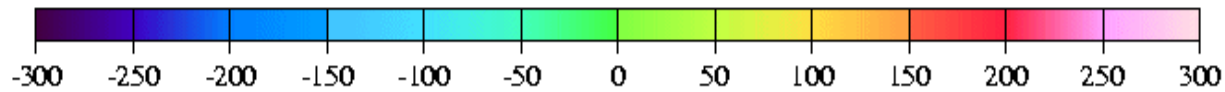
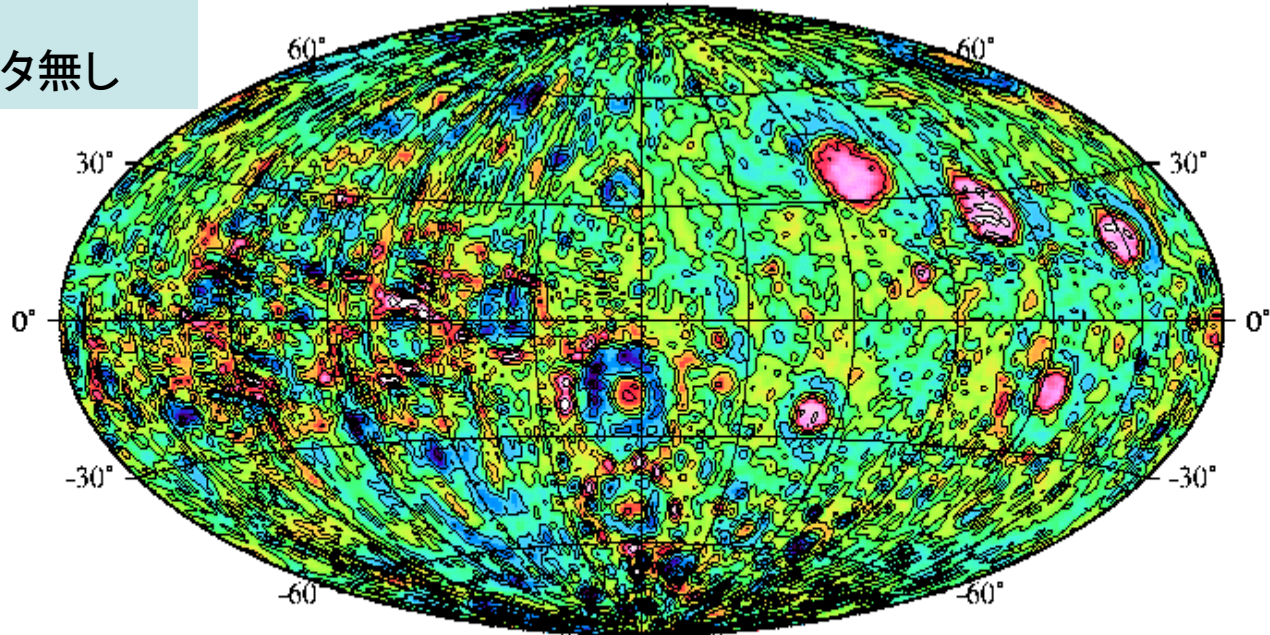


月は同期回転している



裏側のデータ無し

LP100J degree and order upto 100



(mgals)

Far-side



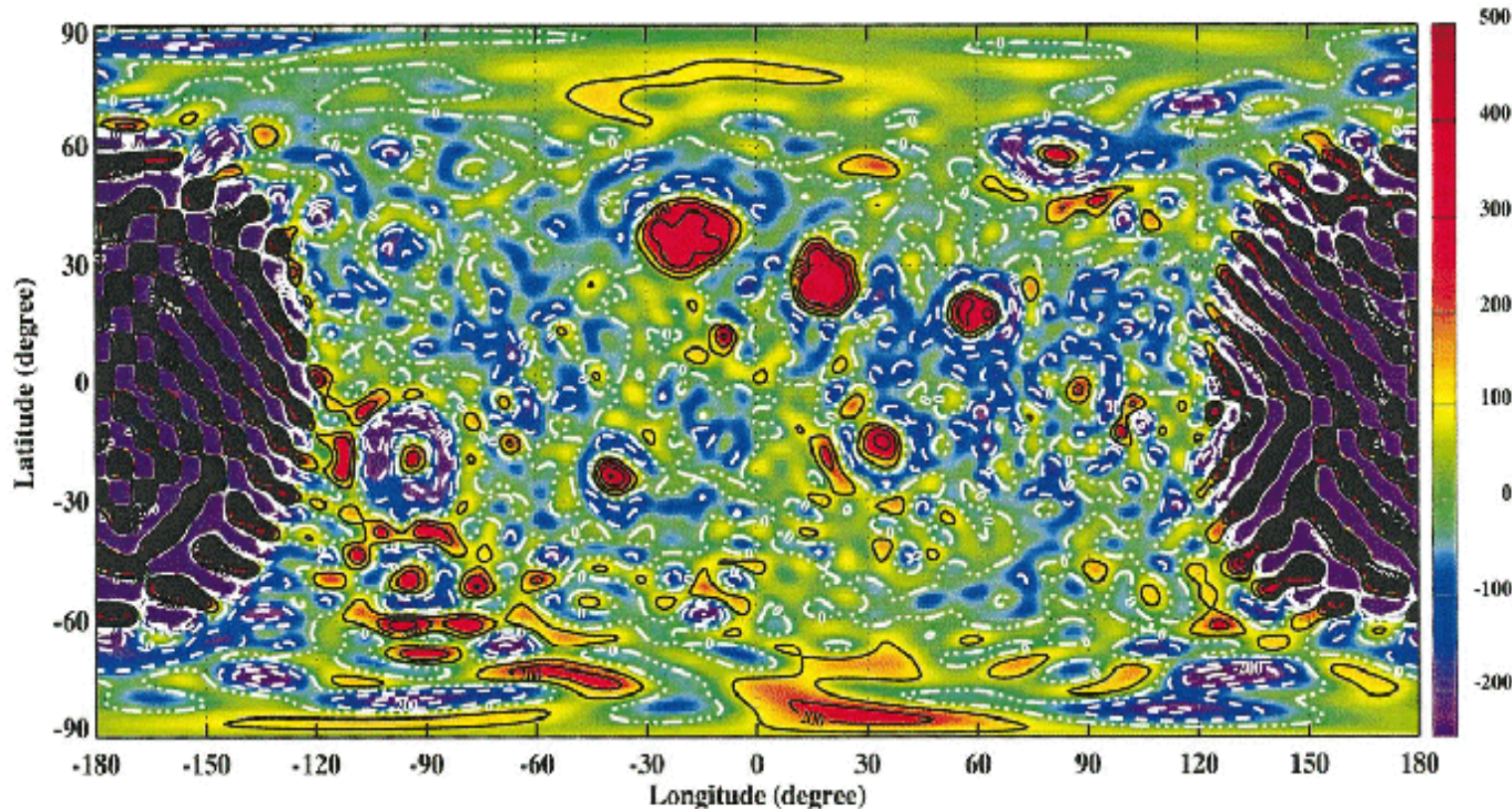
Near-side

アプリアリ拘束条件

$$\sigma(\bar{C}_{nm}, \bar{S}_{nm}) = \beta \times 10^{-4} / n^2$$

高次のシグナルが発散するのを防ぐ。
他の独立な観測がないので、 β は経験的に決定(現状、 $\beta=3.6$)

拘束条件がないと・・・



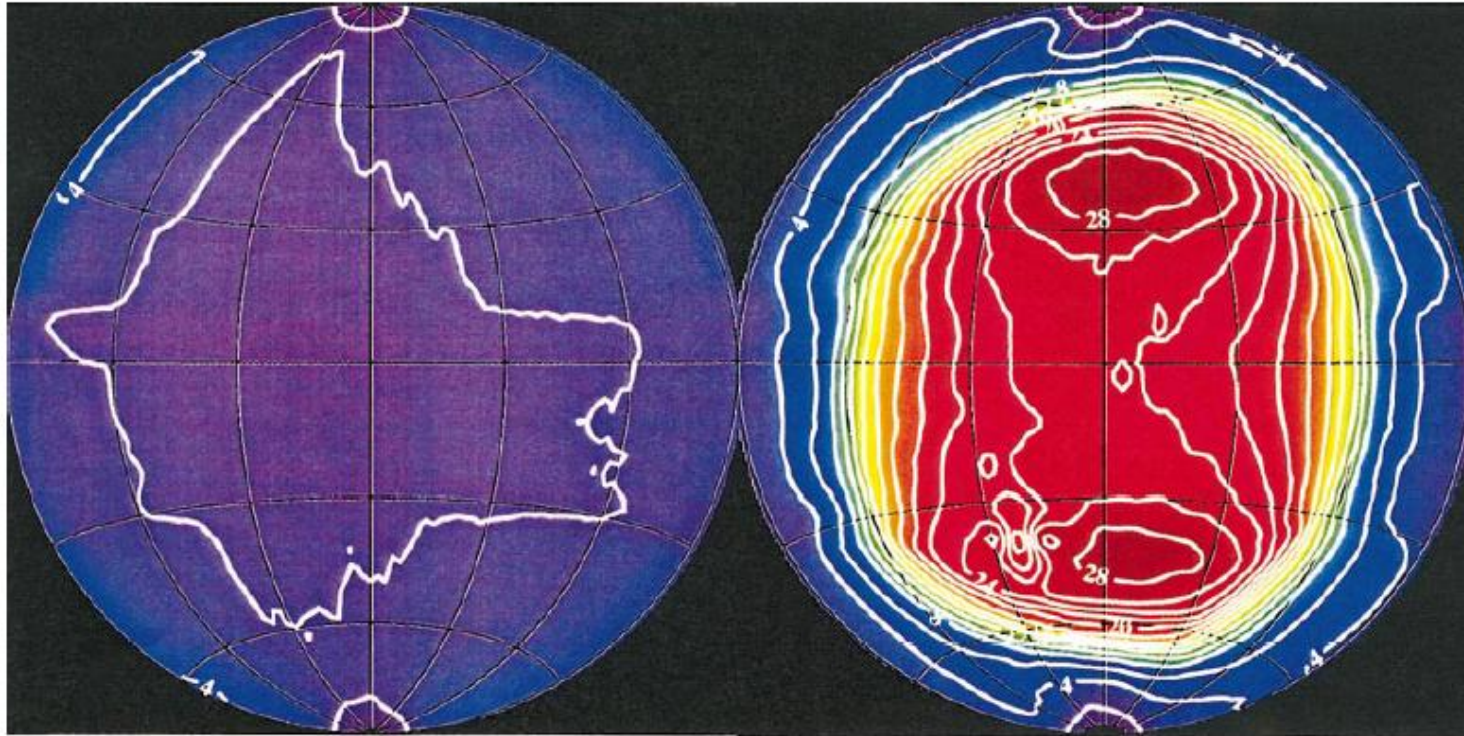
Gravity anomaly

FIG. 4. Unconstrained 50th degree and order lunar gravity field (LP50PNOAP for no a priori accelerations at the lunar surface). Large oscillations on the lunar farside indicate where there is no direct observation of the gravity field.

Konopliv et al., 2001



拘束条件をつけても...



Near-side

Far-side



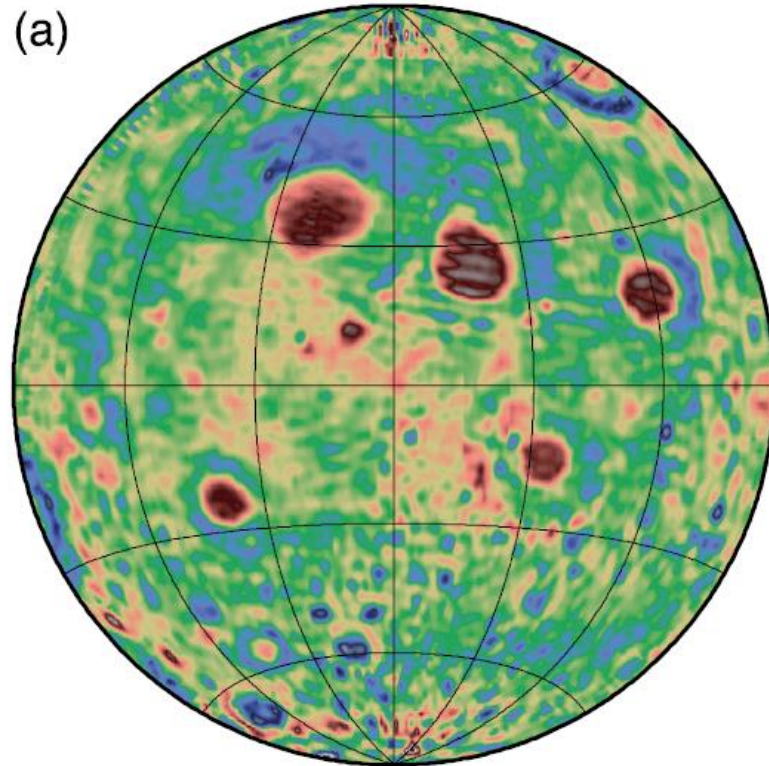
0 2 4 6 8 10 12 14 16 18 20 22 24 26 28 30


Selenoid height error (m)

Konopliv et al., 2001

グリッド分割法による解

(a)




-400 -200 0 200 400
Free-air Anomaly from LP LOS [mgal]

Sugano (2004)より。

拘束条件不要で、分解能も高い($n=225$ に相当)が、
Lunar Prospectorデータを用いる限り、表側に限定される。

軌道推定・重力場推定

- パラメータ推定
- アークパラメータと
コモンパラメータ
- アプリオリ拘束条件

パラメータ推定

- 残差(観測値－計算値)の計算
- 偏微分の計算
- 最小二乗法の適用
- 収束するまで繰り返し

$$A = \frac{\partial \text{観測量}}{\partial \text{推定パラメータ}} \quad \text{計画行列}$$

$$\text{解} = (A^T W A + \Sigma^{-1})^{-1} A^T W y$$

y : 残差

W : 重み行列

Σ : パラメータのアプリオリな共分散行列

軌道推定のイメージ図

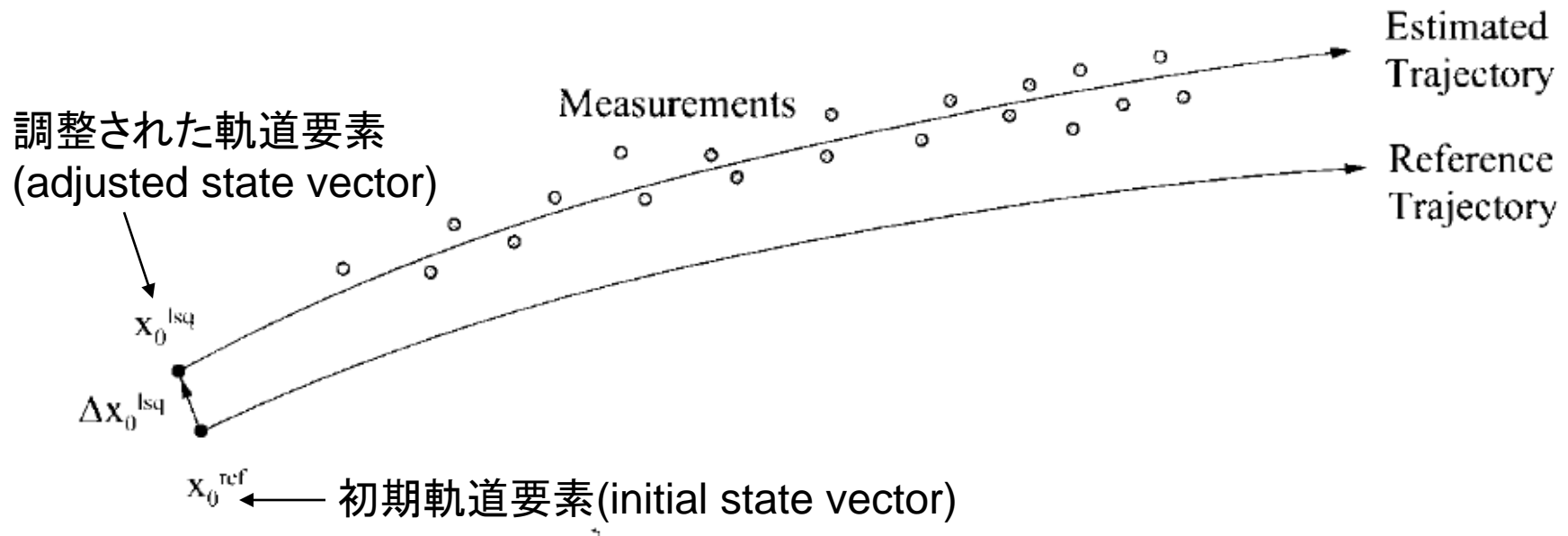


Fig. 8.1. Least-squares orbit determination: the parameters of a reference trajectory are corrected to find the trajectory which best fits the observations in a least-squares of the residuals sense.

アークパラメータ & コモンパラメータ

- アークパラメータ: 軌道要素、太陽輻射圧係数、観測バイアス等、アークに依存して変化するパラメータ
- コモンパラメータ: 重力場係数、GM、ラブ数、観測局位置等、すべてのアークに共通なパラメータ
- まずアークパラメータを推定し、コモンパラメータは全てのアークが収束した後でまとめて推定する。

行列の結合

$$\begin{array}{ll} B_1 x = b_1 & \text{アーク1} \\ B_2 x = b_2 & \text{アーク2} \\ \vdots & \\ B_n x = b_n & \text{アークn} \end{array}$$

$$[B_1 + B_2 + \dots + B_n] x = [b_1 + b_2 + \dots + b_n]$$

$$B = A^T W A$$

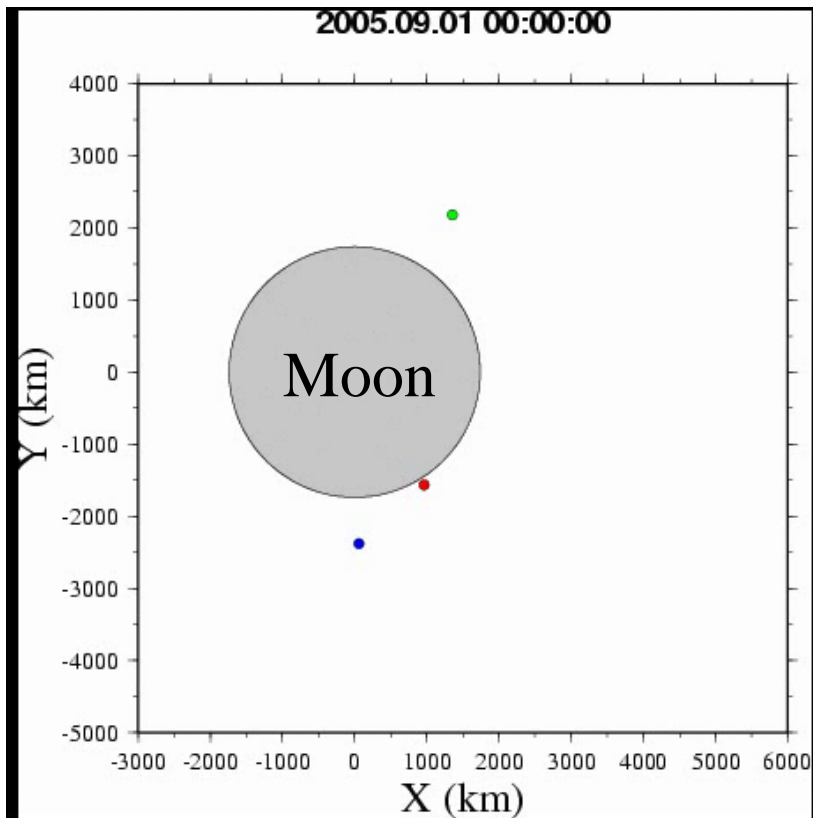
x : コモンパラメータ (重力場係数等)

12時間アークの場合、観測数 < 10000
重力場係数の数: $n_{\max} = 100$ で約 10000

かぐや重力ミッションの特徴

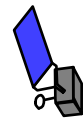
- 平均高度の違う3衛星の追跡
 - 幅広い波長領域で重力場を推定
- 人工的な加速度の入らない二つの子衛星軌道
 - 長いアークの可能性
 - 重力場係数の低次項の改良
- 4-wayドップラー観測（裏側の観測）
- 相対VLBI観測（特にSame-beam）

Three satellites constellation



Combination of **high**,
middle and **low** altitude
satellites

↓
Gravity field retrieval
through wide-range of
wavelength.



● Main Sat : 100km × 100km

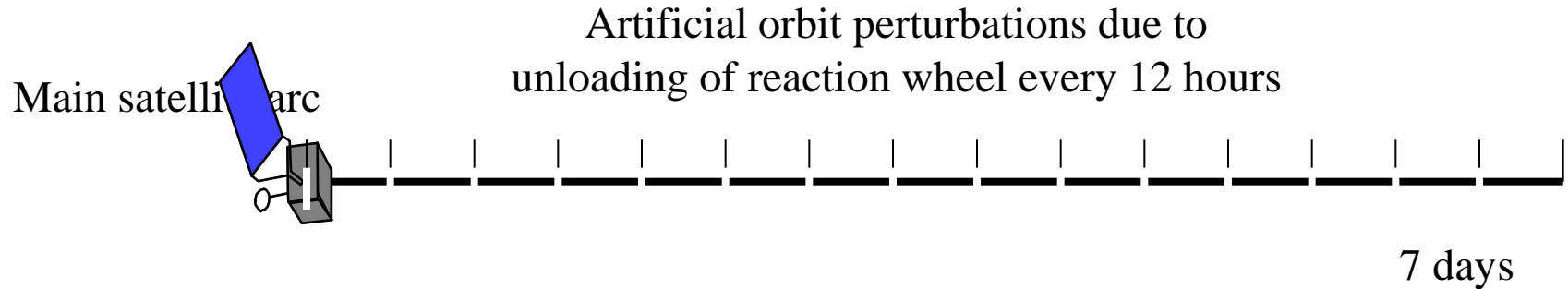


● Vstar : 100km × 800km



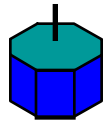
● Rstar : 100km × 2400km

Arc lengths of three satellites

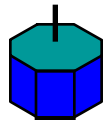


Adequate to retrieve short-wavelength component

Vstar arc



Rstar arc



No artificial orbit perturbation

Adequate to retrieve long-wavelength component

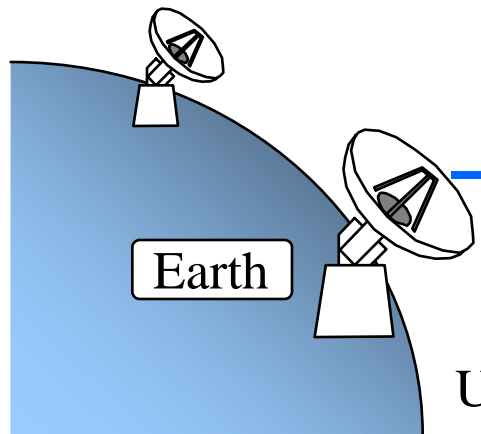
4-way Doppler measurement



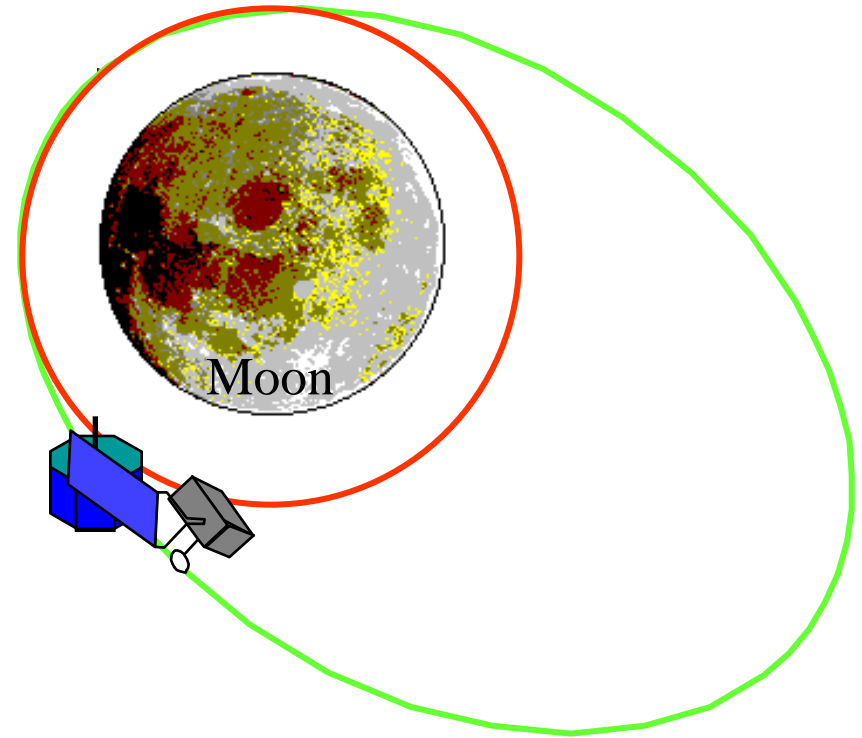
Near-side ← → Far-side

世界初！月裏側重力場の直接観測！

JAXA GN



JAXA
UDSC-64m

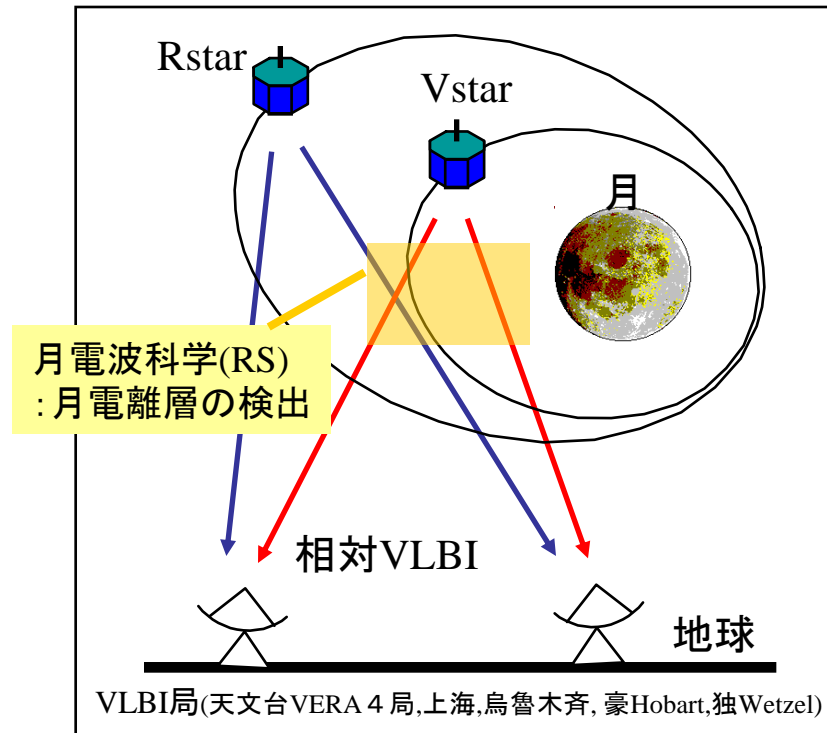


4-way RR (Doppler) for main satellite by way of Rstar
1 mm/s accuracy

Usuda 64m antenna



VRAD: 衛星電波源の多周波相対VLBI観測



RstarとVstarから発信される電波を多周波相対VLBI観測する。

VERA Network



Distribution of VLBI stations for SELENE

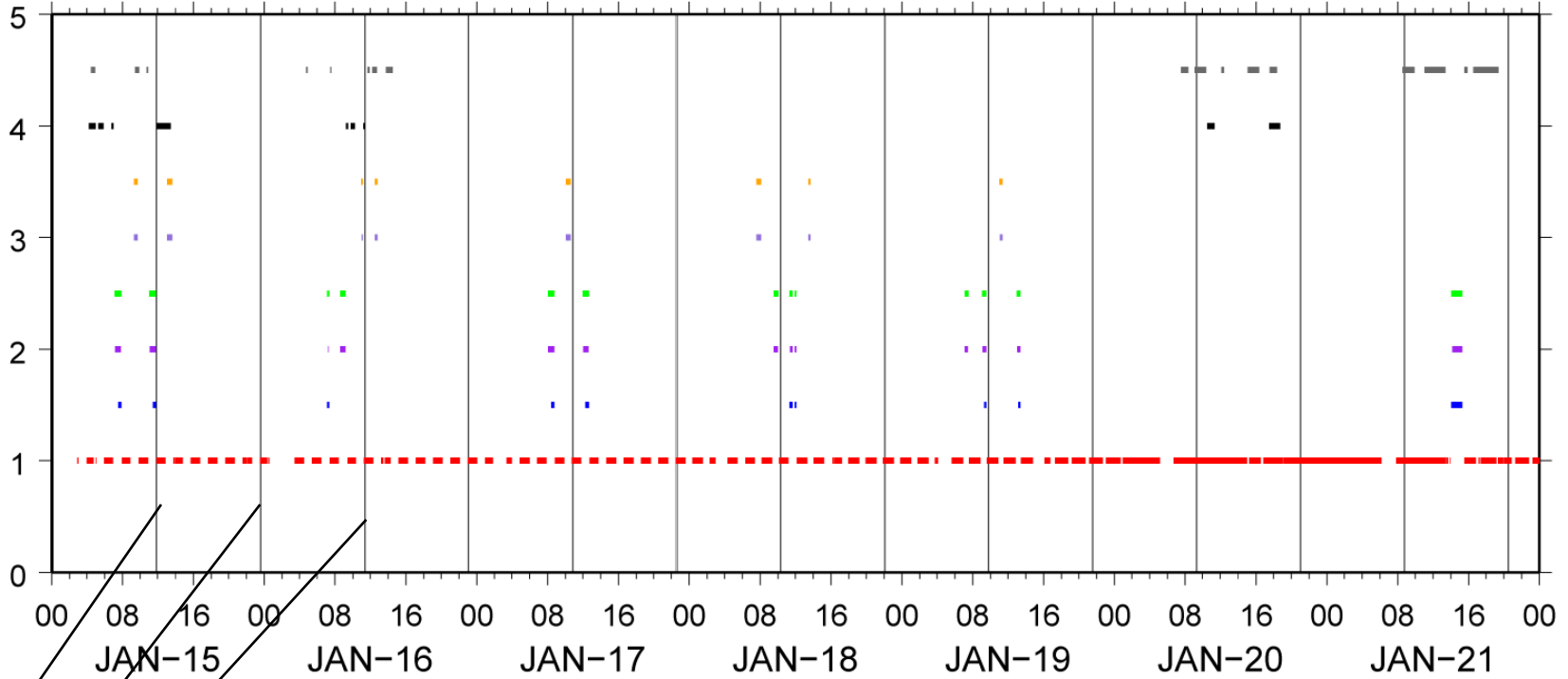


解析結果の紹介

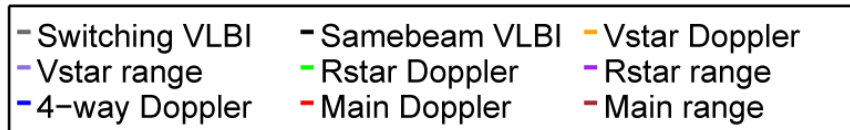
- 裏側の観測は一日にして成らず
- 4-wayドップラーの「残差」に注目
- 月重力場 かぐや before & after
- 地形と重力の対応

An example of time-wise data coverage of SELENE tracking data

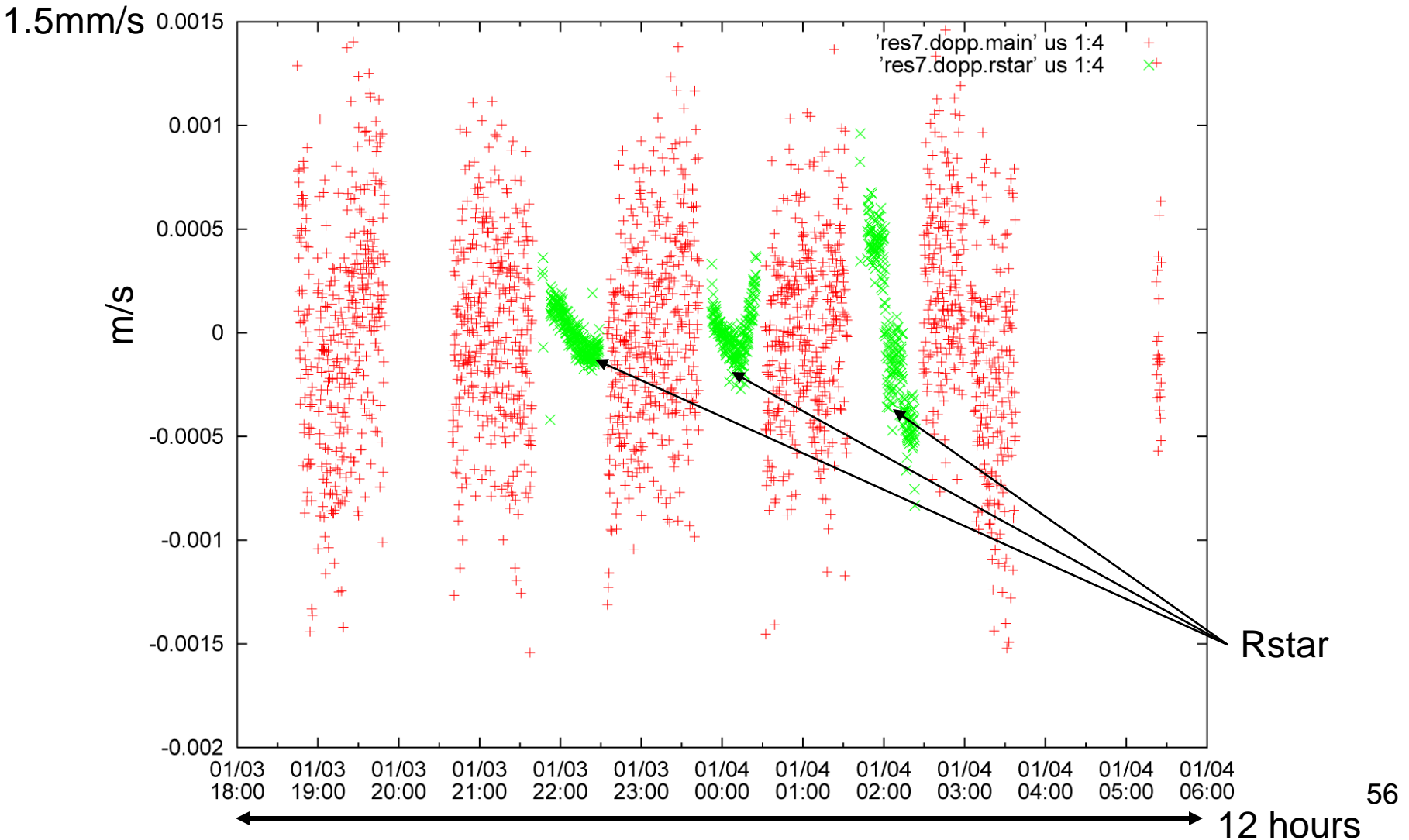
Time-wise data coverage (face-on)



リアクションホイール
アンローディング

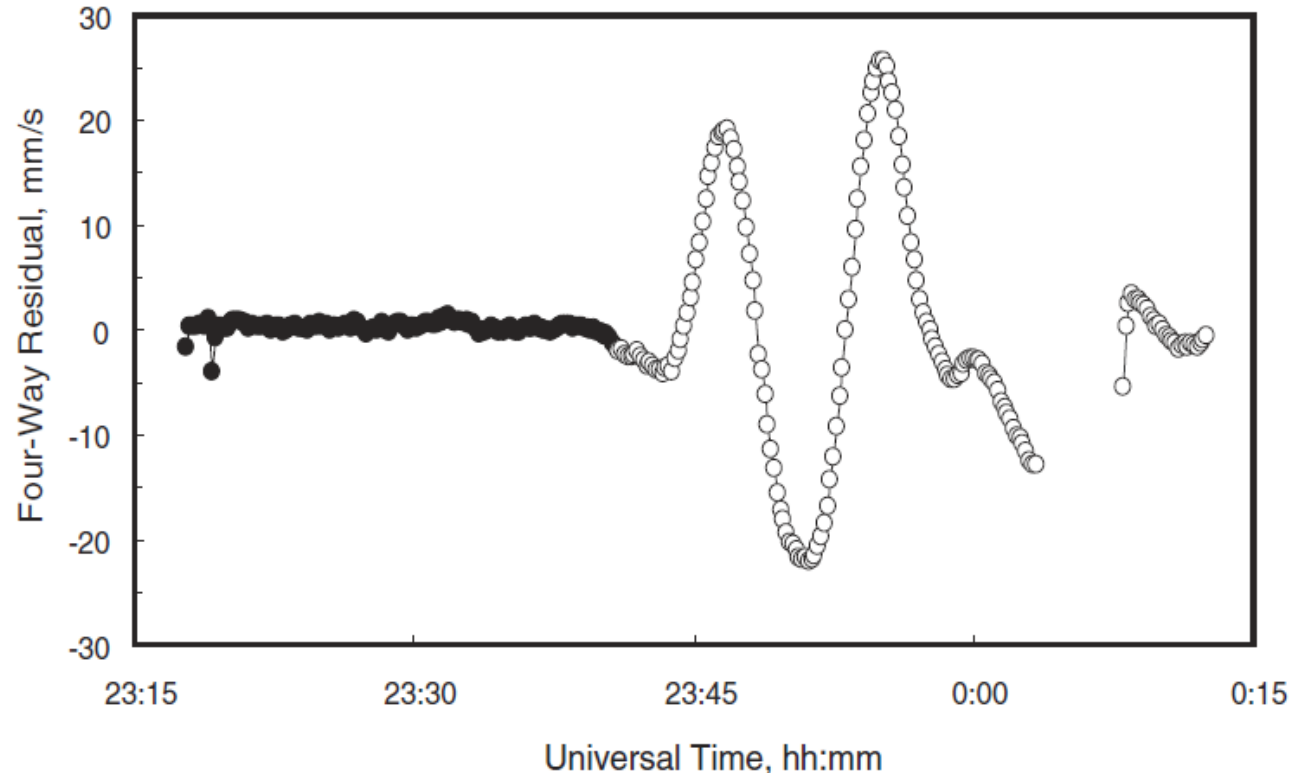


2-way Doppler residuals w.r.t. LP100K



LP100Kモデル(かぐや以前のモデル) に対する4-way Doppler 残差

Fig. 1. Four-way Doppler residuals in pass from 23:17 UT on 5 November to 0:12 UT on 6 November 2007. Solid and open symbols indicate the visibility and invisibility of Main from UDSC, respectively. Four-way data are separated into two arcs by unloading of momentum wheels between 00:03 and 00:08.



Data and analysis setting for SELENE Gravity Model version h (SGM100h)

Tracking data

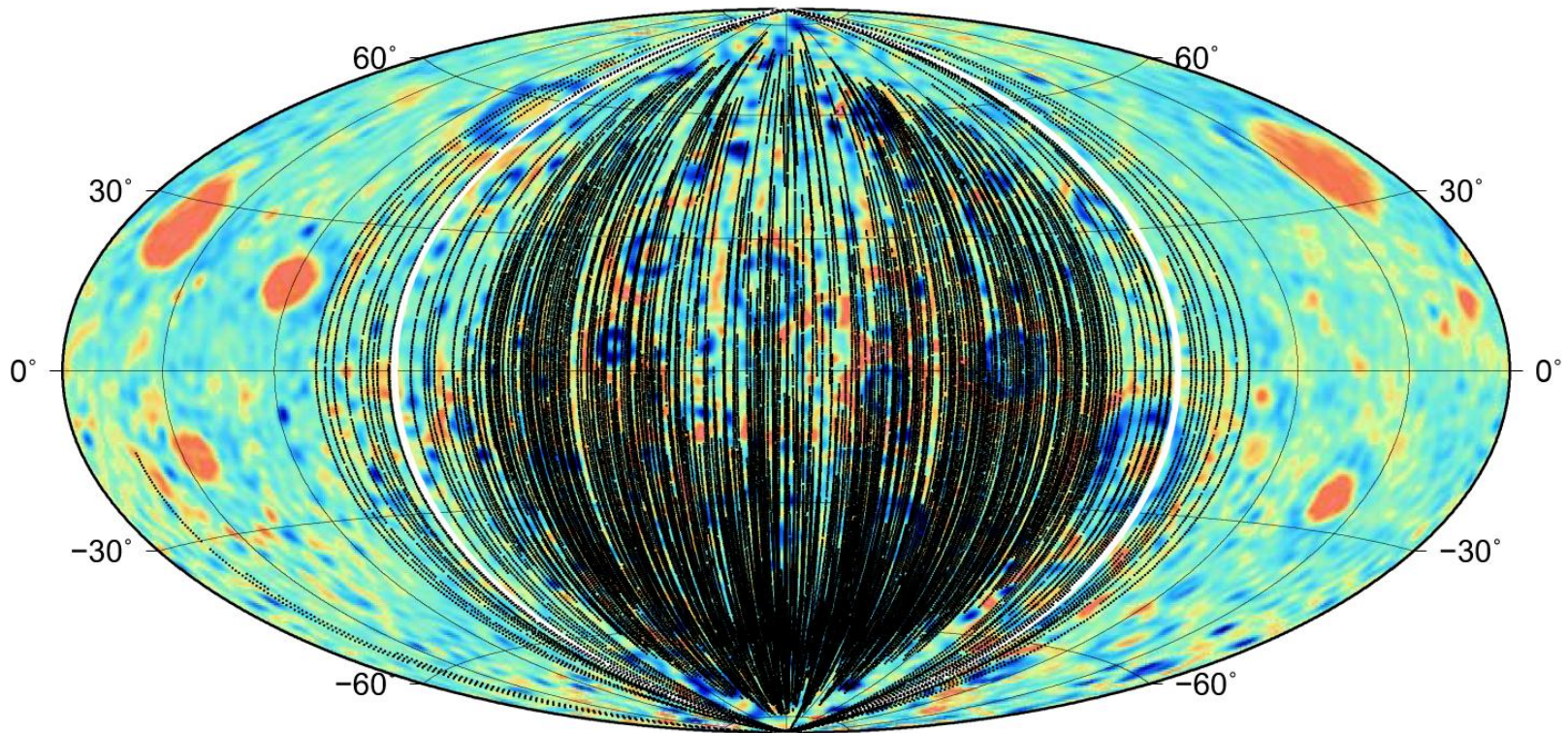
- SELENE : 2007.10.20 ~ 2008.12.26 & 2009.01.30
Doppler + range (no VLBI data)
- Historical: LO I-V, A15/16ss, Clementine,
LP nominal mission, SMART-1

Setting

- GEODYN II, SOLVE system
- Expanded up to degree and order 100
- Ephemeris: DE421
- A Kaula-type constraint of $3.6 \times 10^{-4}/n^2$
- Solar radiation pressure model
SELENE Main: box + wing
SELENE R/Vstar and other satellites : cannonball
- Mean arc length of Rstar = 2.6 days
- VLBI data not included

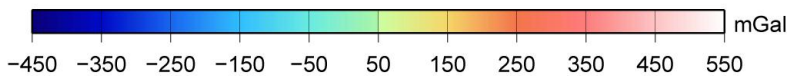
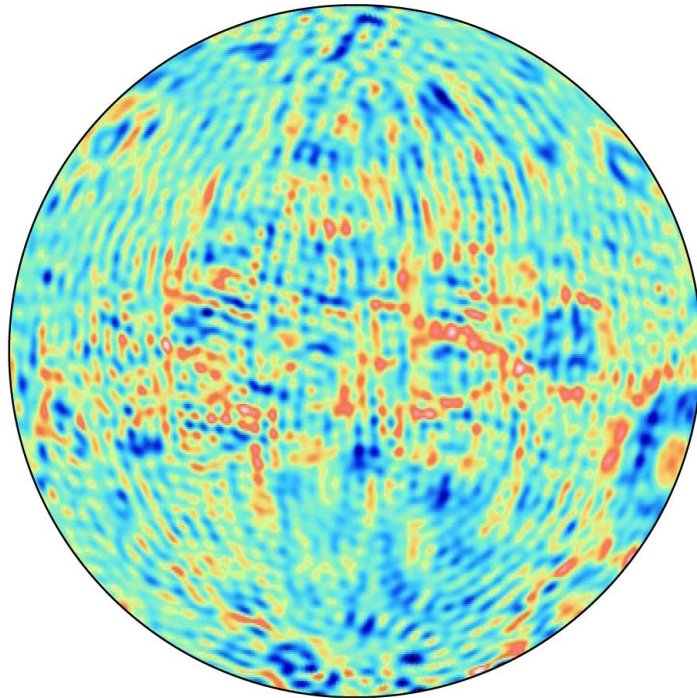
4-way Doppler data coverage achieved during the lifetime of Rstar

071031–090130

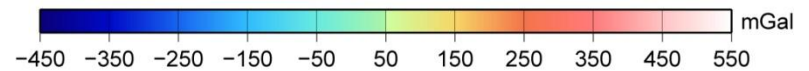
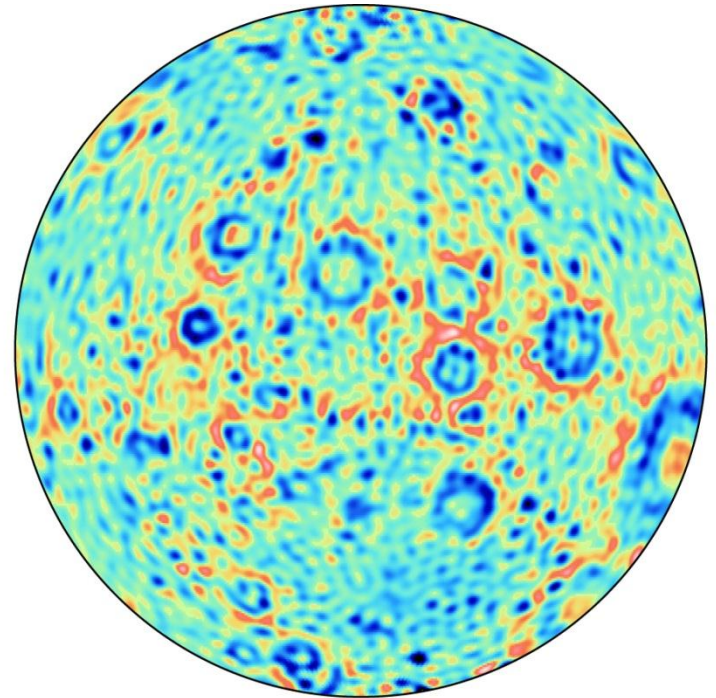


White solid line indicates the boundary between the near-side and the far-side

Old and new views of farside gravity field



LP100K



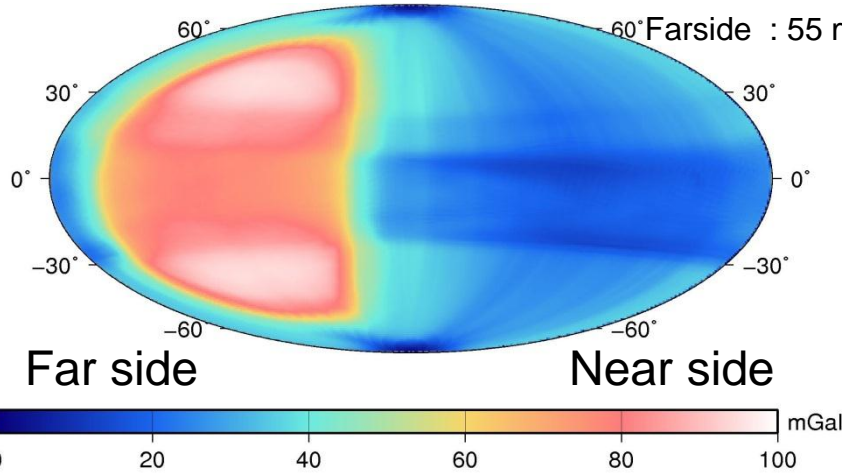
SGM100h

Gravity anomaly errors from the full covariance matrix

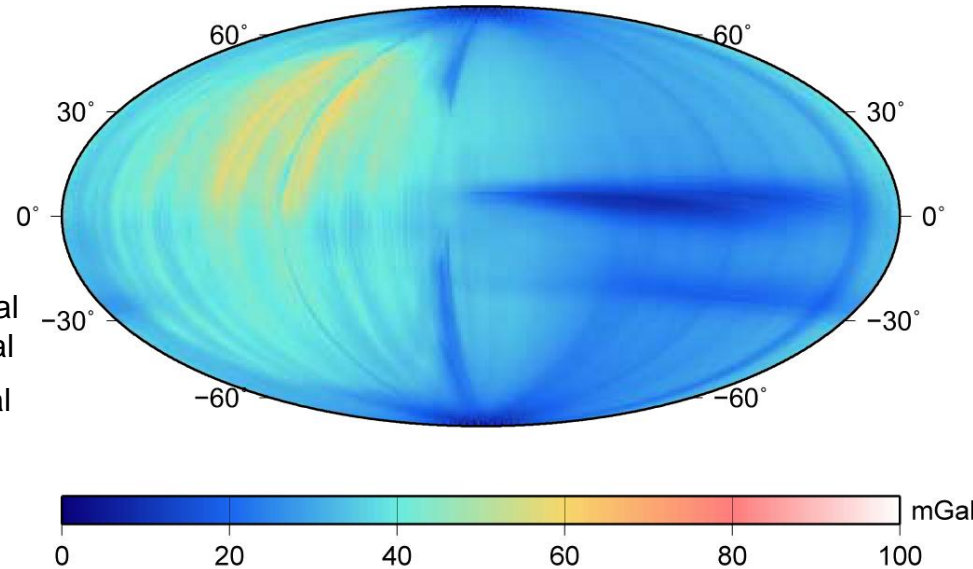
LP100K

Max : 95 mGal
Nearside: 25 mGal

Farside : 55 mGal



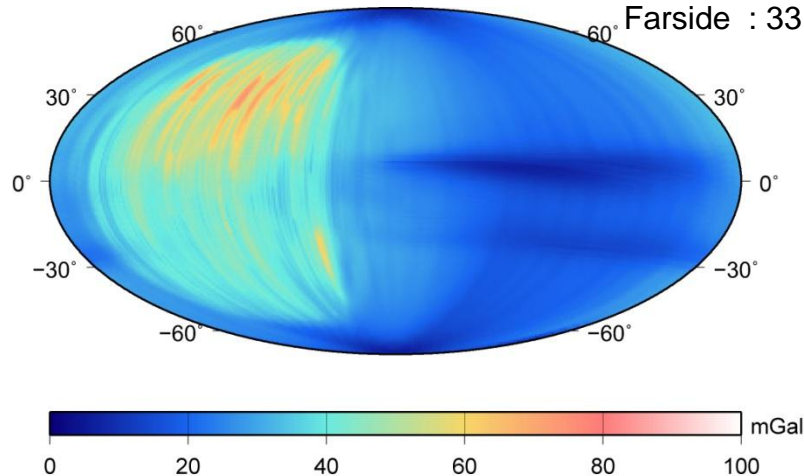
SGM100h



SGM90d

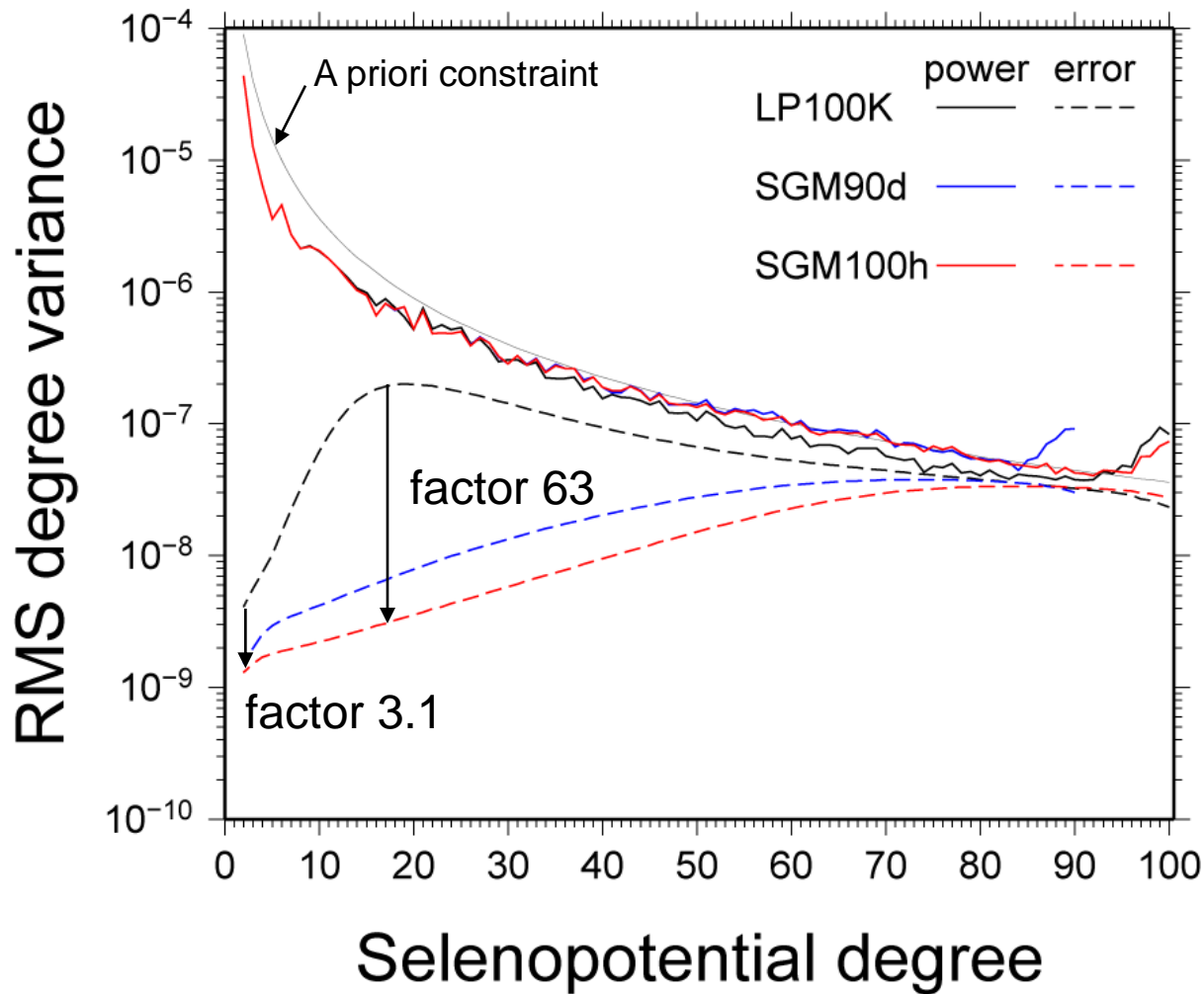
Max : 75 mGal
Nearside: 20 mGal

Farside : 33 mGal



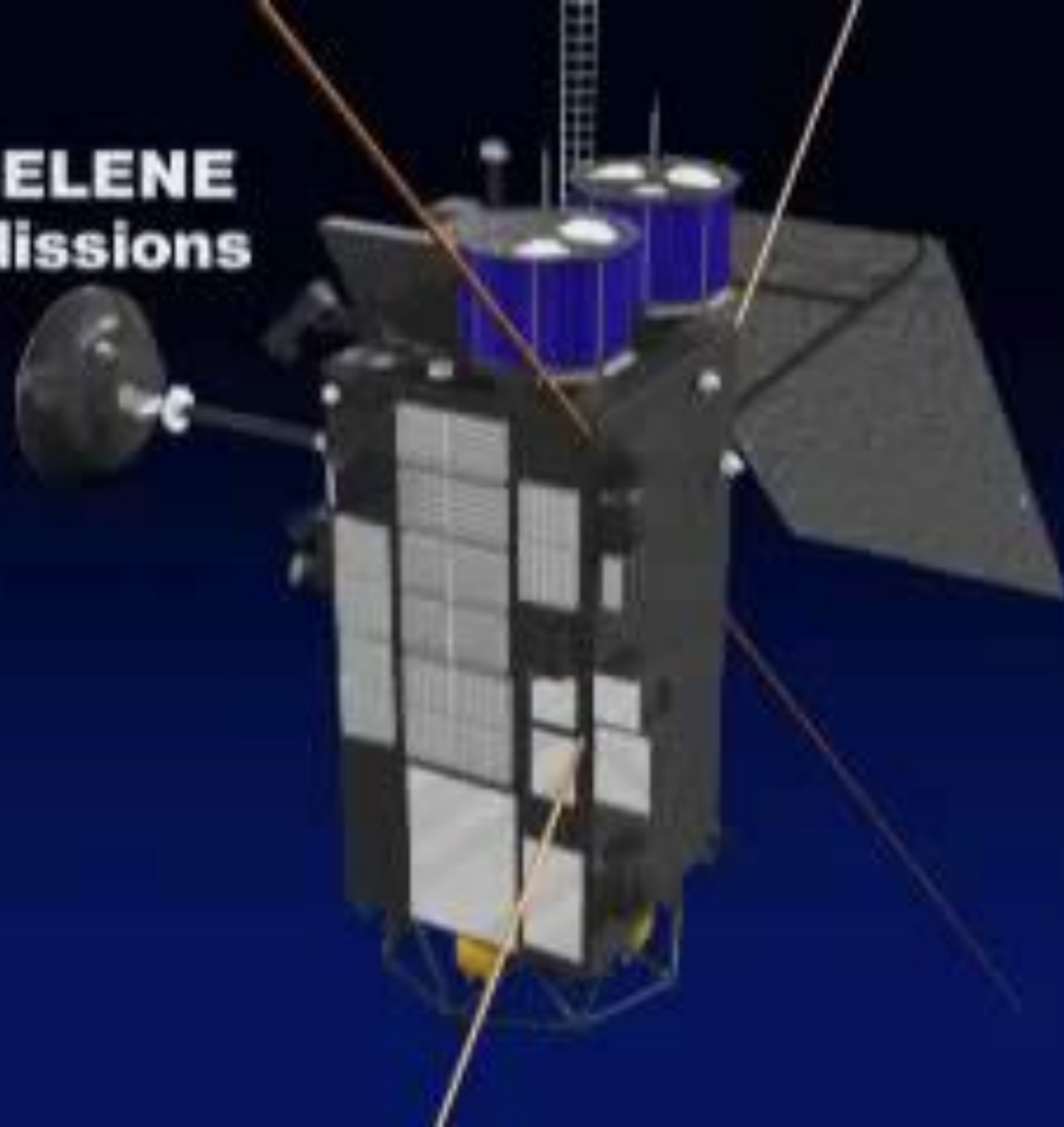
Max : 62 mGal
Nearside: 26 mGal
Farside : 35 mGal

RMS degree variances

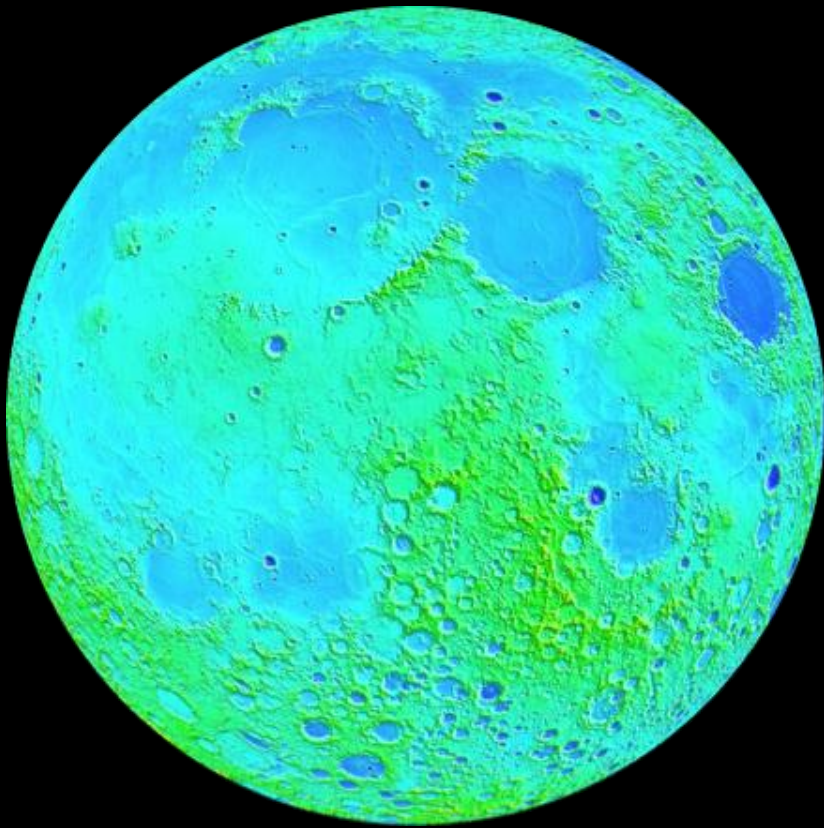


SGM100h gives more than one order of magnitude smaller formal errors with respect to LP100K for degrees 7-39.

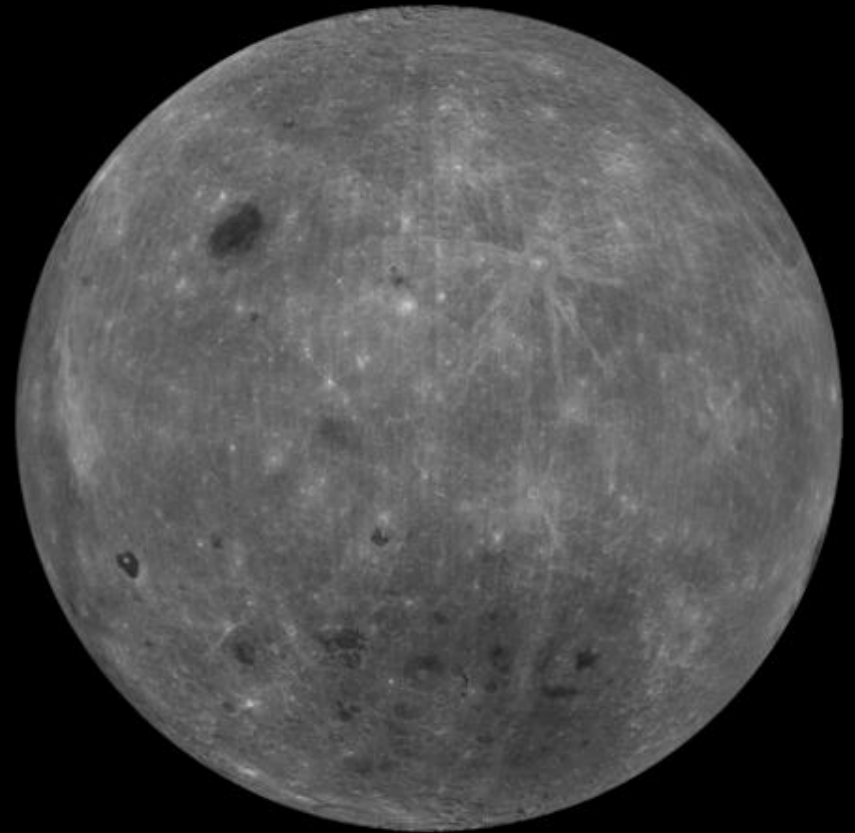
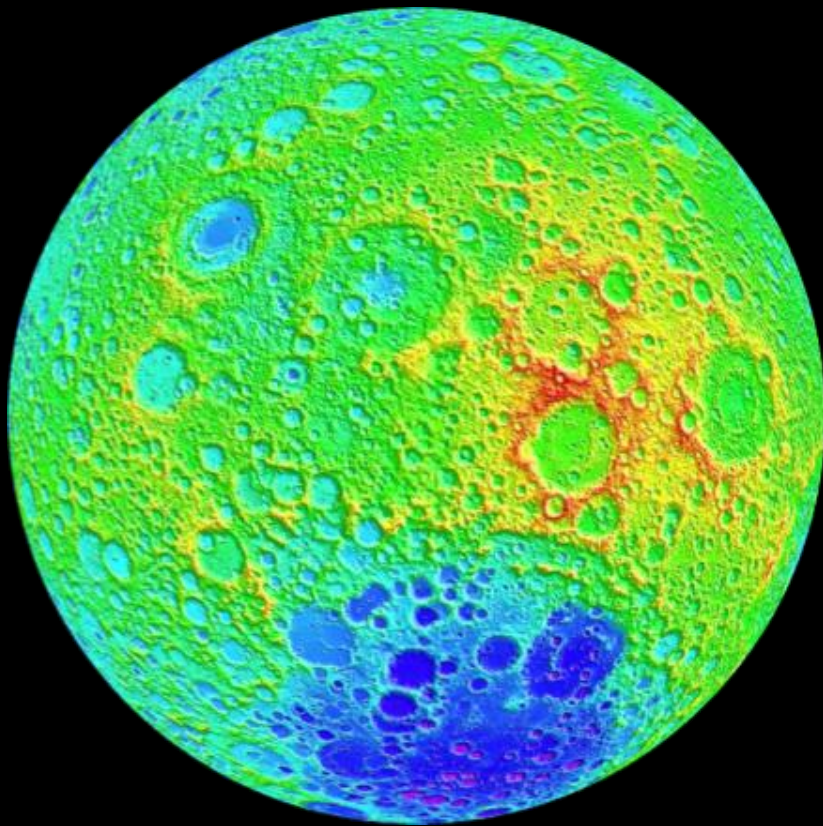
**SELENE
Missions**



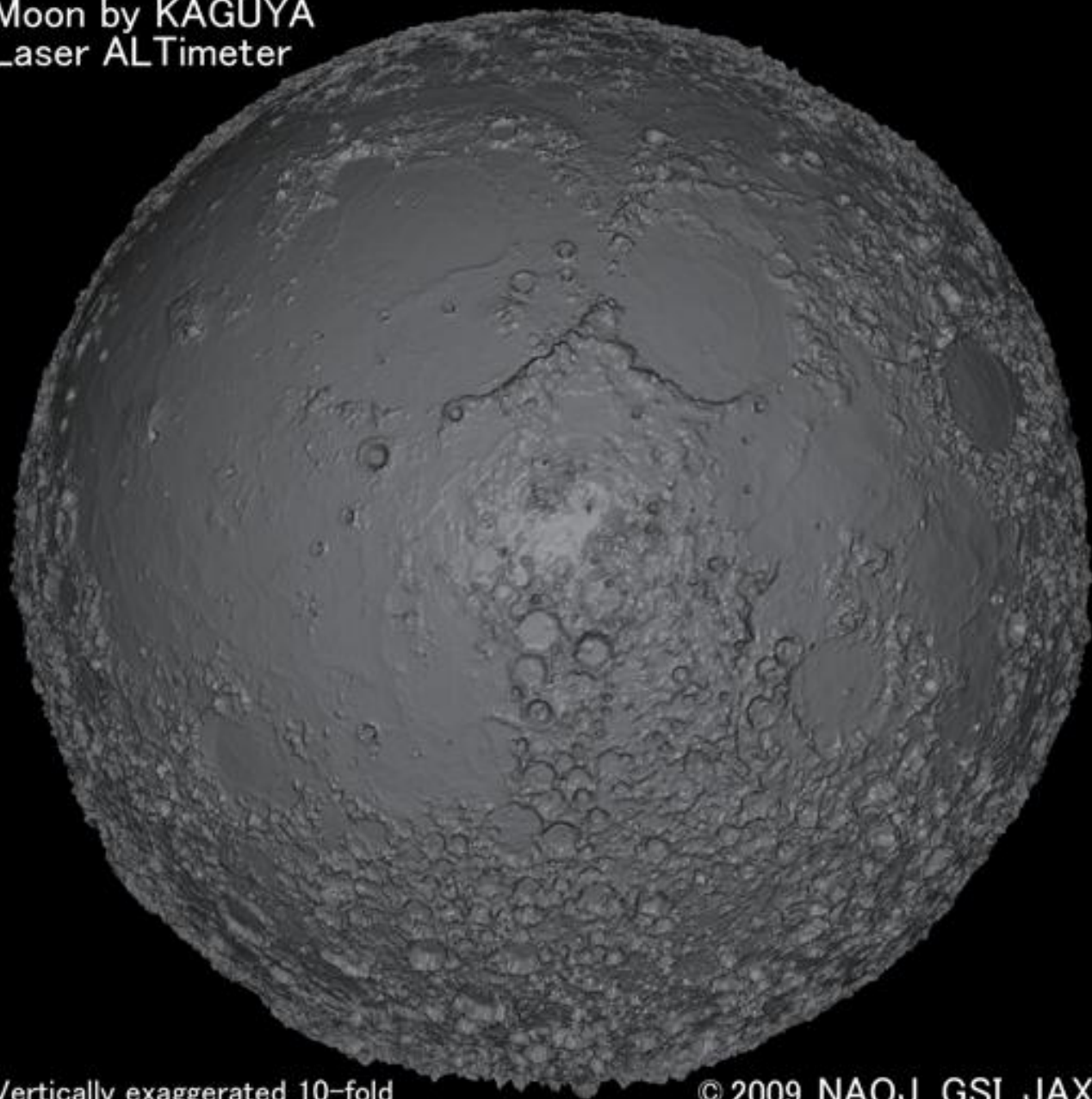
LALT topography nearside



LALT topography farside



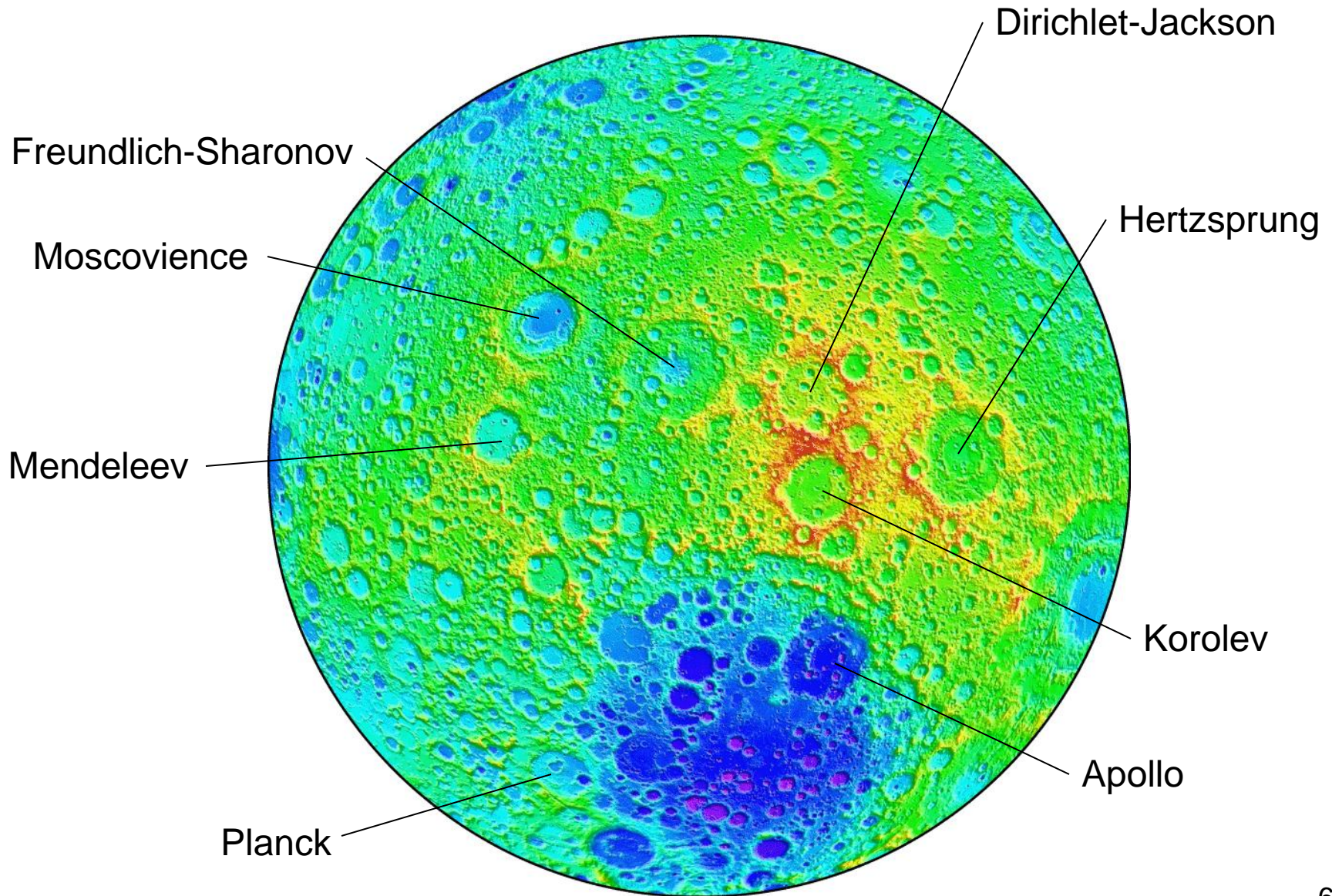
Moon by KAGUYA
Laser ALTimeter



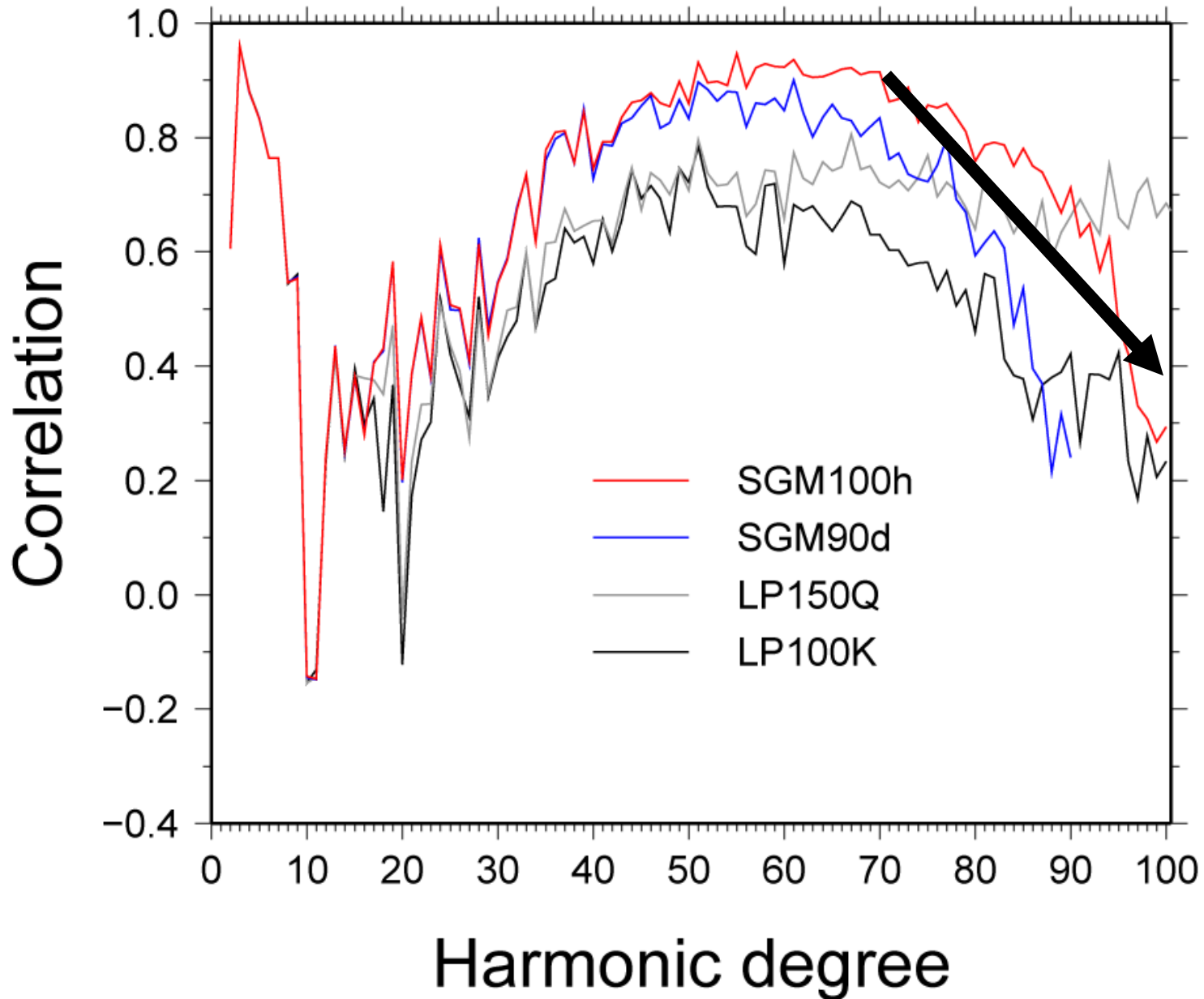
Vertically exaggerated 10-fold

© 2009 NAOJ, GSI, JAXA

Topography-gravity correspondence



Correlation between gravity and topography

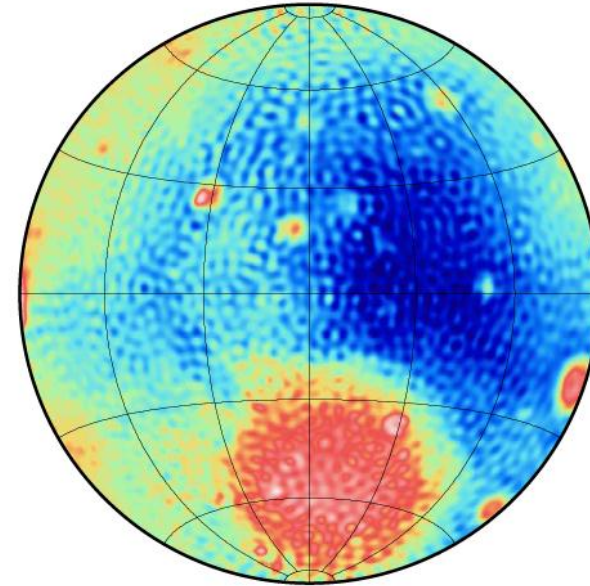
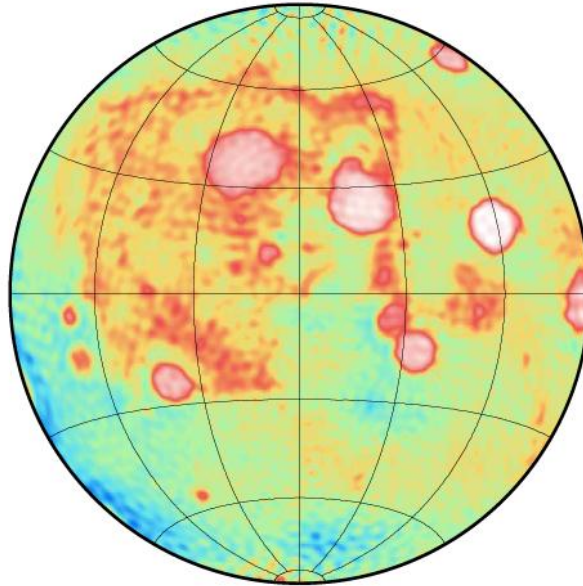


When gravitational attraction from surface topography is subtracted...

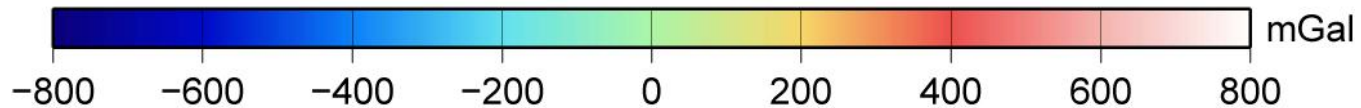
SGM100h nearside

SGM100h farside

nearside



farside



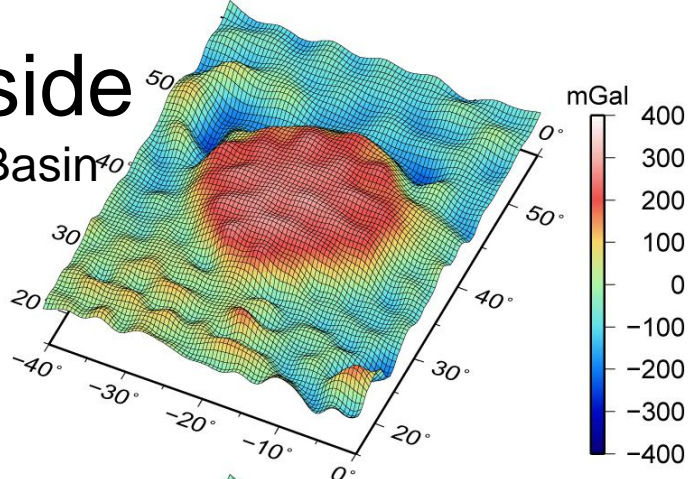
Bouguer gravity anomaly: mainly reflect moho relief
(boundary between crust and mantle)
different between nearside and farside.

Dichotomy is clearly visible not only on the surface, but also in the sub-surface. 69

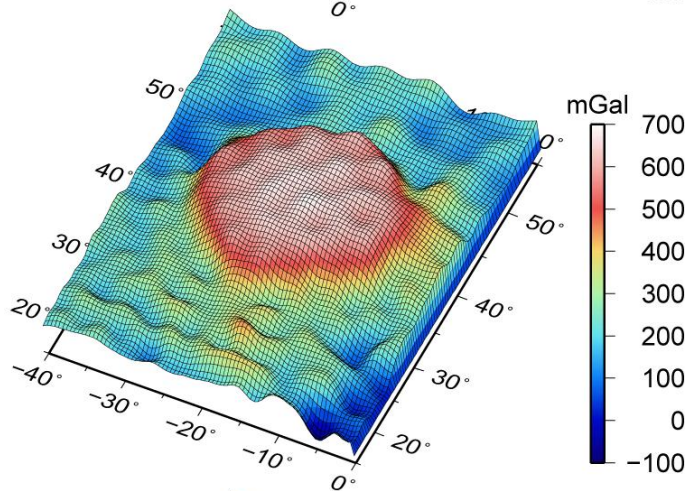
Nearside

Imbrium Basin

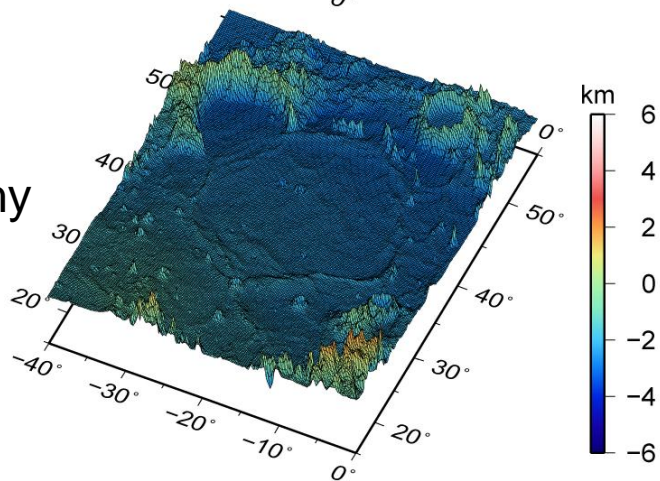
Free-air
gravity
Anomaly



Bouguer
gravity
anomaly



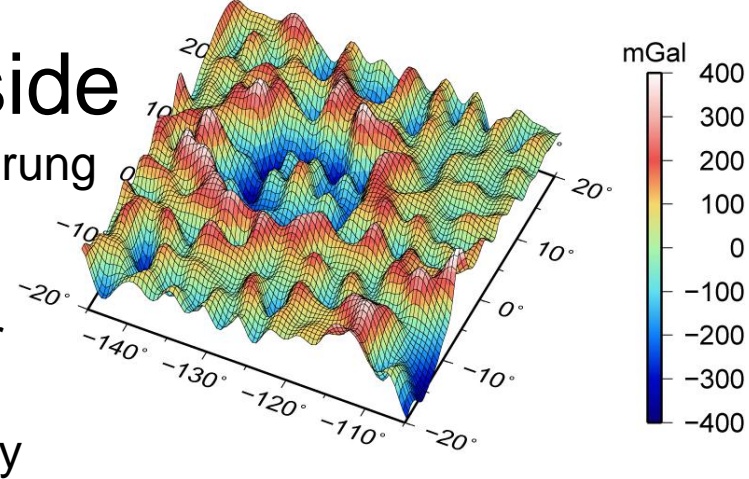
topography



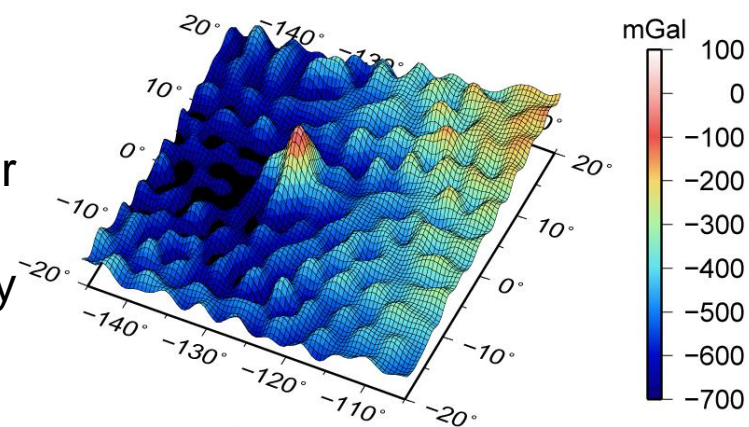
Farside

Hertzprung
Basin

Free-air
gravity
Anomaly



Bouguer
gravity
anomaly



topography

